

Using ensemble copula coupling for multivariate post-processing of ensemble prediction

Mohammadi, S. A.¹  | Azadi, M.¹  

1. Research Institute of Meteorology and Atmospheric Science (RIMAS), Tehran, Iran.

Corresponding Author E-mail: azadi68@hotmail.com

(Received: 20 May 2024, Revised: 7 July 2024, Accepted: 11 Aug 2024, Published online: 5 Oct 2024)

Summary

In many cases, ensemble weather forecasts produced by numerical weather prediction (NWP) models exhibit systematic bias and under-dispersion. Over the past two decades, various ensemble post-processing approaches have been developed to address this issue. These approaches include classical methods such as ensemble model output statistics (EMOS), Bayesian model averaging (BMA), and advanced machine learning-based approaches.

In most ensemble post-processing approaches, it is implicitly assumed that there is statistical independence between different forecast margins, such as lead time, location, and meteorological variables. However, this assumption is not valid for realistic forecast application scenarios. End users may be interested in scenarios such as total hydrological basin precipitation, temporal evolution of precipitation, or the interaction of precipitation and temperature, especially when temperatures are close to zero degrees Celsius. Important examples include hydrological applications, air traffic management, and energy forecasting. Such dependencies exist in raw ensemble forecasts, but these dependencies are ignored if standard univariate post-processing methods are applied separately to each margin.

In recent years, various multivariate post-processing methods have been proposed. These methods can be categorized into two approaches. The goal of the first approach is to directly model the joint distribution by fitting a specific multivariate probability distribution. This approach is mainly used in low-dimensional problems or when a specific structure is chosen for the application at hand. For example, multivariate models for temperature across space, for wind vectors, and joint models for temperature and wind speed. The second approach is a two-step approach. In the first step, univariate post-processing methods are applied independently to all dimensions, and samples are generated from the resulting probability distributions. In the second step, the multivariate dependencies are recovered by reordering the univariate sample values according to the ranking order structure of a specific multivariate dependence pattern. Mathematically, this is equivalent to using a copula (parametric or nonparametric). Examples include ensemble copula coupling (ECC), Schaake Shuffle, and the Gaussian copula approach.

This paper presents multivariate ensemble post-processing of temperature, two meter above ground using the ECC approach. The EMOS method is used for univariate post-processing. The performance of the raw ensemble, EMOS post-processed ensemble, and ECC systems is evaluated using energy score (ES) and variogram score (VS). The ECMWF 51-member ensemble system is used as raw data for the period from January 1, 2018 to December 31, 2023.

The results showed that in addition to eliminating the bias of the raw ensemble forecast, the ECC method also preserved the dependence structure between the ensemble members. In contrast, the EMOS method only eliminated the biases without considering the dependence between the ensemble members. Because of its ability to preserve the dependence structure, the ECC method was able to achieve significantly better results than the EMOS method on a variety of metrics, including energy scores and variogram score. This suggests that the ECC method is a valuable tool for ensemble post-processing, and that it should be considered for a wide range of applications.

Keywords: Copula, Ensemble prediction, Multivariate post-processing.

Cite this article: Mohammadi, S. A., & Azadi, M. (2024). Using ensemble copula coupling for multivariate post-processing of ensemble prediction. *Journal of the Earth and Space Physics*, 50(3), 791-802. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.376300.1007606>

E-mail: (1) mohamadi.atefeh@yahoo.com



Publisher: University of Tehran Press.
DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.376300.1007606>

Print ISSN: 2538-371X
Online ISSN: 2538-3906

استفاده از جفت‌سازی کاپیولای همادی برای پس‌پردازش پیش‌بینی همادی چند متغیره

سیده عاطفه محمدی^۱ | مجید آزادی^۱ ✉

۱. پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو، تهران، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: azadi68@hotmail.com

(دریافت: ۱۴۰۳/۲/۳۱، بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۱۷، پذیرش نهایی: ۱۴۰۳/۵/۲۱، انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۷/۱۴)

چکیده

پیش‌بینی‌های همادی اغلب دارای اربیی و خطاهای پراکندگی هستند و بنابراین باید از نظر آماری پس‌پردازش شوند. با این‌حال، رویکردهای پس‌پردازش همادی تک‌متغیره مانند EMOS و BMA برای یک کمیت، در یک مکان واحد و فقط برای یک افق پیش‌بینی معین اعمال می‌شوند و در نتیجه ساختارهای وابستگی مکانی، زمان و بین متغیری را در نظر نمی‌گیرند. برای لحاظ‌کردن این وابستگی‌ها، روش‌های پس‌پردازش همادی چند متغیره مانند روش جفت‌سازی کاپیولای همادی (ECC) پیشنهاد شده‌اند. روش ECC، شامل دو مرحله است؛ در مرحله اول پس‌پردازش همادی تک‌متغیره در همه ابعاد به صورت مستقل انجام می‌شود و در مرحله دوم، وابستگی‌های چندمتغیره با مرتب‌کردن مقادیر نمونه‌های تک‌متغیره با توجه به ساختار ترتیب رتبه‌بندی یک الگوی وابستگی بازمی‌شود. در مقاله حاضر، عملکرد روش ECC با روش EMOS مقایسه شده است. برای این منظور، از سامانه همادی ۵۱ عضوی ECMWF در بازه زمانی ۱ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳ برای لحاظ‌کردن وابستگی مکانی پیش‌بینی دمای ۴۸ ساعته دمای دو متری در دو ایستگاه مهرآباد و کرج استفاده شده است. نتایج نشان دادند که هر دو روش پس‌پردازش، پیش‌بینی خام را تا ۸۱٪ بهبود دادند اما با اعمال روش ECC، علاوه بر این که اربیی پیش‌بینی همادی خام از بین رفت، بلکه ساختار وابستگی بین اعضای همادی نیز حفظ شد. در حالی که در روش EMOS، فقط اربیی‌ها از بین رفتند بدون این‌که وابستگی بین اعضای همادی در نظر گرفته شود.

واژه‌های کلیدی: پس‌پردازش چند متغیره، پیش‌بینی همادی، کاپیولا.

۱. مقدمه

در بسیاری از موارد، پیش‌بینی‌های همادی تولید شده توسط مدل‌های پیش‌بینی عددی وضع هوا (NWP: Numerical Weather Prediction) دارای اربیی سامانمند و فرورپراکنش هستند. در طی دو دهه گذشته، انواع مختلفی از رویکردهای پس‌پردازش همادی برای رفع این مشکل توسعه یافته‌اند. این رویکردها شامل روش‌های کلاسیک نظیر آماره برون‌داد مدل همادی (EMOS: Ensemble Model Output Statistics) (نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۵)، میانگین‌گیری مدل بایزی (BMA: Bayesian Model Averaging) (رافتری و همکاران، ۲۰۰۵) و رویکردهای پیشرفته مبتنی بر یادگیری ماشین (شالز و لرج، ۲۰۲۲) هستند. وانیتسم و همکاران (۲۰۲۱)، خلاصه‌ای جامع از روش‌های آماری پس‌پردازش همادی ارائه داده‌اند.

در بیشتر رویکردهای پس‌پردازش همادی، به‌طور ضمنی فرض می‌شود که میان حاشیه‌های مختلف پیش‌بینی مانند برد زمان، مکان و متغیرهای هواشناسی، استقلال آماری وجود دارد. اما این فرض برای سناریوهای واقعی پیش‌بینی کاربردی نیست. کاربران نهایی ممکن است به سناریوهایی مانند مجموع بارش در کل حوضه، تحول زمانی بارش، یا تعامل بارش و دما به ویژه زمانی که دما نزدیک به صفر درجه سلسیوس است، علاقه‌مند باشند. نمونه‌های مهم شامل کاربردهای هیدرولوژیکی (شیورر و همکاران، ۲۰۱۷)، مدیریت ترافیک هوایی (چالولوس و لیگروس، ۲۰۰۷) و پیش‌بینی انرژی (پینسون و مسنر، ۲۰۱۸) است. چنین وابستگی‌هایی در پیش‌بینی‌های همادی اولیه وجود دارند، اما اگر روش‌های معمول پس‌پردازش تک‌متغیره در هر یک از حاشیه‌ها به صورت جداگانه اعمال شوند، این

در این زمینه باشد. در مقاله حاضر، به پس‌پردازش همادی چند متغیره دمای دو متری با استفاده از رویکرد ECC (شفزیک و همکاران، ۲۰۱۳) با در نظر گرفتن وابستگی مکانی بین دو ایستگاه مهرآباد تهران و ایستگاه کرج پرداخته می‌شود. برای پس‌پردازش تک‌متغیره از روش EMOS (نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده می‌شود. عملکرد سامانه‌های همادی خام، همادی پس‌پردازش شده EMOS و ECC با امتیازهای انرژی (ES: Energy Score) و وریوگرام (VS: Variogram Score) بررسی می‌شوند. از سامانه همادی ۵۱ عضوی ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) به‌عنوان پیش‌بینی خام دمای دو متری در بازه اول ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳ استفاده شده است. در بخش ۲ درباره داده‌های مورد استفاده و مشخصات ایستگاه‌های همدیدی توضیحاتی داده شده است. معرفی روش‌های مختلف پس‌پردازش و سنج‌های درستی‌سنجی در بخش ۳ آورده شده است. در بخش ۴ به بررسی نتایج به‌دست آمده پرداخته شده و در نهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری بیان شده است.

۲. داده‌ها

در پژوهش حاضر، به بررسی پیش‌بینی همادی چند متغیره دمای دو متری در دو ایستگاه همدیدی مهرآباد تهران و ایستگاه همدیدی کرج پرداخته می‌شود. ایستگاه مهرآباد تهران دارای طول، عرض و ارتفاع به ترتیب ۵۱/۳، ۳۵/۷ درجه و ۱۱۹۱ متر و ایستگاه کرج با طول، عرض و ارتفاع به ترتیب ۵۰/۹، ۳۵/۸ درجه و ۱۲۹۲ متر است. به دلیل این که هدف پژوهش حاضر در نظر گرفتن وابستگی مکانی در پیش‌بینی‌های همادی چند متغیره است، در این دو ایستگاه به دلیل نزدیکی مکانی و تقریباً هم ارتفاع بودن، پیش‌بینی‌های همادی دمای دو متری در این دو ایستگاه دارای وابستگی بالایی بوده و برای تحلیل نتایج بسیار مناسب هستند.

داده‌های مورد استفاده در مقاله حاضر، پیش‌بینی‌های همادی جهانی ECMWF با ۵۱ عضو می‌باشد، به طوری که

وابستگی‌ها نادیده گرفته می‌شوند.

در سال‌های گذشته، روش‌های پس‌پردازش چندمتغیره متنوعی ارائه شده است (شفزیک و مولر، ۲۰۱۸؛ لاکاتوس و همکاران، ۲۰۲۳). این روش‌ها به دو رویکرد دسته‌بندی می‌شوند. هدف رویکرد اول، مدل کردن مستقیم توزیع مشترک با برازش یک توزیع احتمال چندمتغیره خاص است. این رویکرد عمدتاً در مسائل با ابعاد کم استفاده می‌شود و یا اگر یک ساختار خاص برای کاربرد مورد نظر انتخاب شده باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال، مدل‌های چندمتغیره برای دما در امتداد فضا (فلدمن و همکاران، ۲۰۱۵)، برای بردارهای باد (شوهن و همکاران، ۲۰۱۲؛ لانگ و همکاران، ۲۰۱۹) و مدل‌های مشترک برای دما و سرعت باد (باران و مولر، ۲۰۱۵؛ ۲۰۱۷).

رویکرد دوم یک رویکرد دو مرحله‌ای است. در گام اول، روش‌های پس‌پردازش تک‌متغیره در همه ابعاد به صورت مستقل اعمال می‌شوند و از توزیع‌های احتمال به دست آمده نمونه‌هایی تولید می‌شوند. در گام دوم، وابستگی‌های چندمتغیره با مرتب کردن مقادیر نمونه‌های تک‌متغیره با توجه به ساختار ترتیب رتبه‌بندی یک الگوی وابستگی چندمتغیره خاص بازیابی می‌شود. از نظر ریاضی، این روش معادل بکارگیری یک کاپیولا (Copula) (پارامتری یا ناپارامتری) است. به‌عنوان مثال، می‌توان به جفت‌سازی کاپیولای همادی (ECC: Ensemble Copula Coupling) (شفزیک و همکاران، ۲۰۱۳)، شاک شافل (Schaaake Shuffle) (کلارک و همکاران، ۲۰۰۴) و رویکرد کاپیولای گاوسی (مولر و همکاران، ۲۰۱۳) اشاره کرد.

در داخل کشور، تحقیقاتی در زمینه پیش‌بینی همادی (قادر و همکاران، ۱۳۹۴؛ مرادیان و همکاران، ۱۳۹۹) و پس‌پردازش تک‌متغیره همادی (محمدی و همکاران، ۲۰۱۶؛ فتحی و همکاران، ۱۳۹۷؛ آزادی و محمدی، ۱۳۹۸؛ ده‌ملائی و همکاران، ۱۴۰۰؛ محمدی و آزادی، ۱۴۰۱) انجام شده است. در مورد پس‌پردازش چند متغیره همادی در زمینه هواشناسی در داخل کشور تا به حال پژوهشی صورت نگرفته است و مقاله حاضر می‌تواند اولین پژوهش

یک عضو کنترلی است و سایر ۵۰ عضو همادی با پیرشیدگی تصادفی تولید شده‌اند که از نظر آماری غیرقابل تشخیص (و در نتیجه تعویض پذیر) در پژوهش حاضر، دمای دو متری است. داده‌ها شامل پیش‌بینی‌های دمای دو متری از اول ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳ با برد زمانی ۴۸ ساعت آینده است و ساعت شروع اجرای مدل 12:00 UTC می‌باشد. داده‌های همادی ECMWF دارای تفکیک افقی ۰/۵ درجه هستند که با استفاده از روش دوخطی (bilinear) به ایستگاه‌های همدیدی مورد نظر درونیابی شده‌اند. این داده‌ها از طریق پایگاه داده (TIGGE: THORPEX Interactive Grand Global Ensemble) به صورت رایگان قابل دانلود هستند. داده‌های مشاهداتی متناظر توسط سازمان هواشناسی کشور در دسترس قرار گرفتند.

۳. روش پژوهش

همان‌طور که در مقدمه گفته شد، در این مقاله از رویکرد دو مرحله‌ای برای پس‌پردازش چند متغیره استفاده می‌شود. به این صورت که پس از کالیبراسیون تک‌متغیره اولیه، پیش‌بینی‌های چند متغیره با ترکیب پیش‌بینی‌های پس‌پردازش شده منفرد با کمک یک کاپولای تجربی به دست می‌آیند. در ادامه، ابتدا چند نماد کلی که در طول این بخش استفاده خواهد شد، آورده می‌شود و سپس درباره پس‌پردازش تک‌متغیره، پس‌پردازش چندمتغیره و روش‌های درستی‌سنجی پیش‌بینی توضیحاتی داده خواهد شد.

فرض کنید L ابعاد برداری است که به متغیر $\lambda \in \{1, \dots, I\}$ در مکان $\lambda \in \{1, \dots, J\}$ و زمان $k \in \{1, \dots, K\}$ اشاره دارد و $L = I \times J \times K$ به‌عنوان مثال برای مطالعه موردی در پژوهش حاضر، ما با پیش‌بینی دمای ۴۸ ساعته ($I=1$) در دو مکان مختلف ($J=2$) سر و کار داریم و بنابراین ابعاد مسئله ۲ متغیره ($L=2$) است. فرض کنید $f_1^{(l)}, f_2^{(l)}, \dots, f_{51}^{(l)}$ پیش‌بینی‌های سامانه همادی ۵۱ عضو ECMWF ($N=51$) در بعد λ باشند. $f_1^{(l)}$

۳-۱. پس‌پردازش تک‌متغیره

برای کالیبره کردن پیش‌بینی‌های همادی برای یک متغیر در مکان و زمانی معلوم با یک بُرد پیش‌بینی معین، می‌توان از میان بسیاری از روش‌های پیشرفته، همان‌طور که در مقدمه گفته شد، یک روش را انتخاب کرد. در اینجا ما روش محاسباتی کارآمد EMOS را در نظر می‌گیریم، که در آن پیش‌بینی‌های پس‌پردازش شده در قالب توزیع‌های پیش‌بینی پارامتری به دست می‌آیند. روش EMOS برای متغیرهای مختلف وضع هوا، از نظر خانواده توزیع پارامتری مورد استفاده و توابع پیوندی که پارامترهای توزیع پیش‌بینی را به پیش‌بینی‌های همادی خام مرتبط می‌کنند، متفاوت است. در این بخش برای سادگی در نمادگذاری، اندیس مربوط به بُعد (l) حذف می‌شود و $f_n = f_n^l$, $n = 1, 2, \dots, 51$.

توزیع نرمال و تعمیم‌های آن (نرمال کج، مخلوطی از نرمال‌ها و غیره) به‌طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی دما مورد استفاده قرار می‌گیرند (به‌عنوان مثال، نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۵؛ رافتری و همکاران، ۲۰۰۵؛ رسپ و لرج، ۲۰۱۸؛ تیلر، ۲۰۲۱). توزیع پیش‌بینی EMOS که توسط نیتینگ (۲۰۱۴) به‌طور خاص برای متغیر T2M سامانه همادی ۵۱ عضو ECMWF پیشنهاد شده است توزیع گاوسی است با میانگین μ و واریانس σ^2 به‌صورت $\mu = a_0 + a_1 f_{CTRL} + a_2 \bar{f}_{ENS}$, $\sigma^2 = b_0 + b_1 S_{ENS}^2$ که \bar{f}_{ENS} و S_{ENS}^2 به ترتیب میانگین و واریانس سامانه همادی ۵۰ عضو تعویض پذیر هستند: $\bar{f}_{ENS} = \frac{1}{50} \sum_{n=1}^{50} f_k$ مدل پارامترهای $S_{ENS}^2 = \frac{1}{50} \sum_{n=1}^{50} (f_k - \bar{f}_{ENS})^2$ $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ با کمینه کردن امتیاز احتمالاتی رتبه‌ای پیوسته (CRPS: Continuous Ranked Probability Score) در طول دوره آموزش تخمین زده می‌شوند (نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۵).

۳-۲. پس‌پردازش چند متغیره

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 E_N \left(\frac{i_1}{N}, \dots, \frac{i_L}{N} \right) & \\
 &:= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{\text{rank}(f_n^1) \leq i_1, \dots, \text{rank}(f_n^L) \leq i_L\}} \quad (2) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{l=1}^L \mathbf{1}_{\{\text{rank}(f_n^l) \leq i_l\}}
 \end{aligned}$$

که در آن $0 \leq i_1, \dots, i_L \leq N$ اعداد صحیح هستند و $\mathbf{1}_A$ تابع نشانگر (Indicator function) است که در صورت تحقق A (شرط تابع نشانگر) مقدار آن برابر با ۱ و در غیر این صورت صفر خواهد بود. با توجه به تعریف معادله (۱) - (۲)، کاپیولای تجربی را می‌توان به عنوان توزیع تجربی داده‌های تبدیل رتبه داده شده توسط τ تفسیر کرد.

در رویکرد جفت‌سازی کاپیولای همادی (ECC)، الگوی وابستگی از پیش‌بینی‌های همادی خام مربوطه به دست می‌آید. این روش که توسط شفزیبک و همکاران (۲۰۱۳) معرفی شد، شامل دو مرحله زیر است:

۱- با اعمال یک روش پس‌پردازش تک‌متغیره مانند EMOS یا BMA روی سامانه همادی خام برای هر بعد $l = 1, 2, \dots, L$ ، یک توزیع پیش‌بینی پس‌پردازش شده $F^{(l)}$ به دست آورده شود. سپس یک نمونه $\tilde{f}_1^{(l)}, \tilde{f}_2^{(l)}, \dots, \tilde{f}_N^{(l)}$ برای $l = 1, 2, \dots, L$ به همان اندازه سامانه همادی خام (در اینجا $N = 51$) از توزیع پیش‌بینی حاشیه‌ای پس-پردازش شده $F^{(l)}$ تولید شود به طوری که فرض شود به صورت صعودی مرتب شده است.

۲- جایگشت $\pi_l = (\pi_l(1), \pi_l(2), \dots, \pi_l(N))$ از اعداد صحیح $\{1, \dots, N\}$ که از ساختار ترتیب رتبه همادی خام $f_2^{(l)}, f_3^{(l)}, \dots, f_K^{(l)}$ به دست آمده است، در نظر گرفته شود که در آن $\pi_l(n) = \text{rank}(f_n^{(l)})$ با مرتب‌سازی نمونه گرفته شده در گام ۱ با توجه به جایگشت π_l ، نمونه کالیبره شده ECC $\hat{f}_1^{(l)}, \hat{f}_2^{(l)}, \dots, \hat{f}_N^{(l)}$ برای بعد l ، به دست می‌آید به طوری که:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_n^{(l)} &= \tilde{f}_{\pi_l(n)}^{(l)}, \\
 n &= 1, 2, \dots, N, \\
 l &= 1, 2, \dots, L.
 \end{aligned} \quad (3)$$

برای نمونه گیری روش‌های مختلفی وجود دارد که یکی از

پس‌پردازش تک‌متغیره مستقل پیش‌بینی‌های همادی $f(l)$ برای هر مکان پیش‌بینی l ، وابستگی‌های مکانی بین پیش‌بینی‌ها را در نظر نمی‌گیرد. این وابستگی‌ها در مرحله دوم با کمک رویکردهای شرح داده شده در ادامه، که بر اساس کاپیولای‌های تجربی هستند، لحاظ می‌شوند. به طور کلی، کاپیولا یک تابع توزیع تجمعی (CDF: Cumulative distribution function) چند متغیره با حاشیه‌های یکنواخت استاندارد است. مطابق قضیه اسکالر (اسکلار، ۱۹۵۹)، برای هر L -متغیره H با CDF‌های حاشیه‌ای $F^{(1)}, \dots, F^{(L)}$ یک کاپیولای L -بعدی C (که در محدوده حاشیه‌ها منحصر به فرد است) وجود دارد که وابستگی بین حاشیه‌ها را لحاظ می‌کند.

$$\begin{aligned}
 H(x_1, x_2, \dots, x_L) &= \\
 C(F^{(1)}(x_1), F^{(2)}(x_2), \dots, F^{(L)}(x_L)), & \quad (1) \\
 x_1, \dots, x_L \in \mathbb{R} &
 \end{aligned}$$

در مورد پژوهش حاضر، F^l توزیع پیش‌بینی مربوط به مکان $l = 1, 2$ است که از پس‌پردازش تک‌متغیره به دست می‌آید، و ما می‌خواهیم CDF پیش‌بینی 2 بعدی H را به دست آوریم.

در اینجا ما بر روی روش‌های ناپارامتری تمرکز می‌کنیم که در آن توابع حاشیه‌ای، CDF‌های تجربی $\hat{F}^{(l)}$ هستند که به طور مستقل از توزیع‌های پیش‌بینی کننده مربوطه نمونه-گیری شده‌اند و C یک کاپیولای تجربی است که یک "الگوی وابستگی" را ارائه می‌کند.

یک کاپیولای تجربی از یک مجموعه داده گسسته خاص اقتباس می‌شود که در زمینه پس‌پردازش همادی، نقش یک الگوی وابستگی چند متغیره را بر عهده می‌گیرد (ویلکس، ۲۰۱۹). فرض کنید: $I_N := \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ ، $N \in \mathbb{N}$ همچنین فرض کنید $f := \underbrace{I_N \times \dots \times I_N}_{L \text{ times}}$ ، $N \in \mathbb{N}$ $\{(f_1^1, \dots, f_N^1), \dots, (f_1^L, \dots, f_N^L)\}$ مقادیر پیش‌بینی باشند به طوری که $f_m^l \in \mathbb{R}$ برای $n \in \{1, \dots, N\}$ و $l \in \{1, \dots, L\}$. برای راحتی فرض می‌کنیم $f_n^1 \neq f_n^L$ اگر $f_v^1, \dots, f_n^L \neq f_v^L$ برای $n, v \in \{1, \dots, N\}, n \neq v$. اگر $\text{rank}(f_n^l)$ رتبه f_n^l در $\{f_1^l, \dots, f_N^l\}$ برای $n \in \{1, \dots, N\}$ و $l \in \{1, \dots, L\}$ باشد، کاپیولای تجربی $E_N: I_N^L \rightarrow I_N$

(نیتینگ و رافتی، ۲۰۰۷). این امتیازها، کالیبراسیون و تیزی را به طور همزمان در نظر می گیرند و جهت گیری منفی دارند؛ به این معنی که هر چه مقدار امتیاز کمتر باشد، مهارت پیش بینی بهتر است. یکی از محبوب ترین امتیازها مناسب در علوم جوی که به طور همزمان هم کالیبراسیون و هم تیزی را ارزیابی می کند، CRPS (ویلکس، ۲۰۱۹) است. برای یک تابع توزیع تجمعی پیش بینی کننده $F(x)$ و مشاهده $y \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$CRPS(F, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - \mathbf{1}_{\{y \leq x\}})^2 dx \quad (8)$$

در مقاله حاضر، برای ارزیابی پیش بینی همادی چند متغیره از امتیاز انرژی (ES) (نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۸) و امتیاز وریوگرام (VS) (شیورر و همیل، ۲۰۱۵) استفاده شده است. امتیاز انرژی (ES)، توسعه چند متغیره CRPS است (نیتینگ و رافتی، ۲۰۰۷). فرض کنید: $\mathbf{f}_1 = (f_1^1, \dots, f_1^L)$ یک پیش بینی همادی N عضوی و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_L) \in \mathbb{R}^L$ مقادیر مشاهداتی متناظر باشند. سپس ES به صورت زیر تعریف می شود:

$$ES(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N; \mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{f}_n - \mathbf{y}\| - \frac{1}{2N^2} \sum_{\mu=1}^N \sum_{n=1}^N \|\mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}_n\| \quad (9)$$

به طوری که $\|\cdot\|$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی است. از آنجا که ES برای تشخیص مشخصات ساختار همبستگی به اندازه کافی حساس نیست (پینسون و تاستو، ۲۰۱۳؛ شیورر و همیل، ۲۰۱۵)، VS قادر به رفع این مشکل است.

$$VSP(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N; \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^L \sum_{\lambda=1}^L w_{l\lambda} \left(|y_l - y_\lambda|^p - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f_n^l - f_n^\lambda|^p \right)^2 \quad (10)$$

که در آن $w_{l\lambda} \geq 0$ وزن زوج مختصات (l, λ) است. با توجه به این که پیش بینی دما از توزیع نرمال پیروی می کند، در مقاله حاضر مقدار P برابر با ۰/۵ در نظر گرفته می شود (شیورر و همیل، ۲۰۱۵).

۴. نتایج و بحث

این روش ها، استفاده از چندک ها با فواصل مساوی از F_l است (شفزیک و همکاران، ۲۰۱۳). در هر دو مرحله او ۲، روش نمونه گیری به این صورت انجام می شود.

$$\tilde{x}_1^l := F_l^{-1} \left(\frac{1}{N+1} \right), \dots, \tilde{x}_N^l := F_l^{-1} \left(\frac{N}{N+1} \right) \quad (4)$$

فرض کنید F, \tilde{F} و \tilde{F} به ترتیب CDFهای تجربی چند متغیره همادی خام، EMOS و ECC باشند. علاوه بر این، فرض کنید F_1, \dots, F_L و $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_L$ به ترتیب CDFهای تجربی حاشیه ای همادی خام و EMOS باشند که E_N و \tilde{E}_N به ترتیب کاپیولاهای تجربی مربوط به آنها است. طبق قضیه اسکالر، برای $x_1, \dots, x_L \in \mathbb{R}$ داریم:

$$F(x_1, \dots, x_L) = E_N(F_1(x_1), \dots, F_L(x_L)), \quad (5)$$

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_L) = \tilde{E}_N(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_L(x_L)), \quad (6)$$

$$\hat{F}(x_1, \dots, x_L) = E_N(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_L(x_L)). \quad (7)$$

با مقایسه معادلات (۵)، (۶) و (۷)، همادی پس پردازش شده EMOS و ECC دارای توزیع های حاشیه ای یکسان هستند، در حالی که همادی خام و همادی ECC، به دلیل طراحی ECC با هدف حفظ الگوی وابستگی رتبه ای از همادی خام، با همان کاپیولای تجربی یکسان مرتبط هستند که وابستگی را مدل سازی می کند. مخصوصاً، همادی EMOS ضرایب همبستگی رتبه ای اسپیرمن دو متغیره را در خروجی همادی خام حفظ می کند (شفزیک، ۲۰۱۵). برای درک بهتر این موضوع به بخش نتایج رجوع شود.

۳-۳. روش های درستی سنجی

هدف از پس پردازش آزمای پیش بینی احتمالاتی این است که یک توزیع پیش بینی کالیبره شده به دست آید و پیش بینی همادی ارائه شده تا حد امکان تیز (sharp) باشد (نیتینگ و همکاران، ۲۰۰۷). کالیبراسیون به معنای سازگاری آماری بین پیش بینی و مشاهدات است و تیزی به تمرکز توزیع پیش بینی اشاره دارد. عملکرد کلی یک پیش بینی همادی را می توان با استفاده از امتیازهای مهارتی مناسب ارزیابی کرد

مختلف نشان داده شده است. منظور از نمودار پرسپکتیو، نمودار سه بعدی است. این نمودار مقدار تابع کاپیولای تجربی دو بعدی را نشان می‌دهد. مقدار تابع کاپیولای تجربی طبق فرمول ۲ محاسبه شده است و به دلیل این که در مقاله حاضر، تابع کاپیولای دارای دو بعد است بنابراین برای نمایش آن می‌توان از نمودار پرسپکتیو (ردیف دوم شکل ۱) و یا نمودار پریند (ردیف سوم شکل ۱) استفاده کرد. همان‌طور که قبلاً گفته شد (روابط ۵، ۶ و ۷)، همادی خام و ECC مرتبط با کاپیولای تجربی E_{51} هستند؛ از طرفی دیگر EMOS مرتبط با کاپیولای تجربی \tilde{E}_{51} است. بنابراین شکل‌های ۱-د و ۱-و یکسان بوده و دارای یک کاپیولای تجربی واحد (E_{51}) هستند. اما EMOS دارای کاپیولای تجربی (\tilde{E}_{51}) متفاوت است (شکل ۱-ه).

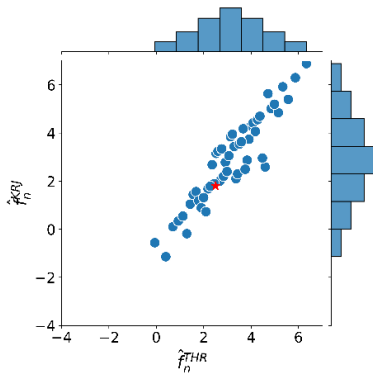
مربع لاتین، یک ماتریس $n * n$ است که درایه‌های آن اعداد صحیح از ۱ تا n باشند و در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود نداشته باشد. هدف از ترسیم نمودار مربع لاتین، نمایش الگوی وابستگی اعضای همادی در سه حالت خام، پس‌پردازش تک‌متغیره به روش EMOS و پس-پردازش چند متغیره به روش ECC است. در ردیف چهارم شکل ۱، همادی خام و ECC به یک مربع لاتین از مرتبه $N=50$ مرتبط هستند که یک ابر مکعب لاتین (گیوتا، ۱۹۷۴) در ابعاد $L = 2$ است، در حالی که همادی پس-پردازش شده به صورت تک‌متغیره EMOS به آنها مرتبط نمی‌باشد (شکل وسط ردیف چهارم).

به‌طور خلاصه، ECC را می‌توان یک رویکرد کاپیولای گسسته در نظر گرفت که با یک توزیع L -بعدی گسسته پس‌پردازش شده، که از CDFهای تجربی تک‌متغیره $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_L$ و یک کاپیولای تجربی E_N ساخته می‌شود. CDFهای حاشیه‌ای $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_L$ توسط نمونه‌های استخراج شده از پس‌پردازش تک‌متغیره تعریف می‌شوند و کاپیولای تجربی E_N ، که ساختار وابستگی را مدل می‌کند، توسط همادی خام پس‌پردازش نشده اقتباس می‌شود.

در این بخش نتایج به‌دست آمده توضیح داده شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این بخش ابتدا روش EMOS به صورت جداگانه روی سامانه همادی ۵۱ عضوی ECMWF هر یک از ایستگاه‌های همدیدی فرودگاه مهرآباد (THR) و کرج (KRJ) برای تاریخ ۱۴ ژانویه ۲۰۲۳ ساعت 12:00 UTC اعمال شد. سپس با روش چندک‌ها با فواصل مساوی (معادله ۴) از تابع چگالی احتمال به‌دست آمده از اعمال روش EMOS به تعداد ۵۱ تا نمونه‌گیری می‌شود. سپس با استفاده از نمونه‌های به‌دست آمده، روش ECC بر طبق معادله ۳ اعمال می‌شود (شکل ۱).

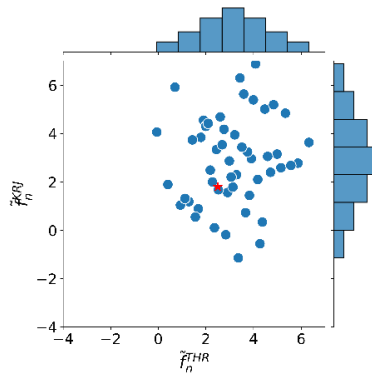
شکل ۱-الف، پیش‌بینی همادی خام پس‌پردازش نشده را نشان می‌دهد که نقاط آبی‌رنگ ۵۱ عضو همادی $n \in \{1, 2, \dots, 51\}$ و ستاره قرمز رنگ مقدار مشاهداتی متناظر هستند. شکل ۱-ب، پیش‌بینی همادی پس‌پردازش شده تک‌متغیره به روش EMOS را نشان می‌دهد که طبق توضیحات مرحله ۱ بخش ۳-۲، به تعداد ۵۱ عضو نمونه-گیری شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، اریبی و خطای پراکندگی در EMOS تصحیح شده است، اما هیچ‌گونه ساختار همبستگی را ارائه نمی‌دهد و ویژگی‌های ترتیب رتبه دو متغیره پیش‌بینی پردازش نشده در شکل سمت راست از بین رفته است. منظور از ساختار همبستگی، الگوی وابستگی است که اعضای همادی در هر بُعد با یکدیگر دارند. در نهایت، همادی پس‌پردازش شده چند متغیره ECC در شکل ۱-ج، اریبی و خطای پراکندگی را اصلاح کرده است، همان‌طور که EMOS انجام داده است، اما علاوه بر این، الگوی وابستگی رتبه‌ای که توسط همادی خام ارائه می‌شود را حفظ می‌کند. بنابراین، اگرچه EMOS و ECC دارای توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان هستند، همان‌طور که توسط هیستوگرام‌ها نشان داده شده است، اما آنها در ساختارهای وابستگی رتبه‌ای چند متغیره به شدت متفاوت هستند.

در ردیف دوم و سوم شکل ۱، به ترتیب نمودارهای پرسپکتیو و پریند کاپیولای تجربی مرتبط با همادی‌های



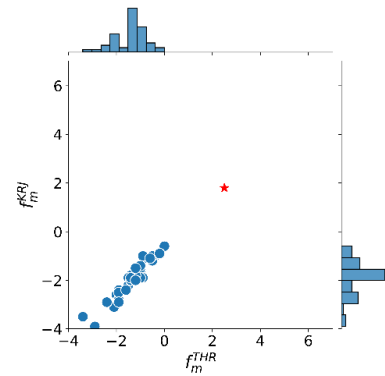
(ج) نمودار پراکندگی با هیستوگرام حاشیه‌ای همادی

ECC



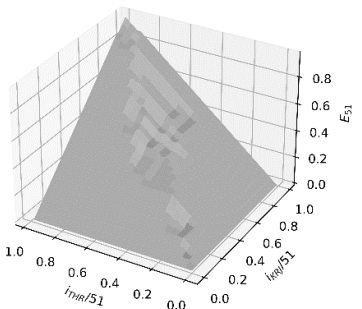
(ب) نمودار پراکندگی با هیستوگرام حاشیه‌ای همادی

EMOS

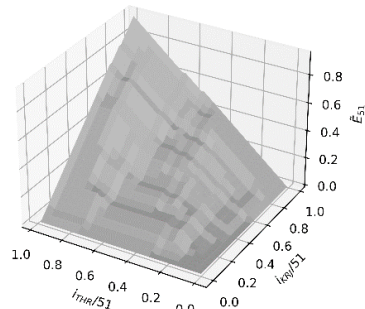


(الف) نمودار پراکندگی با هیستوگرام حاشیه‌ای

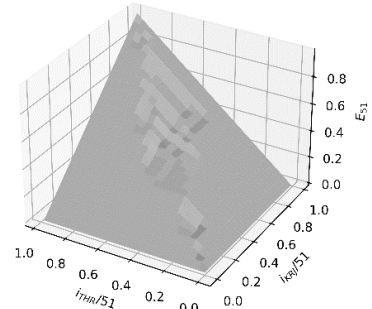
همادی خام



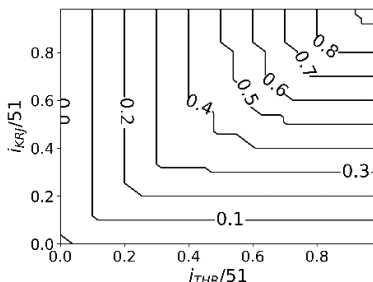
(و) نمودار پرسپکتیو کاپیولای تجربی همادی ECC



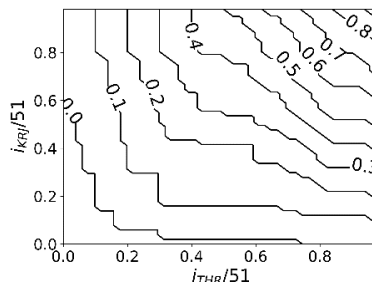
(ه) نمودار پرسپکتیو کاپیولای تجربی همادی EMOS



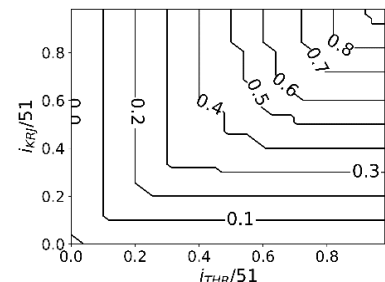
(د) نمودار پرسپکتیو کاپیولای تجربی همادی خام



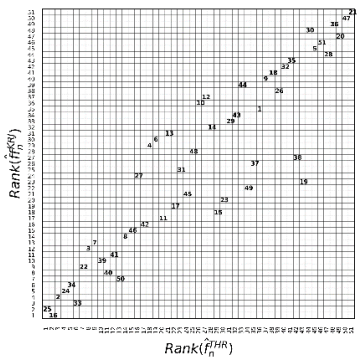
(ط) نمودار پربند کاپیولای تجربی همادی ECC



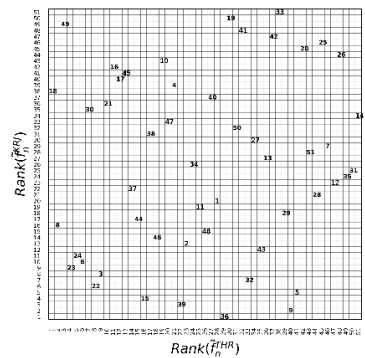
(ح) نمودار پربند کاپیولای تجربی همادی EMOS



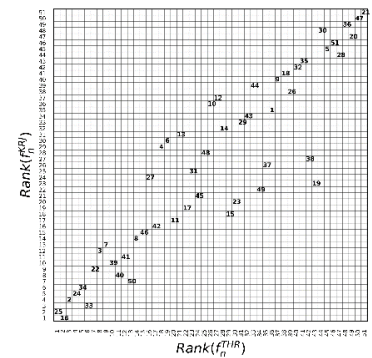
(ز) نمودار پربند کاپیولای تجربی همادی خام



(ل) مربع لاتین همادی ECC



(ک) مربع لاتین همادی EMOS



(ی) مربع لاتین همادی خام

شکل ۱. پیش‌بینی‌های همادی ۴۸ ساعت آینده دمای دو متری (بر حسب درجه سلسیوس) در فرودگاه مهرآباد (THR) و کرج (KRJ)، معتر در تاریخ ۱۴ ژانویه ۲۰۲۳ ساعت 12:00 UTC، شامل (الف)، (ب) و (ج): نمودار پراکندگی با هیستوگرام حاشیه‌ای به‌ترتیب همادی خام، همادی EMOS و همادی ECC. نقاط آبی: پیش‌بینی همادی مربوطه، ستاره قرمز: مقدار مشاهداتی. (د)، (ه) و (و): نمودار پرسپکتیو کاپیولای تجربی به‌ترتیب همادی خام، همادی EMOS و همادی ECC. (ز)، (ه) و (ط): نمودار پربند کاپیولای تجربی به‌ترتیب همادی خام، همادی EMOS و همادی ECC. (ی)، (ک) و (ل): مربع لاتین به‌ترتیب همادی خام، همادی EMOS و همادی ECC.

به همادی EMOS دارای مقدار کمتر و در نتیجه عملکرد بهتری است.

برای بررسی معناداری آماری اختلاف بین امتیازها پیش‌بینی‌ها، فرضیه صفر عدم اختلاف امتیاز را با استفاده از آزمون رتبه‌بندی علامت‌دار ویلکوکسون (Wilcoxon signed-rank test) با سطح معنی‌داری ۵ درصد آزمایش کردیم. اگر مقدار p-value مربوط به آزمون رتبه‌بندی علامت‌دار ویلکوکسون کوچک‌تر یا مساوی با سطح معناداری ۰/۰۵ باشد، فرضیه صفر رد می‌شود، به این معنی که امتیازها از نظر آماری دارای اختلاف معناداری هستند. در اصل، هر چه مقدار p-value کوچکتر باشد، معناداری بیشتری دارد. مقدار p-value آزمون رتبه‌بندی علامت‌دار ویلکوکسون برای بررسی معناداری اختلاف امتیازها در جدول ۲ آورده شده است.

همان‌طور که در جدول ۲ دیده می‌شود، مقادیر p-value برای بررسی معناداری اختلاف امتیازها ES و VS همادی-های مختلف ارائه شده در جدول ۱، بسیار نزدیک به صفر هستند. به عبارتی دیگر اگر چه اختلاف مقدار VS در همادی EMOS نسبت به همادی ECC بسیار ناچیز است اما طبق مقدار p-value به دست آمده در جدول ۲، این اختلاف معنادار است.

با توجه به معادلات (۹) و (۱۰)، میانگین امتیاز انرژی (ES) و امتیاز وریوگرام (VS) به عنوان معیارهای عملکرد کلی برای همادی‌های مختلف، در دوره آزمون از اول ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳ در جدول ۱ آورده شده است. برای تخمین پارامترها در روش EMOS، ۵۰ روز قبل از هر روز از دوره آزمون به عنوان دوره آموزش لغزان در نظر گرفته شده است. در مورد EMOS، استفاده از چندک‌های هم فاصله در امتداد هر حاشیه منجر به وابستگی مثبت بین هر جفت مختصات می‌شود که ممکن است منجر به نتایج گمراه‌کننده شود. برای جلوگیری از ساختار وابستگی احتمالاً غیر واقعی، می‌توان تعدادی از این مخلوط‌های تصادفی را در نظر گرفت و امتیازهای به دست آمده را میانگین گرفت (شفزیک، ۲۰۱۷). برای این منظور در مقاله حاضر، از چندک‌های هم فاصله به تعداد ۱۰۰ بار به صورت تصادفی نمونه‌گیری شده و میانگین امتیازها محاسبه شده است.

همان‌طور که در جدول ۱ دیده می‌شود، در همادی‌های پس‌پردازش شده چه به صورت تک‌متغیره (EMOS) و چه به صورت چند متغیره (ECC) نسبت به همادی خام، مقدار ES که به طور کلی بر مزایای پس‌پردازش تأکید می‌کند، دارای مقدار کمتر و در نتیجه عملکرد بهتری است. در مورد امتیاز VS که بر همبستگی تأکید دارد، همادی ECC نسبت

جدول ۱. میانگین ES و VS (بر حسب درجه سلسیوس) برای پیش‌بینی ۴۸ ساعته دمای دو متری در دو ایستگاه همدیدی فرودگاه مهرآباد و کرج برای ۲۱۹۱ روز آزمایش در دوره از ۱ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳

| VS | ES | |
|-------|-------|---|
| ۰/۴۱۳ | ۶/۲۹۷ | همادی خام ECMWF |
| ۰/۳۹۷ | ۱/۱۹۴ | همادی پس‌پردازش شده تک‌متغیره به روش EMOS |
| ۰/۳۷۸ | ۱/۱۸۴ | همادی پس‌پردازش شده چند متغیره به روش ECC |

جدول ۲. مقادیر p-value آزمون رتبه‌بندی علامت‌دار ویلکوکسون برای بررسی معناداری اختلاف بین امتیازها ارائه شده در جدول ۱.

| VS | ES | |
|------------------------|------------------------|--|
| ۱/۰۰۰۵۳۲۲۶۰۳۳۹۶۵۶۸e-۴۷ | 0 | همادی خام در مقابل همادی پس‌پردازش شده تک‌متغیره به روش EMOS |
| ۲/۴۷۱۹۷۲۴۰۵۸۷۰۲۰۳e-۵۸ | 0 | همادی خام در مقابل همادی پس‌پردازش شده چند متغیره به روش ECC |
| ۱/۰۳۳۶۰۰۴۷۲۲۹۷۴۶۸e-۵۵ | ۱/۲۰۵۵۱۹۸۸۴۲۴۲۰۴۸۳e-۹۱ | همادی پس‌پردازش شده تک‌متغیره به روش EMOS در مقابل همادی پس‌پردازش شده چند متغیره به روش ECC |

۵. نتیجه گیری

با وجود در نظر گرفتن منابع عدم قطعیت، سامانه‌های همادی اغلب در معرض اریبی‌ها و/یا خطاهای پراکندگی هستند (بویزا، ۲۰۱۸). بنابراین، پیش‌بینی‌های همادی باید پس‌پردازش آماری شوند. روش‌های پس‌پردازش آماری تک‌متغیره مانند EMOS و BMA می‌توانند عملکرد پیش‌بینی‌های همادی وضع هوا را به‌طور قابل توجهی بهبود بخشند (وانیتسم و همکاران، ۲۰۲۱)، اما وابستگی‌های مکانی، زمانی و بین متغیری را نادیده می‌گیرند. این وابستگی‌ها در دنیای واقعی وجود دارند و در بسیاری از کاربردها، در نظر گرفتن الگوهای وابستگی بسیار مهم است. بنابراین، روش‌های پس‌پردازش همادی چند متغیره مانند روش ECC و شاک شافل ارائه شدند (وانیتسم و همکاران، ۲۰۲۱).

در پژوهش حاضر، از روش ECC برای پس‌پردازش همادی چند متغیره سامانه همادی ۵۱ عضوی ECMWF برای لحاظ کردن وابستگی مکانی پیش‌بینی دمای ۴۸ ساعته دمای دو متری در دو ایستگاه مهرآباد و کرج استفاده شد. نتایج به‌دست آمده از اعمال روش ECC با نتایج به‌دست آمده از اعمال روش پس‌پردازش همادی تک‌متغیره EMOS برای پیش‌بینی‌ها در بازه ۱ ژانویه ۲۰۱۸ تا ۳۱ دسامبر ۲۰۲۳ مقایسه شد. نتایج نشان دادند که علاوه بر حذف اریبی پیش‌بینی همادی خام، روش ECC ساختار وابستگی بین اعضای همادی را نیز حفظ می‌کند. در مقابل، روش EMOS تنها اریبی‌ها را بدون در نظر گرفتن وابستگی بین اعضای گروه حذف می‌کند این نشان می‌دهد که روش ECC ابزار ارزشمندی برای پس‌پردازش همادی است و می‌تواند برای طیف وسیعی از کاربردها در نظر گرفته شود. هدف اصلی رویکرد پس‌پردازش همادی چند متغیره، به‌دست آوردن تابع CDF چند متغیره (در اینجا تابعی تجربی) برای محاسبه احتمالات چند متغیره با توجه به ساختار همبستگی موجود بین متغیرها است. همان‌طور که در این مقاله نیز بیان شد، برای رسیدن به این هدف ابتدا روش پس‌پردازش همادی تک‌متغیره (مانند روش EMOS)

در هر بُعد مسئله به‌صورت جداگانه انجام می‌شود و سپس با توجه به الگوی وابستگی بین اعضای همادی در هر بُعد، مرتب‌سازی رتبه‌ای مجدد (مانند روش ECC) انجام می‌شود. بنابراین روش چند متغیره در رقابت با روش تک‌متغیره نیست بلکه برای به‌دست آوردن تابع CDF چند متغیره به‌منظور محاسبه احتمالات چند متغیره در روش ECC، ناگزیر به مرتب‌سازی رتبه‌ای مجدد پس از اعمال روش EMOS هستیم. به بیانی دیگر، اعمال یک روش پس‌پردازش همادی تک‌متغیره مانند EMOS، جزئی از فرایند پس‌پردازش همادی چند متغیره مانند ECC است. در نتیجه طبیعی است که مقدار امتیاز ES (جدول ۱) که به‌طور کلی بر مزایای پس‌پردازش همادی (چه تک‌متغیره و چه چند متغیره) تأکید دارد، در هر دو روش ECC و EMOS مقادیری نزدیک به یکدیگر داشته و نسبت به همادی خام ۸۱٪ بهبود داشته باشد. در مورد امتیاز VS، هر دو روش پس‌پردازش نسبت به همادی خام دارای عملکرد بهتری هستند و اگرچه تفاوت بسیار کمی دارند اما طبق مقادیر p -value آزمون ویلکوکسون (جدول ۲)، اختلاف آنها معنادار است.

به‌منظور اعمال ECC، پیش‌بینی‌ها باید ساختارهای وابستگی واقعی مشاهده‌شده را به خوبی منعکس کنند و همادی خام باید به اندازه کافی بزرگ باشد. روش ECC معمولاً اگر ساختار همبستگی توسط همادی به درستی مشخص نشده باشد یا اگر سامانه همادی بسیار کوچک باشد، عملکرد خوبی ندارد. به‌دلیل محدودیت‌های رایانه‌ای در داخل کشور، ایجاد سامانه همادی با اندازه بزرگ به‌صورت عملیاتی دشوار است. بنابراین، برای رفع این مشکل می‌توان از رویکردهای مبتنی بر شاک شافل (کلارک و همکاران، ۲۰۰۴) که الگوی وابستگی را از داده‌های مشاهداتی گذشته استخراج می‌کنند، استفاده کرد که در پژوهش‌های آتی به این موضوع پرداخته خواهد شد.

مراجع

قادر، س.؛ یازجی، د.؛ سلطان‌پور، م. و نعمتی، م. ح.

- ده‌ملائی، م.؛ رضازاده، م. و آزادی، م. (۱۴۰۰). بررسی پیش‌بینی احتمالاتی سرعت باد ده متری با استفاده از دو روش پس‌پردازش همادی. *پژوهش‌های اقلیم‌شناسی*، ۴۸، ۶۹-۸۴.
- فتحی، م.؛ آزادی، م.؛ کمالی، غ. ع. و مشکوتی، ا. ح. (۱۳۹۷). واسنجی پیش‌بینی احتمالاتی بارش برون‌داد سامانه همادی به روش میانگین‌گیری بایزی روی ایران. *نشریه هواشناسی و علوم جو*، ۱(۲)، ۱۱۴-۱۲۹.
- محمدی، س. ع. و آزادی، م. (۱۴۰۱). بررسی تأثیر تعداد اعضای یک سامانه همادی بر دقت پیش‌بینی بارش. *نیوار*، ۴۶، ۷۳-۸۴.
- Baran, S., & Möller, A. (2015). Joint probabilistic forecasting of wind speed and temperature using Bayesian model averaging. *Environmetrics*, 26, 120-132.
- Baran, S., & Möller, A. (2017). Bivariate ensemble model output statistics approach for joint forecasting of wind speed and temperature. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 129, 99-112.
- Buizza, R. (2018). Ensemble forecasting and the need for calibration. In Vannitsem, S., Wilks, D. S., & Messner J. W., (Eds.), *Statistical Postprocessing of Ensemble Forecasts*. Elsevier.
- Chaloulos, G., & Lygeros, J. (2007). Effect of wind correlation on aircraft conflict probability. *J. Guid. Control Dynam.*, 30, 1742-1752.
- Clark, M., Gangopadhyay, S., Hay, L., Rajagopalan, B., & Wilby, R. (2004). The Schaake shuffle: A method for reconstructing space-time variability in forecasted precipitation and temperature fields. *J. Hydrometeorol.*, 5, 243-262.
- Feldmann, K., Scheuerer, M., & Thorarinsdottir, T. L. (2015). Spatial postprocessing of ensemble forecasts for temperature using nonhomogeneous Gaussian regression. *Mon. Weather Rev.*, 143, 955-971.
- Gneiting, T. (2014). Calibration of medium-range weather forecasts. ECMWF Technical Memorandum No. 719. Available at: <http://www.ecmwf.int/sites/default/files/elibrary/2014/9607-calibration-medium-range> [Accessed on 20 June 2022]
- Gneiting, T., Balabdaoui, F., & Raftery, A. E. (2007). Probabilistic forecasts, calibration and sharpness. *J. R. Stat. Soc., Ser. B* 69: 243-268.
- Gneiting, T. & Raftery, A. E. (2007). Strictly proper scoring rules, prediction and estimation. *J. Amer. Statist. Assoc.* 102, 359-378.
- Gneiting, T., Raftery, A. E., Westveld, A. H., & Goldman, T. (2005). Calibrated probabilistic forecasting using ensemble model output statistics and minimum CRPS estimation. *Mon. Weather Rev.*, 133, 1098-1118.
- Gneiting, T., Stanberry, L. I., Grimit, E. P., Held, L., & Johnson, N. A. (2008). Assessing probabilistic forecasts of multivariate quantities, with applications to ensemble predictions of surface winds (with discussion and rejoinder). *Test*, 17, 211-264.
- Gupta, H. (1974). On permutation cubes and Latin cubes. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5, 1003-1021.
- Lakatos, M., Lerch, S., Hemri, S. & Baran, S. (2023). Comparison of multivariate post-processing methods using global ECMWF ensemble forecasts. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 149(752), 856-877.
- Lang, M. N., Mayr, G. J., Stauffer, R., & Zeileis, A. (2019). Bivariate Gaussian models for wind vectors in a distributional regression framework. *Adv. Stat. Clim. Meteorol. Oceanogr.*, 5, 115-132.
- Mohammadi, S. A., Rahmani, M., & Azadi, M. (2016). Meta-heuristic CRPS minimization for the calibration of short range probabilistic forecasts. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 128, 429-440.
- Möller, A., Lenkoski, A., & Thorarinsdottir, T. L. (2013). Multivariate probabilistic forecasting using ensemble Bayesian model averaging and copulas. *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, 139, 982-991.
- Pinson, P., & Tastsu, J. (2013). Discrimination ability of the Energy score, Technical Report DTU Compute-Technical Report-2013 No. 15. Technical University of Denmark: Kgs Lyngby, Denmark.
- Pinson, P., & Messner, J. W. (2018). Application of postprocessing for renewable energy, in: *Statistical Postprocessing of Ensemble*

- Forecasts, edited by: Vannitsem, S., Wilks, D. S., and Messner, J. W., 241–266, Elsevier.
- Raftery, A. E., Gneiting, T., Balabdaoui, F., & Polakowski, M. (2005). Using Bayesian model averaging to calibrate forecast ensembles. *Mon. Weather Rev.*, 133, 1155–1174.
- Rasp, S., & Lerch, S. (2018). Neural networks for postprocessing ensemble weather forecasts. *Mon. Weather Rev.*, 146, 3885–3900.
- Scheffik, R. (2015). Multivariate discrete copulas, with applications in probabilistic weather forecasting. Heidelberg Institut für Theoretische Studien.
- Scheffik, R. (2017). Ensemble calibration with preserved correlations: unifying and comparing ensemble copula coupling and member-by-member postprocessing. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143, 999–1008.
- Scheffik, R., & Möller, A. (2018). Ensemble postprocessing methods incorporating dependence structures, in: Statistical Postprocessing of Ensemble Forecasts, edited by: Vannitsem, S., Wilks, D. S., and Messner, J. W., 91–125, Elsevier.
- Scheffik, R., Thorarindottir, T. L., & Gneiting, T. (2013). Uncertainty quantification in complex simulation models using ensemble copula coupling. *Stat. Sci.*, 28, 616–640.
- Scheuerer, M., & Hamill, T. M. (2015). Variogram-based proper scoring rules for probabilistic forecasts of multivariate quantities. *Mon. Weather Rev.*, 143, 1321–1334.
- Scheuerer, M., Hamill, T. M., Whitin, B., He, M., & Henkel, A. (2017). A method for preferential selection of dates in the Schaake shuffle approach to constructing spatio-temporal forecast fields of temperature and precipitation. *Water Resour. Res.*, 53, 3029–3046.
- Schulz, B., & Lerch, S. (2022). Machine learning methods for postprocessing ensemble forecasts of wind gusts: A systematic comparison. *Mon. Weather Rev.*, 150, 235–257.
- Schuhen, N., Thorarindottir, T. L., & Gneiting, T. (2012). Ensemble model output statistics for wind vectors. *Mon. Weather Rev.*, 140, 3204–3219.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de r_epartition à n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de Statistique de l'Universit_e de Paris, 8, 229–231.
- Taillardat, M. (2021). Skewed and mixture of Gaussian distributions for ensemble postprocessing. *Atmosphere*, 12, 966.
- Vannitsem, S., Bremnes, J. B., Demaeyer, J., Evans, G. R., Flowerdew, J., Hemri, S., Lerch, S., Roberts, N., Theis, S., Atencia, A., Ben Boual`egue, Z., Bhend, J., Dabernig, M., De Cruz, L., Hieta, L., Mestre, O., Moret, L., Odak Plenkovi`c, I., Schmeits, M., Taillardat, M., Van den Bergh, J., Van Schaeybroeck, B., Whan, K. and Ylhaisi, J. (2021). Statistical postprocessing for weather forecasts – review, challenges and avenues in a big data world. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 102, E681–E699.
- Wilks, D.S. (2019). Statistical methods in the atmospheric sciences. 4th edition. Amsterdam: Elsevier.