



Separation of regional-residual anomaly in 2D gravity data using the 2D singular spectrum analysis

Roshandel Kahoo, A.¹  | Anvari, R.¹ 

1. Department of Petroleum and Geophysics, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Corresponding Author E-mail: roshandel@shahroodut.ac.ir

(Received: 12 Nov 2023, Revised: 30 Dec 2023, Accepted: 21 May 2024, Published online: 5 Oct 2024)

Summary

The measured potential field data can be considered as the result of the superposition of the anomalies from sources with various depths. Regional anomalies due to the origin of deep structures and residual anomalies due to the origin of shallow structures form the long and short parts of the total measured field wavelength, respectively. Therefore, one of the most important steps in the potential field data processing is the regional-residual anomalies separation which is used as the basis for inversion and interpretation. The process of separating regional and residual anomalies in potential field data is usually performed in the measured or frequency domain. Methods such as moving averaging, polynomial fitting, and minimum curvature are some of the well-known methods in the potential field separation in the measuring domain. Methods that perform the separation process in the frequency domain have superior performance compared to other methods, making them more common and widely used. Methods such as simple wavenumber filtering, matched filters, preferential filters, and Wiener filters are some of the common methods in the frequency domain to separate regional and residual anomalies. Various researches have shown that the rank of trajectory matrix obtained from measured potential field data depends on the depth of the anomaly source, and the rank of trajectory matrix of the deep sources are lower than that of the shallow sources. In this paper, the spectral analysis of singular values (SSA) was used to reduce the rank of the trajectory matrix obtained from gravity data in order to separate the regional and residual anomalies. Based on the theory of the SSA method, the following method was proposed to separate regional and regional anomalies in 2D gravity data. At the first step, the trajectory matrix is calculated from the Henkel matrices obtained from the measured data. Then, the obtained trajectory matrix is decomposed to eigen triples by employing the SVD and the eigenimages of it are calculated. The optimal value of rank is obtained from the elbow point of the cumulative contribution chart for eigenimages and the trajectory matrix related to regional anomaly is constructed using optimal rank. Finally, the separated regional anomaly is obtained by averaging along anti-diagonals element of the reconstructed trajectory matrix. The efficiency of the proposed method is investigated on both synthetic and real field data examples. Investigating the relationship between the depth of origin of the anomaly and the rank of the trajectory matrix calculated from the measured data showed that there is an inverse relationship between them. The obtained results of synthetic and real data showed that the technique of reducing the rank of the trajectory matrix using SSA can be used as a method of separating anomalies with different depths of origin in potential field data. Also, comparing the results of the proposed method with the results of polynomial fitting and matched filtering methods showed that the proposed method has a better performance in the separation of residual and regional anomalies and can produce better results in environments with high geological complexity.

Keywords: Residual-regional anomaly separation, singular spectrum analysis, low-rank matrix, trajectory matrix.

Cite this article: Roshandel Kahoo, A., & Anvari, R. (2024). Separation of regional-residual anomaly in 2D gravity data using the 2D singular spectrum analysis. *Journal of the Earth and Space Physics*, 50(3), 573-594. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.367608.1007574>

E-mail: (1) rasoulanvarias93@gmail.com



Publisher: University of Tehran Press.
DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.367608.1007574>

Print ISSN: 2538-371X
Online ISSN: 2538-3906

تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های گرانی‌سنجی دو بعدی با استفاده از تحلیل طیفی تکین دو بعدی

امین روشندل کاهو^۱ | رسول انوری^۱

۱. گروه نفت و ژئوفیزیک، دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران.

رایانامه نویسنده مسئول: roshandel@shahroodut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲۱، بازنگری: ۱۴۰۲/۱۰/۹، پذیرش نهایی: ۱۴۰۳/۳/۱، انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۷/۱۴)

چکیده

تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در مطالعات میدان پتانسیل و به‌خصوص در داده‌های گرانی‌سنجی، پایه و مبنای تفسیر آنها است. نتایج مدل‌سازی معکوس داده‌های میدان پتانسیل به‌عنوان اصلی‌ترین مرحله تفسیر به‌شدت تحت‌تأثیر داده‌های ورودی است که از مرحله تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی به دست می‌آید. تاکنون روش‌های متعددی برای تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای از محلی در داده‌های میدان پتانسیل ارائه شده است که هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند. اغلب روش‌های تفکیک بی‌هنجاری مبتنی بر تفکیک مؤلفه‌های عدد موج مربوط به هر کدام از بی‌هنجاری‌های محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر می‌باشند. مطالعات پیشین نشان داده است که میان دامنه مؤلفه‌های عدد موج در طیف دامنه دو بعدی و مقادیر تکین ماتریس مسیر به‌دست‌آمده از داده میدان پتانسیل ارتباط مستقیم و نظیر به نظیر وجود دارد. بنابراین، می‌توان بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های گرانی‌سنجی را با استفاده از روش تجزیه ماتریس مسیر داده گرانی به مؤلفه رتبه - پایین یا روش کاهش رتبه ماتریس مسیر تفکیک کرد. در این مقاله، الگوریتم تحلیل طیفی تکین برای کاهش رتبه ماتریس مسیر داده گرانی به‌منظور تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های مدل مصنوعی و واقعی استفاده شد و نتایج آن با روش‌های تفکیک فیلتر داده‌مینا، برازش چندجمله‌ای و ادامه فراسو مقایسه شد. نتایج به‌دست‌آمده در مدل مصنوعی و واقعی نشان داد که روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌های مورد مقایسه در این مقاله، دقت بیشتری در تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی دارد و اثرات کاذب کمتری در نتیجه حاصل ایجاد می‌کند.

واژه‌های کلیدی: تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی، تحلیل طیفی تکین، ماتریس رتبه - پایین، ماتریس مسیر.

۱. مقدمه

تفکیک شود تا مدل‌سازی و تفسیر براساس بی‌هنجاری تفکیک‌شده و بدون تأثیر سایر بی‌هنجاری‌ها با منشأهای گوناگون انجام شود (دنتیث و مادگ، ۲۰۱۴). بنابراین، یکی از مهم‌ترین مراحل پردازش داده‌های میدان پتانسیل، تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای از بی‌هنجاری محلی است (تلفورد و همکاران، ۱۹۹۰؛ کومار و همکاران، ۲۰۱۸). فرایند تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های میدان پتانسیل معمولاً در حوزه مکان یا در حوزه فرکانس انجام می‌شود (مرادی شاهقریه و همکاران، ۲۰۱۵). روش‌هایی نظیر میانگین‌گیری متحرک، برازش چند جمله‌ای و حداقل انحنای جمله روش‌های شناخته‌شده

داده‌های اندازه‌گیری‌شده در مطالعات میدان پتانسیل حاصل برهم‌نهی بی‌هنجاری‌های گرانی و مغناطیسی ناشی از منابع با عمق‌های مختلف است (روی، ۲۰۰۸؛ ژو و همکاران، ۲۰۲۰). بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای با منشأ ساختارهای عمیق بخش طول‌موج‌های بلند (عدد موج‌های کوچک) و بی‌هنجاری‌های محلی با منشأ ساختارهای سطحی بخش طول‌موج‌های کوتاه (عدد موج‌های بزرگ) میدان کل اندازه‌گیری‌شده را تشکیل می‌دهند (فدی و همکاران، ۱۹۹۷؛ روشندل کاهو و نجاتی کلاته، ۲۰۱۵). برای مطالعه هر هدف زمین‌شناسی بایستی بی‌هنجاری گرانی یا مغناطیسی ناشی از آن از میدان کل اندازه‌گیری‌شده

استناد: روشندل کاهو، امین و انوری، رسول (۱۴۰۳). تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های گرانی‌سنجی دو بعدی با استفاده از تحلیل طیفی تکین دو بعدی. مجله

فیزیک زمین و فضا، ۵۰(۳)، ۵۷۳-۵۹۴. DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.367608.1007574>

رایانامه: (۱) rasoulanvarias93@gmail.com



ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <http://doi.org/10.22059/jesphys.2024.367608.1007574>

انتخاب صحیح آنها به شدت دقت تفکیک را کاهش می‌دهد (ژو و همکاران، ۲۰۲۰).

روش‌های کاهش رتبه (rank reduction) و تجزیه رتبه - پایین (low-rank decomposition) ماتریس از روش‌های متداول و پرکاربرد در زمینه تضعیف نوفه و بازسازی داده‌های لرزه‌ای هستند (انوری و همکاران، ۲۰۲۰؛ انوری و همکاران، ۲۰۱۹؛ انوری و همکاران، ۲۰۱۷؛ نظری سیاه‌سر و همکاران، ۲۰۱۶). در این روش‌ها از خاصیت ذاتی رتبه - پایین بودن ماتریس معنادار حاصل از سیگنال لرزه‌ای استفاده می‌شود. حضور نوفه تصادفی در سیگنال لرزه‌ای یا از دست رفتن چندین ردلرزه سبب افزایش رتبه ماتریس معنادار می‌شود. به کمک روش‌های کاهش رتبه یا روش‌های تجزیه رتبه - پایین ماتریس، می‌توان نوفه تصادفی در داده‌های لرزه‌ای را کاهش داد و یا ردلرزه‌های از دست رفته را بازسازی کرد (انوری و همکاران، ۲۰۱۷). تحقیقات نشان داده است که رتبه ماتریس مسیر (trajectory matrix) به دست آمده از داده‌های میدان پتانسیل به عمق منشأ بی‌هنجاری بستگی دارد (گلیاندینا و همکاران، ۲۰۰۷). به عبارت دیگر، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری میدان پتانسیل، رتبه ماتریس مسیر کاهش می‌یابد (راجش و همکاران، ۲۰۲۰). بنابراین، می‌توان از روش‌های کاهش رتبه یا تجزیه رتبه - پایین ماتریس برای تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های میدان پتانسیل استفاده کرد. در این مقاله، از روش تحلیل طیفی تکنیکی (singular spectrum analysis) (گلیاندینا و ژیکلیاوسکی، ۲۰۱۳) برای کاهش رتبه ماتریس مسیر حاصل از داده‌های گرانی به منظور تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در مدل مصنوعی و واقعی استفاده می‌شود.

۲. روش‌شناسی تحقیق

۲-۱. ماتریس مسیر

روش تحلیل طیفی تکنیکی، یک روش تخمین طیفی غیر پارامتریک است. در روش تحلیل طیفی تکنیکی، به منظور تخمین اطلاعات طیفی یک سیگنال یک بعدی مانند $X(n) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ابتدا ماتریس کوواریانس -

در حوزه مکان برای تفکیک بی‌هنجاری‌ها هستند (میکوس و همکاران، ۱۹۹۱؛ تلفورد و همکاران، ۱۹۹۰). البته روش‌هایی که در حوزه فرکانس، فرایند تفکیک را انجام می‌دهند، نسبت به روش‌های حوزه مکان از عملکرد بهتری برخوردار هستند و به همین دلیل متداول‌تر و پرکاربردتر هستند. روش‌هایی نظیر فیلترهای ساده فرکانس، فیلتر داده مبنا (matched filter)، فیلتر ترجیحی (preferential filter) و فیلتر وینر (Wiener filter) از جمله روش‌های متداول حوزه فرکانس برای تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی هستند (گو و همکاران، ۲۰۱۳؛ پاولوسکی و هانسن، ۱۹۹۰؛ روش‌دندل کاهو و نجاتی کلاته، ۲۰۱۵؛ شریف، ۲۰۱۰؛ اسپکتور و گرت، ۱۹۸۵). با معرفی ابزارهای ریاضی برای تحلیل سیگنال‌ها مانند تبدیل موجک گسسته (discrete wavelet transform) و تجزیه مد تجربی (empirical mode decomposition)، الگوریتم‌های مبتنی بر این ابزار ریاضی برای تفکیک بی‌هنجاری‌ها در میدان پتانسیل معرفی شده‌اند (روش‌دندل کاهو و نجاتی کلاته، ۲۰۱۲؛ مندال و نیوگی، ۲۰۱۸؛ فدی و کوارتا، ۲۰۰۶). علیرغم وجود روش‌های متعدد برای تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی در داده‌های میدان پتانسیل، هنوز تفکیک دقیق بی‌هنجاری‌های محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر، به دلیل برهم‌نهی پیچیده بی‌هنجاری‌های مختلف با طول موج و عمق متفاوت، یکی از مراحل چالش‌برانگیز در تفسیر و پردازش داده‌های میدان پتانسیل است. در روش‌های حوزه مکان، انتخاب پارامترهای هر روش همچنان مسئله چالش برانگیز است و به نسبت سایر روش‌ها از دقت پایین‌تری برخوردار هستند. همپوشانی طیفی بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای و محلی بر عملکرد روش‌های تفکیک حوزه فرکانس تأثیر منفی دارد و سبب کاهش دقت این روش‌ها می‌شود. در روش‌های مبتنی بر تجزیه سیگنال نظیر تبدیل موجک گسسته و تجزیه مد تجربی، انتخاب نوع موجک، تعداد ترازهای تجزیه (decomposition level)، انتخاب جزئیات و تابع مد ذاتی برای بازسازی از جمله پارامترهایی هستند که می‌توانند بر کیفیت تفکیک بی‌هنجاری‌ها تأثیرگذار باشند و عدم

مؤلفه‌های مختلف در داده‌ها کمک می‌کند. این ماتریس برای نشان دادن رابطه میان دامنه مؤلفه‌های عدد موج داده میدان پتانسیل و مقادیر تکین ماتریس مسیر استفاده می‌شود. هر قطر از ماتریس مسیر (از گوشه پایین - چپ به گوشه بالا - راست)، نشان دهنده تغییرات هر مؤلفه فرکانس میدان پتانسیل در هر نقطه از داده است (دی کلرک، ۲۰۱۵). به منظور حذف مؤلفه‌های خاص از سیگنال کافی است پس از محاسبه ماتریس مسیر، مقادیر تکین آن به عنوان مقادیر ویژه ماتریس کواریانس - تاخیر محاسبه شوند تا به کمک آنها مؤلفه‌های اساسی سیگنال به دست می‌آیند. حال می‌توان با بررسی و تحلیل هر مؤلفه اساسی، با حفظ مؤلفه‌های اساسی دلخواه و حذف بقیه، ماتریس مسیر جدید را با استفاده از مؤلفه‌های منتخب بازسازی کرد. سپس با معکوس گرفتن (میانگین‌گیری در راستای عمود بر قطر اصلی) سیگنال فیلترشده را به دست آورد.

از تعمیم روش تحلیل طیفی تکینی به حالت دو بعدی می‌توان برای تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای در داده‌های گرانی از طریق حذف مؤلفه‌های اساسی مربوط به یکی از بی‌هنجاری‌ها (محلی یا ناحیه‌ای) استفاده کرد. به عبارت دیگر با تفکیک مؤلفه‌های اساسی مربوط به بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر، می‌توان تفکیک بی‌هنجاری‌ها را انجام داد. تفکیک مؤلفه‌های اساسی مربوط به بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر از طریق کاهش رتبه ماتریس مسیر حاصل از داده گرانی انجام می‌شود.

در رابطه (۴)، نحوه محاسبه ماتریس مسیر برای یک سیگنال یک بعدی بیان شد. در سیگنال‌های دو بعدی، می‌توان ماتریس مسیر را برای هر سطر یا ستون ماتریس سیگنال محاسبه کرد و از کنار هم قرار دادن ماتریس‌های مسیر هر سطر یا ستون به صورت بلوکی، ماتریس مسیر بلوکی را به دست آورد. به این صورت می‌توان مفهوم ماتریس مسیر را برای سیگنال دو بعدی هم تعمیم داد. چنانچه، سیگنال بی‌هنجاری بوگه دو بعدی در روش گرانی سنجی به صورت $\mathbf{G} = [g_{MN}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ تعریف شود که درایه ردیف

تاخیر (covariance-lag)، \mathbf{C}_X ، مطابق رابطه (۱) بایستی محاسبه شود (واتارد و گیل، ۱۹۸۹).

$$\mathbf{C}_X = [c_{ij}] \quad (1)$$

$$c_{ij} = \frac{1}{N-|i-j|} \sum_{n=1}^{N-|i-j|} X(n)X(n+|i-j|)$$

یک راه جایگزین و متداول برای محاسبه ماتریس کواریانس - تاخیر، مطابق رابطه (۲) استفاده از ماتریس مسیر (trajectory matrix)، \mathbf{T} ، به جای رابطه (۱) است. این ماتریس با استفاده از مقادیر سیگنال $X(n)$ که درون یک پنجره متحرک روی سیگنال به طول L که $2 \leq L \leq \frac{N}{2}$ به صورت رابطه (۳) به دست می‌آید.

$$\mathbf{C}_X = \frac{1}{L} \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (2)$$

که بالانویس T در بیانگر عملگر ترانهاده است. به منظور ساخت ماتریس مسیر، پنجره‌ای به طول L که $2 \leq L \leq \frac{N}{2}$ در نظر گرفته می‌شود. با حرکت پنجره بر روی سیگنال $X(n)$ مجموعه بردارهای ستونی مطابق رابطه (۳) تشکیل می‌شود.

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_L\}^T \\ X_2 &= \{x_2, x_3, x_4, \dots, x_{L+1}\}^T \\ X_3 &= \{x_3, x_4, x_5, \dots, x_{L+2}\}^T \\ &\vdots \\ X_{N-L+1} &= \{x_{N-L+1}, x_{N-L+2}, x_{N-L+3}, \dots, x_N\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

حال می‌توان با استفاده از مجموعه برداری رابطه (۳)، ماتریس مسیر را مطابق رابطه (۴) به محاسبه کرد.

$$\mathbf{T}_{L \times K} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_{N-L+1}]$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{N-L+1} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{N-L+2} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{N-L+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_N \end{bmatrix} \quad (4)$$

ماتریس مسیر، در واقع یک ماتریس هنکل (Hankel) است و همان‌طور که مشاهده می‌شود، به راحتی با میانگین‌گیری در راستای عمود بر قطر اصلی می‌توان سیگنال یک بعدی $X(n) = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ را بازسازی کرد. ماتریس مسیر در روش تحلیل طیفی تکینی، یک مؤلفه مهم برای تجزیه داده‌ها به مؤلفه‌های اساسی آن است. ماتریس مسیر نقش مهمی در فرآیند تجزیه دارد و به شناسایی و جداسازی

ارتباط میان عمق منشأ بی‌هنجاری و رتبه ماتریس مسیر مشخص شود تا بتوان ارتباط مؤلفه‌های اساسی و رتبه ماتریس مسیر را درک کرد.

۲-۲. رتبه ماتریس مسیر و عمق منشأ بی‌هنجاری

رتبه یک ماتریس برابر با بیشینه تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی آن است. به راحتی می‌توان با یک مثال ساده نشان داد که بین عمق منشأ بی‌هنجاری و رتبه ماتریس مسیر یک ارتباط معکوس وجود دارد. به‌منظور درک ارتباط میان عمق منشأ بی‌هنجاری و رتبه ماتریس مسیر حاصل از بی‌هنجاری بوگه مربوط به آن، یک بی‌هنجاری مصنوعی به شکل مکعب مربع با ابعاد ۵۰ متر و چگالی ۲۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب به‌عنوان منشأ تولید کننده بی‌هنجاری گرانی بوگه انتخاب شد. به‌منظور درک ارتباط رتبه ماتریس مسیر و عمق منشأ بی‌هنجاری، عمق بالای مکعب مورد نظر به‌صورت متغیر از ۱۰ متر تا ۱۰۰ متر با گام ۱۰ متر در نظر گرفته شد و برای هر مدل، گرانی بوگه مصنوعی محاسبه شد. به‌منظور تولید بی‌هنجاری گرانی بوگه برای مدل مصنوعی، محدوده با ابعاد ۴۰۰×۴۰۰ متر با فاصله شبکه‌بندی پنج متر که منشأ بی‌هنجاری از نظر موقعیت مکانی در مرکز آن قرار دارد، در نظر گرفته شد. بی‌هنجاری‌های بوگه حاصل از بی‌هنجاری مکعب مربع با عمق‌های مختلف تولید شد و ماتریس مسیر مربوط به هر کدام محاسبه شد که در شکل ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری ضمن گسترش جانبی بی‌هنجاری بوگه تولید شده، پخش شدگی مقادیر ماتریس مسیر حول عمود بر قطر اصلی بیشتر می‌شود. به این ترتیب، تعداد ستون‌ها یا سطرها ماتریس مسیر که مستقل خطی از یکدیگر باشند، کاهش می‌یابد یا به عبارت دیگر، رتبه ماتریس مسیر کاهش می‌یابد. برای بررسی بیشتر ارتباط میان عمق منشأ بی‌هنجاری و رتبه ماتریس مسیر، در شکل ۲ مقدار رتبه ماتریس مسیر هر یک از بی‌هنجاری‌های بوگه بر حسب عمق منشأ بی‌هنجاری رسم شده است. همان‌طور که

M و ستون N از ماتریس بی‌هنجاری بوگه G باشد، ماتریس مسیر H_l برای ستون l -ام از ماتریس بی‌هنجاری بوگه با طول پنجره $K = [(p+1)/2]$ بیانگر جزء صحیح است، بر اساس رابطه (۴) به‌صورت رابطه (۵) محاسبه می‌شود (گلیاندینا و ژیکلیاوسکی، ۲۰۱۳؛ ژو و همکاران، ۲۰۲۰).

$$H_l = \begin{bmatrix} g_{1l} & g_{2l} & \cdots & g_{(p-K+1)l} \\ g_{2l} & g_{3l} & \cdots & g_{(p-K+2)l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{Kl} & g_{(K+1)l} & \cdots & g_{pl} \end{bmatrix} \quad (5)$$

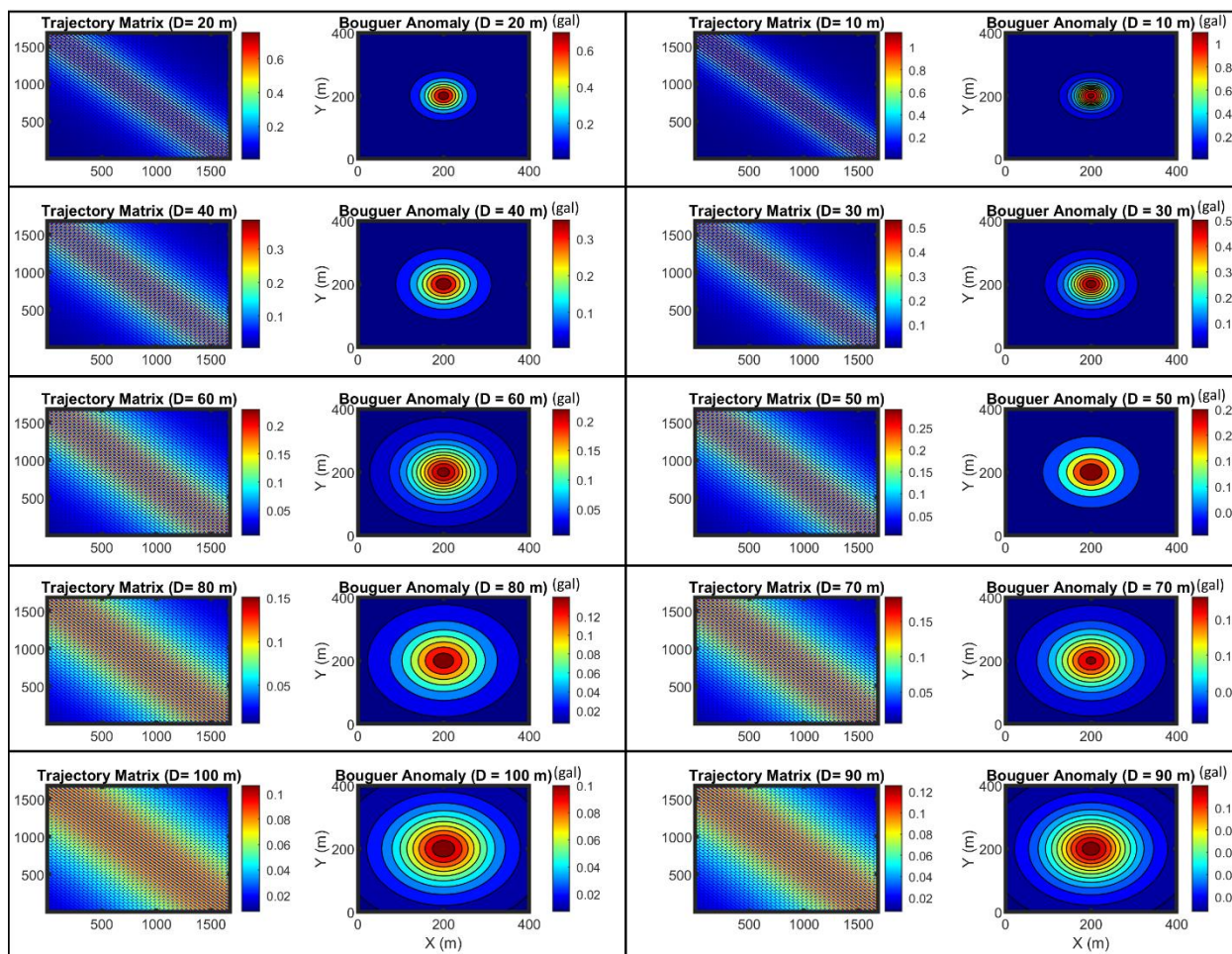
بنابراین، می‌توان برای هر یک از ستون‌های ماتریس بی‌هنجاری بوگه، ماتریس مسیر مطابق رابطه (۵) محاسبه کرد. گلیاندینا و همکاران (۲۰۰۷) به‌منظور تعمیم مفهوم ماتریس مسیر برای یک سیگنال دو بعدی، از مفهوم ماتریس هنکل بلوکی (Block Hankel matrix) مطابق رابطه (۶) برای ادغام ماتریس‌های مسیر رابطه (۵) استفاده کردند.

$$T = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_{q-L+1} \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{q-L+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_L & H_{L+1} & \cdots & H_q \end{bmatrix} \quad (6)$$

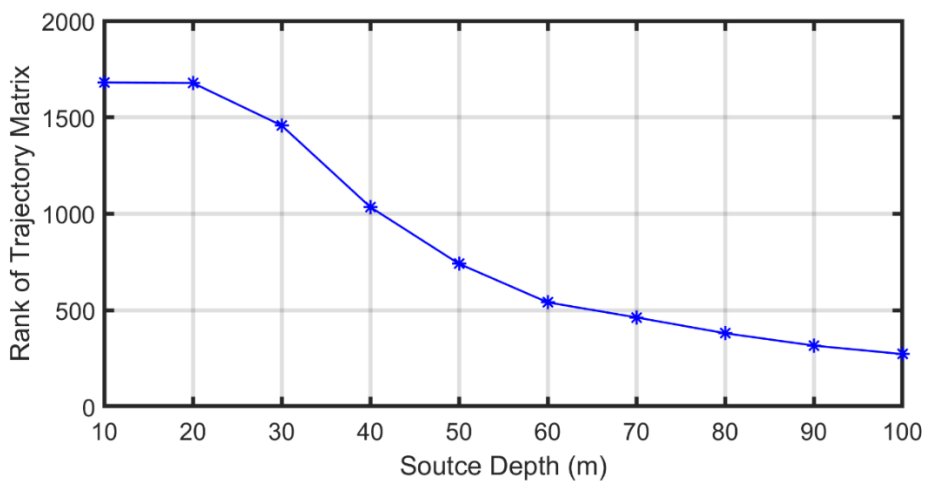
که T ماتریس مسیر برای بی‌هنجاری بوگه دو بعدی و $L = [(q+1)/2]$ است. با استفاده از میانگین‌گیری در راستای عمود بر قطر اصلی ماتریس مسیر بلوکی با توجه به هندسه آن، ابعاد داده اولیه و طول پنجره‌های L و K می‌توان داده دو بعدی گرانی را بازسازی کرد. مشابه حالت یک بعدی، می‌توان پس از محاسبه ماتریس مسیر و محاسبه مقادیر تکین آن، مؤلفه‌های اساسی محاسبه و پس از تحلیل، مؤلفه‌های اساسی مربوط به بی‌هنجاری محلی را حذف و با بازسازی سیگنال، از مؤلفه‌های اساسی باقیمانده، بی‌هنجاری ناحیه‌ای را به دست آورد. یکی از روش‌های تفکیک مؤلفه‌های اساسی در ماتریس مسیر، کاهش رتبه ماتریس مسیر است. از آنجایی که عمق منشأ بی‌هنجاری با مؤلفه‌های اساسی و با رتبه ماتریس مسیر در ارتباط می‌باشد، بنابراین، می‌توان ارتباطی میان رتبه ماتریس مسیر و مؤلفه‌های اساسی بی‌هنجاری ارتباطی پیدا کرد و به کمک آن مؤلفه‌های اساسی مختلف را از یکدیگر تفکیک کرد. لذا، ابتدا بایستی

پایین تری نسبت به ماتریس مسیر مربوط به بی‌هنجاری بوگه با منشأ سطحی می‌باشد و رتبه ماتریس مسیر با عمق منشأ بی‌هنجاری رابطه عکس دارند.

مشاهده می‌شود، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری، رتبه ماتریس مسیر کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر ماتریس مسیر مربوط به بی‌هنجاری‌های بوگه با منشأ عمیق دارای رتبه



شکل ۱. بی‌هنجاری بوگه برای یک بی‌هنجاری به شکل مکعب مربع با ابعاد ۵۰ متر و چگالی ۲۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب با عمق‌های مختلف ۱۰ تا ۱۰۰ متر با گام افزایش ۱۰ متر به همراه ماتریس مسیر هر کدام.



شکل ۲. نمودار رتبه ماتریس‌های مسیر در شکل ۱ بر حسب عمق منشأ بی‌هنجاری گرانی.

ترکیب خطی J هارمونیک دو بعدی نوشت. بنابراین، با استفاده از تعریف معکوس تبدیل فوریه دو بعدی می‌توان هر بی‌هنجاری میدان پتانسیل دو بعدی را مطابق رابطه (۷) به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های اساسی نوشت (روی، ۲۰۰۸).

$$g_{mn} = \mathbf{G}(m, n) = \sum_{j=1}^J r_j e^{i(u_j m + v_j n + \phi_j)} \quad (۷)$$

که u_j و v_j به ترتیب عدد موج در دو راستای x و y هستند و r_j و ϕ_j به ترتیب دامنه و فاز عدد موج هارمونیک j -ام هستند. همان‌طور که نشان داده شد، ماتریس مسیر با استفاده از ماتریس هنکل بلوکی از مقادیر بی‌هنجاری میدان پتانسیل g_{mn} به دست آمد. یانگ و هوا (۱۹۹۶) و هوا (۱۹۹۲) نشان دادند که رتبه ماتریس مسیر با تعداد مؤلفه‌های عدد موج بی‌هنجاری میدان پتانسیل برابر است؛ به عبارت دیگر:

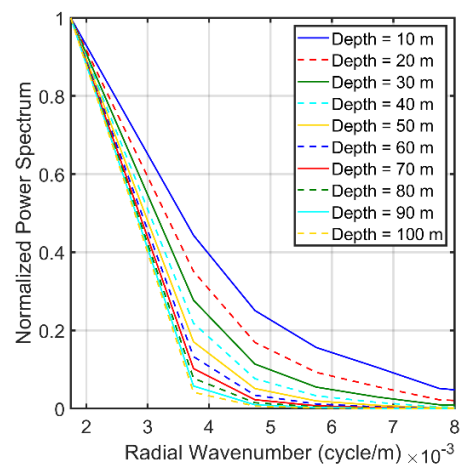
$$\text{rank}(\mathbf{T}) = J \quad (۸)$$

بنابراین، هنگامی که تعداد مؤلفه‌های معنی‌دار عدد موج کوچک باشد (یعنی مطابق شکل ۳ عمق منشأ بی‌هنجاری زیاد باشد)، رتبه ماتریس مسیر پایین خواهد بود. به عبارت دیگر، مؤلفه رتبه پایین ماتریس مسیر مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای هستند و می‌توان با کاهش رتبه ماتریس مسیر اثر بی‌هنجاری‌های با عمق منشأ کم که مربوط به بی‌هنجاری‌های محلی هستند را در ماتریس مسیر کاهش داد. در نهایت با بازسازی بی‌هنجاری بوگه از ماتریس مسیر فیلترشده (کاهش رتبه یافته)، تفکیک بی‌هنجاری‌ها بر حسب عمق منشأ مختلف را انجام داد. روش تحلیل طیفی تکینگی یکی از متداول‌ترین روش‌های کاهش رتبه ماتریس می‌باشد که در ژئوفیزیک بسیار مورد استفاده قرار گرفته است.

۲-۳. روش تحلیل طیفی تکینگی بر کاهش رتبه

با توجه به این‌که بی‌هنجاری ناحیه‌ای مؤلفه رتبه پایین ماتریس مسیر را تشکیل می‌دهد، هدف اصلی این مقاله، کاهش رتبه ماتریس مسیر به منظور تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر با استفاده از روش تحلیل طیفی

ارتباط میان طیف توان بی‌هنجاری میدان پتانسیل با عمق منشأ آن در تحقیقات زیادی مورد بررسی قرار گرفته است که منجر به ارائه روش‌های تخمین عمق منشأ بی‌هنجاری بر اساس طیف توان داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد (اسپکتور و گرت، ۱۹۸۵؛ فدی و همکاران، ۱۹۹۷). در شکل ۳ طیف توان شعاعی نرمال‌شده برای هر یک از بی‌هنجاری‌های بوگه که در شکل ۱ نشان داده شده بودند، رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری، محدوده عدد موج طیف توان شعاعی که دارای دامنه معنی‌داری باشد، کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری، طیف توان شعاعی بی‌هنجاری بوگه به سمت مقادیر پایین انتقال می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری، تعداد مؤلفه‌های عدد موج شعاعی معنی‌دار (دارای دامنه قابل توجه) و بالتبع آن تعداد مؤلفه‌های عدد موج دو بعدی بی‌هنجاری کاهش می‌یابد.



شکل ۳. طیف توان شعاعی نرمال‌شده برای بی‌هنجاری‌های گرانی با عمق منشأ مختلف در شکل ۱.

همان‌طور که مشاهده شد، رتبه ماتریس مسیر به دست آمده از بی‌هنجاری بوگه و تعداد مؤلفه‌های اساسی آن با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری کاهش می‌یابد. این واقعیت بیان می‌کند که می‌توان انتظار داشت که یک ارتباط مستقیم میان تعداد مؤلفه‌های اساسی بی‌هنجاری بوگه و رتبه ماتریس مسیر وجود داشته باشد. باتاچاریا (۱۹۶۵) نشان داد که داده‌های دو بعدی میدان پتانسیل را می‌توان به صورت

محلّی و ناحیه‌ای از یکدیگر با استفاده از کاهش رتبه ماتریس مسیر است و بایستی مقدار بهینه آن تعیین شود. روش‌های متعددی برای تعیین مقدار بهینه رتبه وجود دارد. یکی از روش‌های متداول برای تخمین مقدار رتبه r ، تحلیل طیفی ویژه تصویرهای مختلف ماتریس مسیر است (گلیاندینا و همکاران، ۲۰۰۷). برای این منظور، هر ویژه تصویر ماتریس مسیر با استفاده از سه‌گانه‌های حاصل از تجزیه مقادیر تکین (σ_i, U_i, V_i) محاسبه می‌شود. بی‌هنجاری بوگه مربوط به آن ویژه تصویر با استفاده از میانگین‌گیری در راستای عمود بر قطر اصلی همان ویژه تصویر به دست می‌آید. سپس طیف توان شعاعی هر بی‌هنجاری بوگه بازسازی شده محاسبه می‌شود. با تحلیل طیفی بی‌هنجاری بوگه هر ویژه تصویر و بررسی محدوده عدد موج هر کدام و مقایسه با محدوده موج مجاز برای بی‌هنجاری ناشی از منشأ با عمق مورد نظر (عمیق یا سطحی) می‌توان رتبه r بهینه را به دست آورد. همان‌طور که مشخص است، در این روش بایستی اطلاعاتی از محتوای طیفی بی‌هنجاری ناحیه‌ای در دسترس باشد. این اطلاعات می‌تواند از طریق روش‌های متداول تفکیک بی‌هنجاری بر مبنای طیف توان به دست بیاید.

تکینی می‌باشد. اگر تقریب رتبه k از ماتریس مسیر \mathbf{T} به صورت $\mathbf{T}^{(r)}$ نشان داده شود، می‌توان آن را از حل مسئله بهینه‌سازی رابطه (۹) به دست آورد (اوروپزا و ساچی، ۲۰۱۱).

$$\min_{\mathbf{T}^{(r)}} \left(\|\mathbf{T} - \mathbf{T}^{(r)}\|_F^2 \right) \quad (۹)$$

که $\|\cdot\|_F$ بیانگر نرم فریبینوس است. قضیه ایکارت - یانگ (Eckart-Young) پاسخ مسئله بهینه‌سازی رابطه (۹) را به صورت رابطه (۱۰) بر اساس تجزیه مقادیر ویژه (singular value decomposition) بیان می‌کند (ایکارت و یانگ، ۱۹۳۶).

$$\mathbf{T}^{(r)} = \sum_{i=1}^r \sigma_i U_i V_i^T = \sum_{i=1}^r \mathbf{T}_i \quad (۱۰)$$

که \mathbf{T}_i به‌عنوان i -امین ماتریس پایه (elementary matrix) یا ویژه تصویر (eigenimage) i -ام ماتریس مسیر مربوط به مقدار تکین σ_i ، U_i و V_i به ترتیب بردارهای تکین چپ و راست ماتریس مسیر هستند (لانگ، ۲۰۱۰). الگوریتم شکل ۴ جهت تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلّی در داده‌های گرانی ۲ بعدی بر مبنای تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر پیشنهاد می‌شود.

مقدار r تنها پارامتر مهم برای تفکیک بی‌هنجاری‌های

شکل ۴. الگوریتم تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلّی به روش تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر.

ورودی: بی‌هنجاری گرانی بوگه دو بعدی $\mathbf{G} = [g_{mn}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$

۱- محاسبه ماتریس‌های هنکل با استفاده از رابطه (۵).

۲- محاسبه ماتریس مسیر با استفاده از رابطه (۶).

۳- اعمال تجزیه مقادیر تکین بر روی ماتریس مسیر و محاسبه سه‌گانه‌های تکین (σ_i, U_i, V_i) و تولید ویژه تصاویر مربوطه با استفاده از $\mathbf{T}_i = \sigma_i U_i V_i^T$

۴- تخمین مقدار بهینه رتبه r برای تخمین رتبه پایین ماتریس مسیر.

۵- محاسبه تقریب رتبه r ماتریس مسیر با استفاده از رابطه (۱۰) و مقدار بهینه r به دست آمده از مرحله ۴.

۶- میانگین‌گیری در راستای عمود بر قطر اصلی در تقریب رتبه پایین ماتریس مسیر برای بازسازی بی‌هنجاری گرانی ناشی از منشأ با عمق مورد نظر.

خروجی: بی‌هنجاری گرانی ناشی از منشأ با عمق مورد نظر

نمایش داده شده است. به‌منظور بررسی میزان مشارکت تجمعی ویژه تصاویر در ماتریس مسیر بی‌هنجاری ناشی از دو مدل به‌صورت همزمان، با استفاده از رابطه (۱۰)، ماتریس مسیر با تعداد r ویژه تصویر اول (که در این مثال $r = 12$ است) بازسازی شد که در شکل ۶ نشان داده شده است. در شکل ۷، بی‌هنجاری گرانی بازسازی شده با هر یک از ماتریس‌های مسیر شکل ۱۱ نمایش داده شده است. با مقایسه شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان دید که ماتریس مسیر بازسازی شده با سه ویژه تصویر اول شباهت زیادی با بی‌هنجاری مربوط به منبع عمیق (بی‌هنجاری ناحیه‌ای) دارد. همچنین، مقایسه میان شکل‌های ۵ و ۷ نشان می‌دهد که بی‌هنجاری گرانی بازسازی شده با استفاده از ماتریس مسیر حاصل از سه ویژه تصویر با تقریب بسیار خوبی شبیه به بی‌هنجاری گرانی ناشی از منبع عمیق است. به عبارت دیگر، کاهش رتبه ماتریس مسیر به مقدار رتبه سه می‌تواند بی‌هنجاری عمیق (ناحیه‌ای) را از بی‌هنجاری سطحی (محلی) تفکیک کند. در شکل ۸ مقدار ضریب همبستگی میان بی‌هنجاری ناحیه‌ای واقعی و محلی به ازای تعداد ویژه تصاویر مورد استفاده در بازسازی ماتریس مسیر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تعداد سه ویژه تصویر اول بیشترین مقدار ضریب همبستگی ایجاد شده است.

جدول ۱. مشخصات فیزیکی و هندسی مدل مصنوعی در نظر گرفته شده برای تولید بی‌هنجاری گرانی.

B	A	منبع بی‌هنجاری
۲	۱	چگالی بلوک (gr/m^3)
۵۰	۲۰۰	اندازه بلوک در راستای محور x بر حسب متر
۵۰	۲۰۰	اندازه بلوک در راستای محور y بر حسب متر
۱۰	۱۰۰	ضخامت بلوک بر حسب متر
.	.	فاصله مرکز بلوک در راستای محور x نسبت به مبدأ
.	.	فاصله مرکز بلوک در راستای محور y نسبت به مبدأ
۱۰	۱۰۰	عمق بالای بلوک بر حسب متر

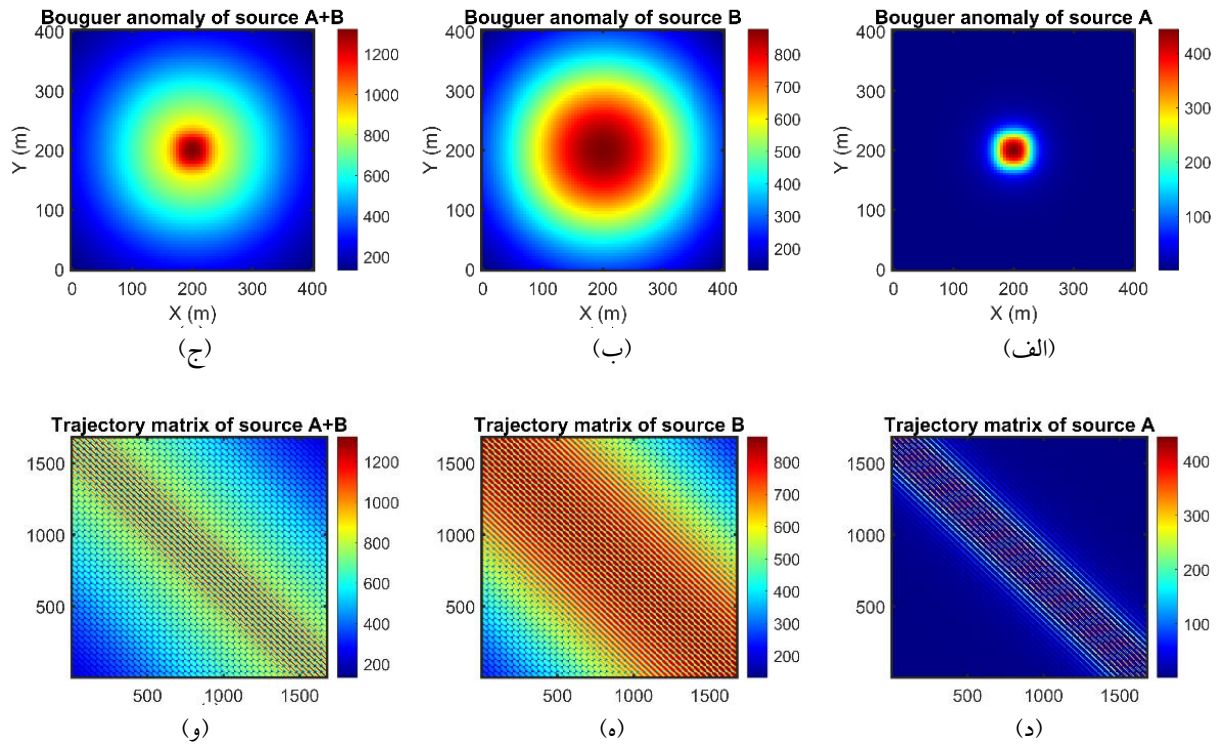
روش دیگر برای تعیین بهینه مقدار رتبه بررسی خاصیت تناوبی بودن ویژه تصاویر ماتریس مسیر است. ویژه تصاویر ماتریس مسیر شکلی مشابه صفحه شطرنج دارند و رفتار تناوبی از خود نشان می‌دهند. معمولاً دوره تناوب ویژه تصاویر ماتریس مسیر از مقدار کم به زیاد بر اساس شماره ویژه تصویر افزایش می‌یابد. مقدار بهینه برای رتبه ماتریس مسیر را می‌توان از تغییر رفتار تناوبی ویژه تصاویر به دست آورد (رکاپالی و تیواری، ۲۰۱۶). در این حالت، ویژه تصویری که رفتار تناوبی آن نسبت به ویژه تصویر قبلی تفاوت چشمگیری داشته باشد، به‌عنوان حد تفکیک ویژه تصویر بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی از یکدیگر در نظر گرفته می‌شود. اما یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین روش‌ها، روش یافتن نقطه آرنجی (elbow) در نمودار درصد نرم فریبوس حفظ‌شده توسط تخمین رتبه r ماتریس مسیر می‌باشد. در این مقاله از روش نقطه آرنج برای تعیین رتبه بهینه استفاده شده است که در ادامه معرفی می‌شود.

۲-۴. تعیین رتبه بهینه برای تقریب رتبه پایین ماتریس مسیر

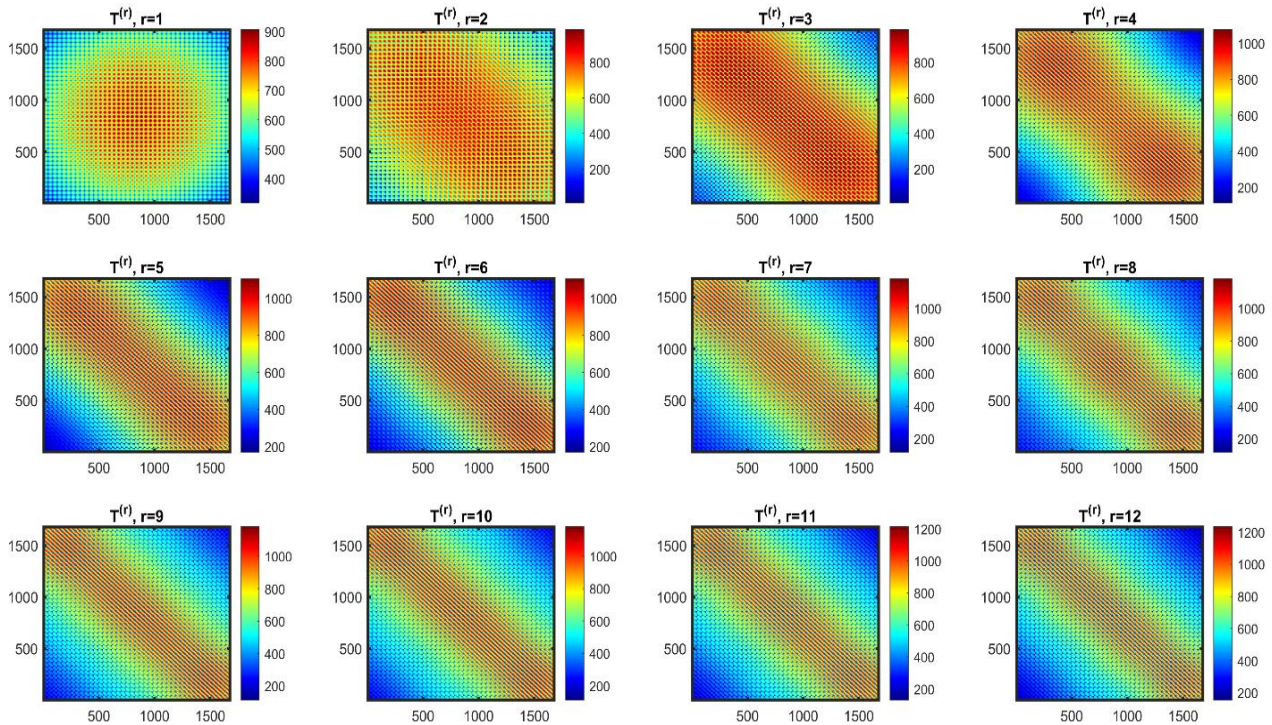
بر اساس تئوری تجزیه مقادیر تکین، می‌توان ماتریس مسیر را مطابق رابطه (۱۱) بر اساس مقادیر تکین تجزیه کرد (لانگ، ۲۰۱۰).

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^J \sigma_i U_i V_i^T = \sum_{i=1}^J \mathbf{T}_i \quad (11)$$

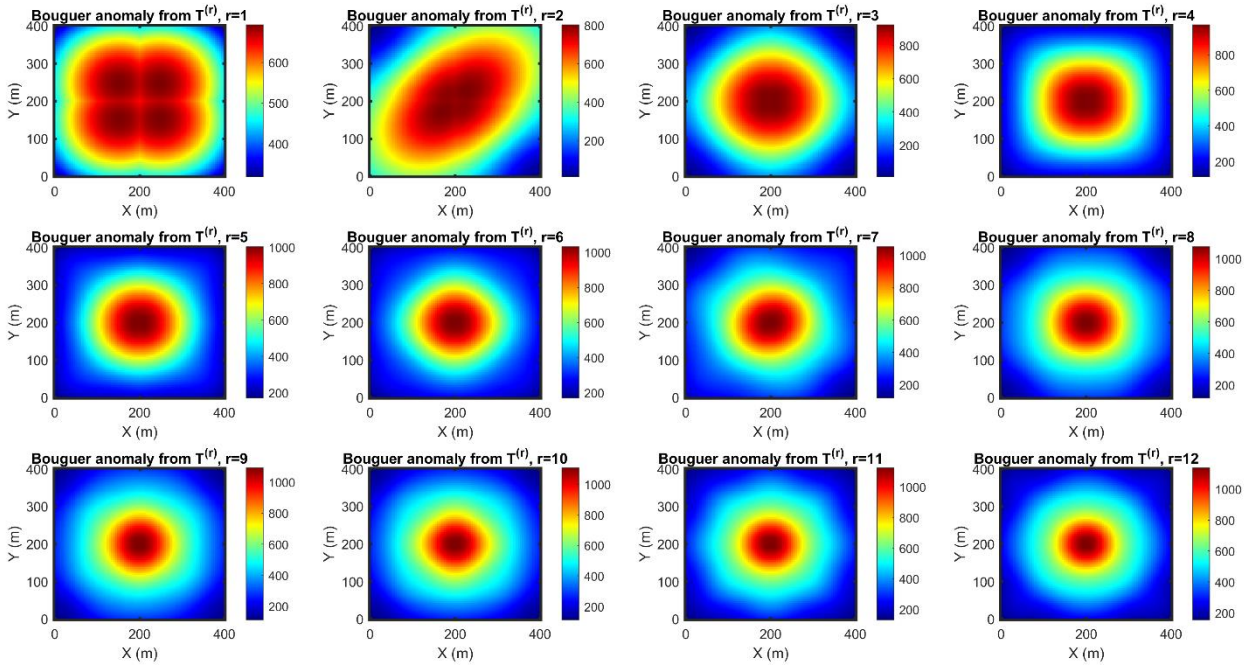
که σ_i مقادیر تکین، U_i و V_i به ترتیب بردارهای تکین چپ و راست ماتریس مسیر هستند. رتبه ویژه تصویر \mathbf{T}_i برابر با یک است و مربوط به سه گانه تکین (σ_i, U_i, V_i) است. در واقع مقدار تکین i -ام، σ_i ، میزان مشارکت نسبی ویژه تصویر \mathbf{T}_i را در ماتریس مسیر نهایی بیان می‌کند. برای درک بیشتر این موضوع، مدل مصنوعی متشکل از دو منبع بی‌هنجاری عمیق و سطحی مطابق جدول ۱ در نظر گرفته شد. بی‌هنجاری گرانی هر کدام از منابع بی‌هنجاری در حالت مستقل از یکدیگر و حاصل جمع هر دو حالت محاسبه شد که به همراه ماتریس مسیر هر کدام در شکل ۵



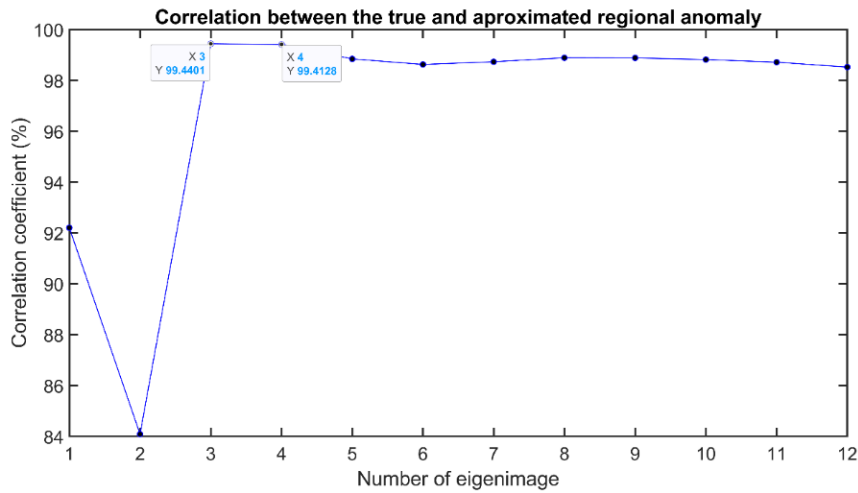
شکل ۵. بی‌هنجاری گرانی برای مدل مصنوعی (الف) A و (ب) B با مشخصات فیزیکی و هندسی در جدول ۱ و (ج) بی‌هنجاری گرانی حاصل از دو مدل به صورت همزمان. (د)، (ه) و (و) ماتریس مسیر حاصل از بی‌هنجاری گرانی (الف)، (ب) و (ج).



شکل ۶. ماتریس‌های مسیر بازسازی‌شده با استفاده از ۳ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر شکل ۵ (و).



شکل ۷. بی‌هنجاری گرانی به‌دست‌آمده از ماتریس‌های مسیر بازسازی‌شده با استفاده از T ویژه تصویر اول ماتریس مسیر شکل ۵ (و).



شکل ۸. ضریب همبستگی میان بی‌هنجاری ناحیه‌ای واقعی و مصنوعی.

Relative Contribution of i – th eigenimage = $\frac{\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^J \sigma_i^2}$ (۱۲)

Cumulative Contribution of i – th eigenimage = $\frac{\sum_{j=1}^i \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^J \sigma_i^2}$ (۱۳)

در شکل ۹، مقادیر تکین ماتریس مسیر، مشارکت نسبی و مشارکت تجمعی هر یک از ۱۲ ویژه تصویر اول برای مثال شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سه ویژه تصویر اول به مشارکت نسبی حدودی به ترتیب ۴، ۹۰، و ۴ درصد در حالت تجمعی حدود ۹۸ درصد سهم ساخت ماتریس مسیر را بر عهده دارند و تمامی ویژه

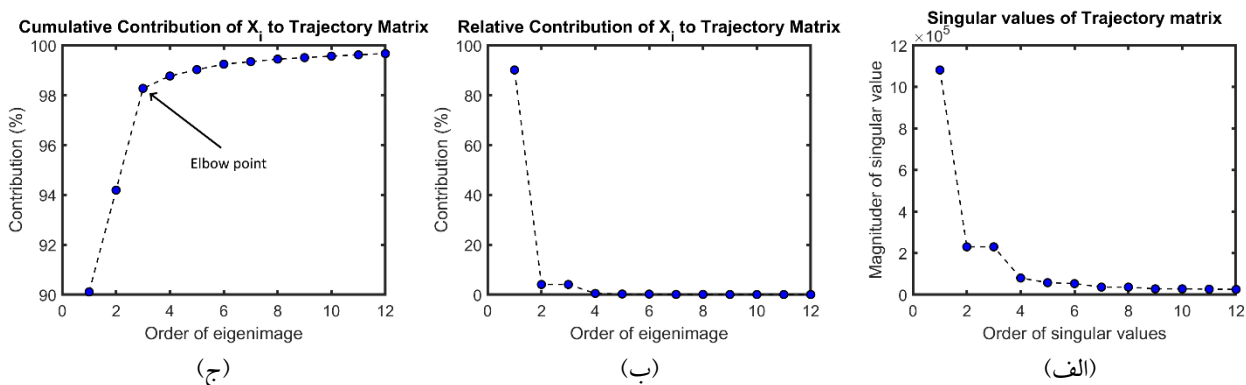
نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که در ساخت ماتریس مسیر مؤلفه‌های مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای مشارکت بیشتری دارند. به عبارت دیگر چند ویژه تصویر اول که بیشترین نقش در تولید ماتریس مسیر را دارند، مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای هستند. برای بیان کمی میزان مشارکت ویژه تصاویر مختلف در ساخت ماتریس مسیر، دو کمیت مشارکت نسبی (relative contribution) و مشارکت تجمعی (cumulative contribution) با کمک مقادیر تکین به‌صورت روبربط (۱۲) و (۱۳) می‌توان تعریف کرد (داون و جزایری، ۲۰۲۱).

بی‌هنجاری‌های محلی و ناحیه‌ای در داده‌های گرانی، یک مدل مصنوعی نسبتاً پیچیده با ۹ بلوک به صورت شکل ۱۰ برای تولید بی‌هنجاری گرانی در نظر گرفته شد که مشخصات فیزیکی و هندسی آن در جدول ۲ آورده شده است. چهار بلوک به شماره‌های ۱ تا ۴ به عنوان منشأ عمیق تولید بی‌هنجاری ناحیه‌ای و پنج بلوک به شماره‌های ۵ تا ۹ به عنوان منشأ سطحی بی‌هنجاری محلی در نظر گرفته شده‌اند. تولید بی‌هنجاری در یک شبکه 101×101 با فاصله ایستگاهی ۵ متر در دو راستای محور x و y انجام شد. شکل ۱۱ بی‌هنجاری گرانی محلی، ناحیه‌ای و کل را برای مدل مصنوعی نشان می‌دهد.

تصاویر باقیمانده فقط ۲ درصد در ساخت ماتریس مسیر نقش داشته‌اند. حال به صورت بصری می‌توان رتبه‌ای که به عنوان نقطه تا شدگی (آرنج) نمودار مشارکت تجمعی است را به عنوان رتبه بهینه برای تقریب رتبه پایین ماتریس مسیر استفاده کرد. مطابق نمودار شکل ۹، رتبه ۳ به عنوان رتبه بهینه برای مثال شکل ۵ می‌تواند در نظر گرفته شود که با نتایج شکل‌های ۷ و ۸ کاملاً همخوانی دارد.

۳. مدل مصنوعی

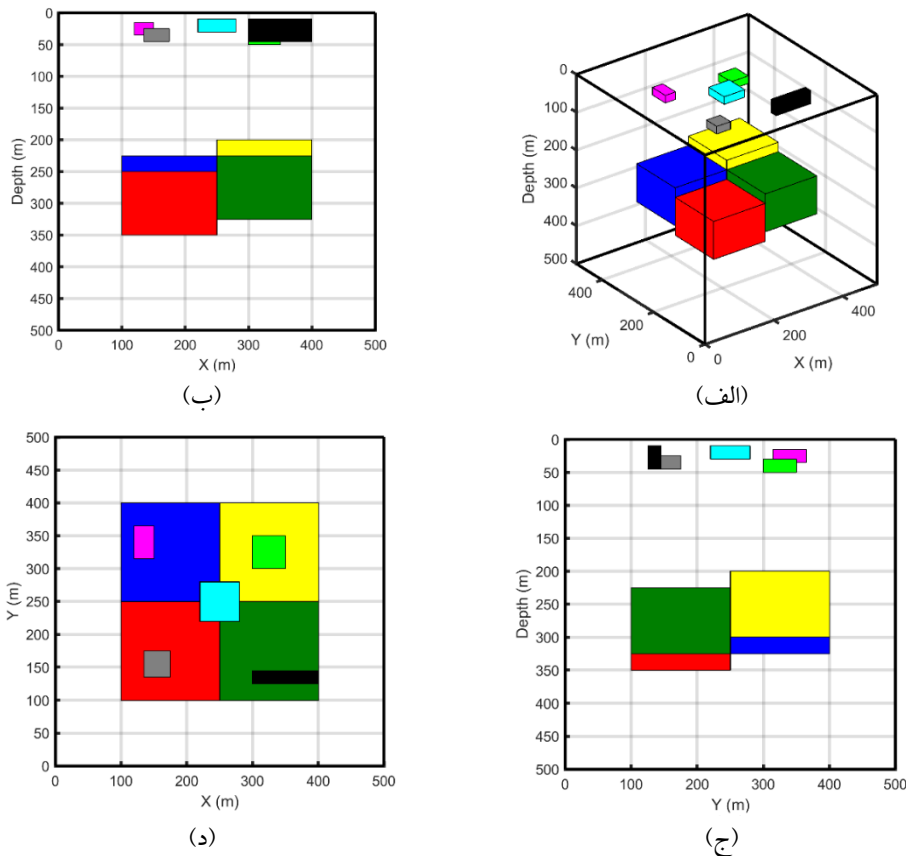
به منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی در تفکیک



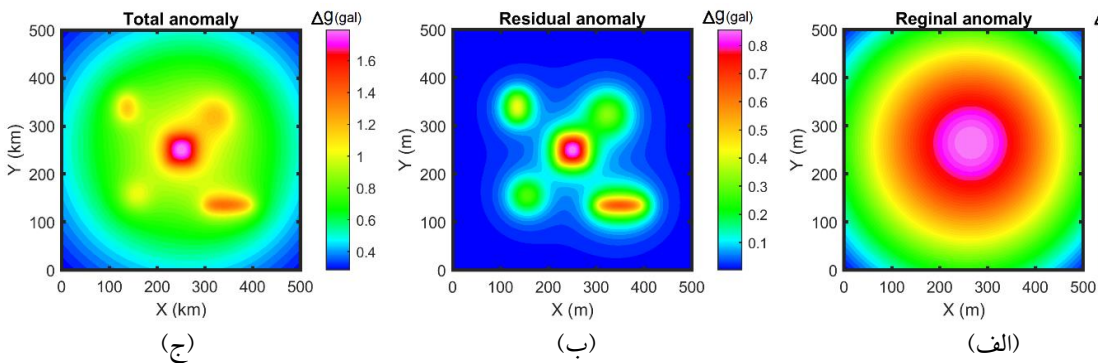
شکل ۹. (الف) ۱۲ مقدار تکیه اول ماتریس مسیر شکل ۵ (و). (ب) مشارکت نسبی و (ج) مشارکت تجمعی ۱۲ ویژه تصویر اول در ساخت ماتریس مسیر.

جدول ۲. مشخصات فیزیکی و هندسی مدل مصنوعی در نظر گرفته شده برای تولید بی‌هنجاری گرانی.

شماره بلوک	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
رنگ بلوک	قرمز	آبی	سبز تیره	زرد	خاکستری	سبز روشن	صورتی	سیاه	فیروزه‌ای
چگالی بلوک (gr/cm^3)	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۲	۲	۲	۲	۲
اندازه بلوک در راستای محور x بر حسب متر	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۴۰	۵۰	۳۰	۱۰۰	۶۰
اندازه بلوک در راستای محور y بر حسب متر	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۱۵۰	۴۰	۵۰	۵۰	۲۰	۶۰
ضخامت بلوک بر حسب متر	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۰	۲۰	۲۰	۳۵	۲۰
فاصله مرکز بلوک در راستای محور x نسبت به مبدأ	۱۷۵	۱۷۵	۳۲۵	۳۲۵	۱۵۵	۳۲۵	۱۳۵	۳۵۰	۲۵۰
فاصله مرکز بلوک در راستای محور y نسبت به مبدأ	۱۷۵	۳۲۵	۱۷۵	۳۲۵	۱۵۵	۳۲۵	۳۴۰	۱۳۵	۲۵۰
عمق بالای بلوک بر حسب متر	۲۵۰	۲۲۵	۲۲۵	۲۰۰	۲۵	۳۰	۱۵	۱۰	۱۰



شکل ۱۰. مدل مصنوعی متشکل از ۷ بلوک برای تولید بی‌هنجاری (الف) نمای سه بعدی، (ب) نمای $X - Z$ ، (ج) نمای $Y - Z$ و (د) نمای $X - Y$.



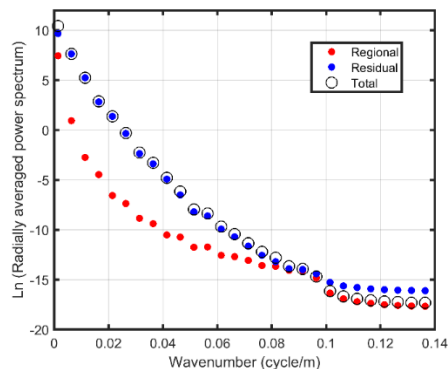
شکل ۱۱. بی‌هنجاری گرانی تولیدشده برای مدل مصنوعی شکل ۱۰ (الف) بی‌هنجاری ناحیه‌ای برای بلوک‌های ۱ تا ۴، (ب) بی‌هنجاری محلی برای بلوک‌های ۵ تا ۹ و (ج) تمام بلوک‌های ۱ تا ۹.

طرفی، روش اول برای تعیین رتبه بهینه ماتریس مسیر که بر مبنای مقایسه طیف توان ویژه تصاویر بود، نیز در این مثال نمی‌تواند موثر واقع شود. بنابراین، روش استفاده از نقطه آرنجی نمودار مشارکت تجمعی برای تعیین رتبه بهینه ماتریس مسیر جهت تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای باید استفاده شود. به همین منظور، ابتدا بر اساس الگوریتم پیشنهادی، ماتریس مسیر برای بی‌هنجاری گرانی مطابق

در شکل ۱۲ طیف توان شعاعی برای بی‌هنجاری کل و بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، امکان تفکیک باند عدد موج بی‌هنجاری ناحیه‌ای و بی‌هنجاری محلی در طیف توان بی‌هنجاری کل وجود ندارد. لذا روش‌های مبتنی بر طیف توان برای تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای در چنین داده‌هایی نتیجه قابل قبولی را ارائه نخواهند داد. از

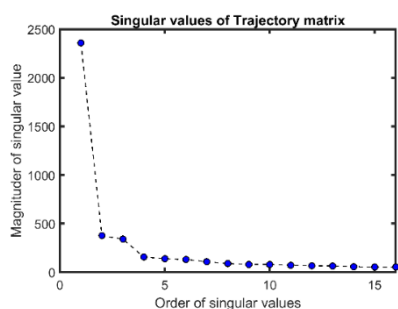
ماتریس مسیر را تشکیل داده‌اند. با بررسی نمودار مشارکت جمعی می‌توان دید که نقطه آرنجی این نمودار در ویژه تصویر سوم اتفاق افتاده است. در واقع ویژه تصویر شماره سه محل تغییر روند درصد مشارکت جمعی است. بنابراین، مقدار عدد سه به‌عنوان رتبه بهینه برای کاهش رتبه ماتریس مسیر در روش تحلیل طیفی تکینی در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱۴، بی‌هنجاری ناحیه‌ای محلی و ناحیه‌ای تخمین‌زده شده از روش تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر با استفاده از رتبه بهینه ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده شده در تمام مختصات داده نسبت به بی‌هنجاری ناحیه‌ای واقعی در شکل ۱۱-الف به اندازه مقدار ثابت حدود ۰/۱ میلی‌گال بیشتر است. این مسئله به دلیل این است که در اثر تداخل بی‌هنجاری محلی ناشی از منشأهای مختلف، مؤلفه‌های عدد موج کوچکی ایجاد شده که سبب شده در بی‌هنجاری محلی نیز مؤلفه با رتبه پایین وجود داشته باشد که هنگام تفکیک در بی‌هنجاری ناحیه‌ای قرار گرفته است. این مؤلفه‌های عدد موج کوچک در بی‌هنجاری محلی در طیف توان شکل ۱۲ به خوبی قابل مشاهده است.

رابطه (۵) و (۶) محاسبه شد و سپس مقادیر تکین و مشارکت نسبی و جمعی ۱۶ ویژه تصویر اول مطابق رابطه (۱۲) و (۱۳) به دست آمد که در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

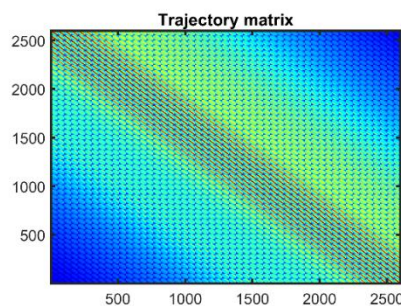


شکل ۱۲. مقایسه طیف توان شعاعی بی‌هنجاری کل با بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی.

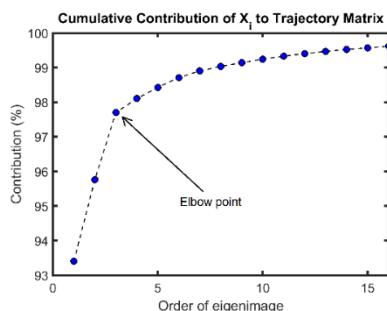
همان‌طور که مشاهده می‌شود، میان مقادیر تکین اول و شانزدهم ماتریس مسیر اختلاف دامنه زیادی وجود دارد که مربوط به اختلاف دامنه مقادیر تکین مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی است. همچنین، با بررسی نمودار مشارکت نسبی و جمعی ۱۶ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر می‌توان دید که سه ویژه تصویر اول سهم حدود ۹۷/۷ درصد از



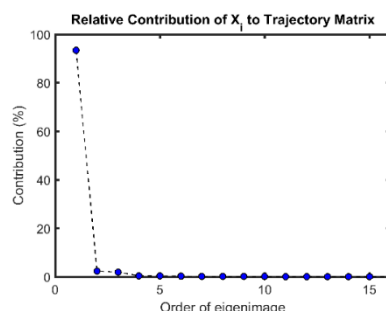
(ب)



(الف)

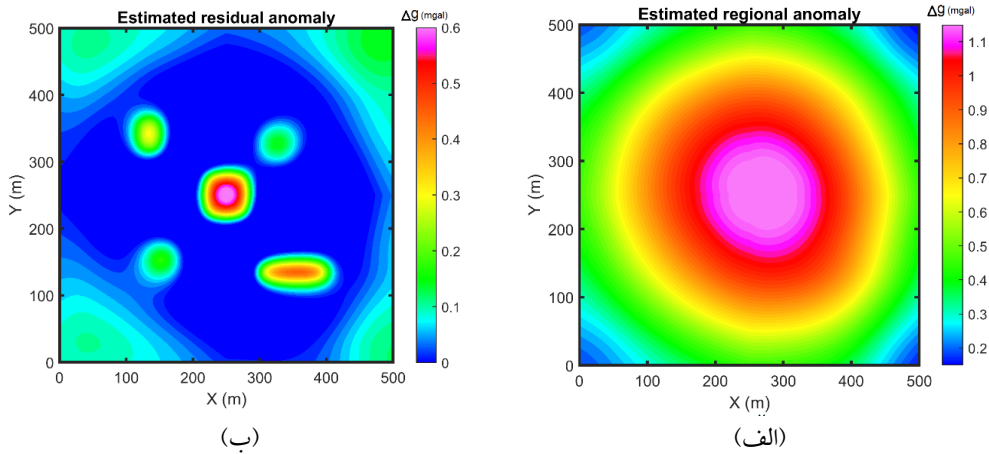


(د)



(ج)

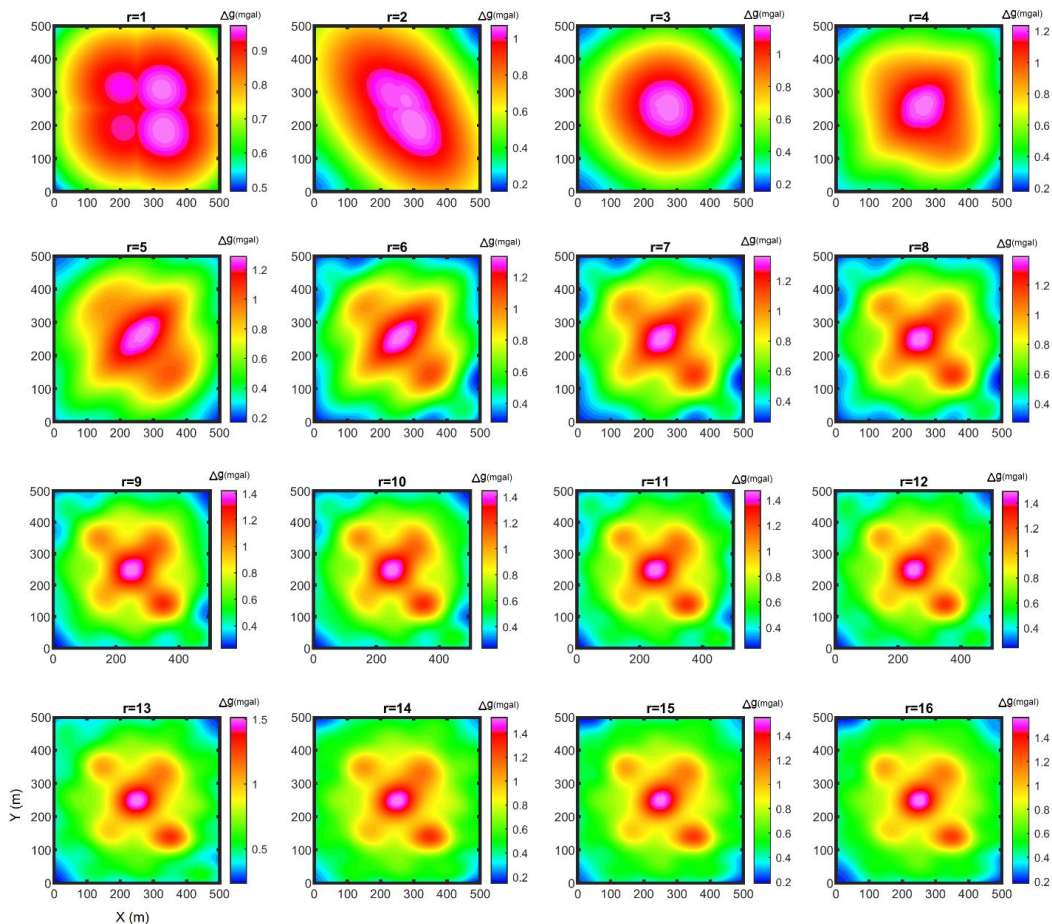
شکل ۱۳. (الف) ماتریس مسیر برای بی‌هنجاری کل شکل ۱۱-ج و (ب) تعداد ۱۶ مقدار تکین بزرگ ماتریس مسیر پس از اعمال تجزیه مقادیر تکین. (ج) و (د) نمودار مشارکت نسبی و جمعی ۱۶ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر.



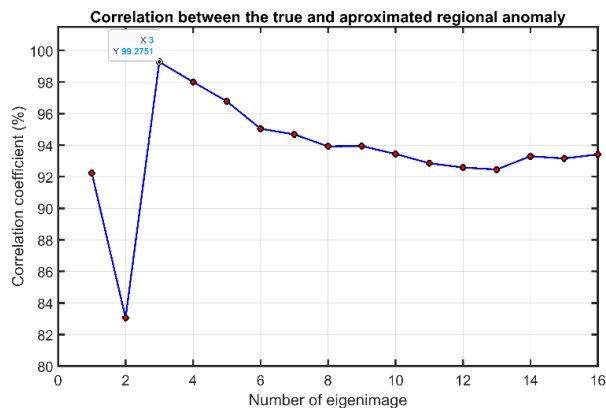
شکل ۱۴. بی‌هنجاری (الف) ناحیه‌ای و (ب) محلی تخمین‌زده‌شده به روش تحلیل طیفی تکین و مقدار بهینه رتبه ۳.

همبستگی به صورت کمی اندازه‌گیری شد که در شکل ۱۶ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشتر شباهت به بی‌هنجاری ناحیه‌ای درست (شکل ۱۱-الف) چه از لحاظ بصری در شکل ۱۵ و چه از لحاظ کمی در شکل ۱۶ مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده با سه ویژه تصویر اول ماتریس مسیر است.

به منظور بررسی بیشتر، در شکل ۱۵ بی‌هنجاری گرانی بازسازی‌شده با استفاده از ۳ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر برای که از یک تا ۱۶ تغییر کند، نشان داده شده است. سپس میزان شباهت هر کدام از بی‌هنجاری‌های گرانی بازسازی‌شده به عنوان بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده به بی‌هنجاری ناحیه‌ای اصلی از طریق محاسبه ضریب



شکل ۱۵. بی‌هنجاری بازسازی‌شده با استفاده از ۳ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر.



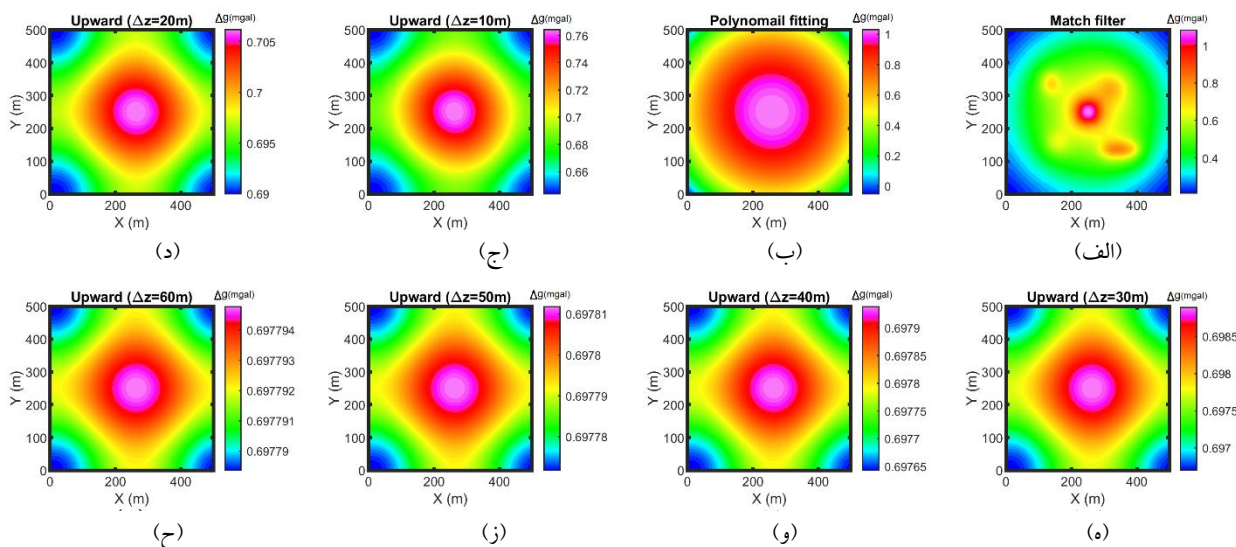
شکل ۱۶. نمودار مقدار ضریب همبستگی میان بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده با استفاده از ۳ ویژۀ تصویر اول ماتریس مسیر و بی‌هنجاری ناحیه‌ای اصلی در شکل ۱۱-الف.

است. در جدول ۳ مقدار ضریب همبستگی میان بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده و بی‌هنجاری ناحیه‌ای واقعی در شکل ۱۱-الف به‌منظور مقایسه کمی کارآیی روش‌های مذکور آورده شده است (روشندل کاهو و نجاتی کلاته، ۲۰۱۴).

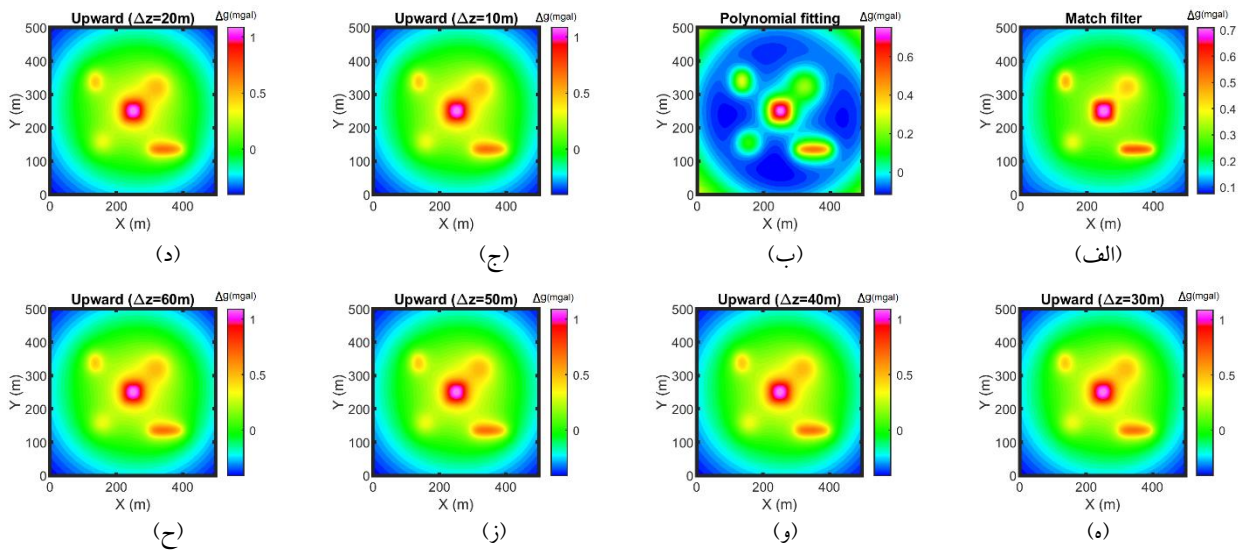
به‌منظور مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش‌های متداول تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی، نتایج تفکیک بی‌هنجاری‌ها به روش فیلتر داده مینا، برازش چندجمله‌ای با درجه ۲ و ادامه فراسو با ازای ارتفاع مبنای ۱۰ تا ۶۰ محاسبه و در شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نشان داده شده

جدول ۳. مقدار ضریب همبستگی میان بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده و بی‌هنجاری واقعی شکل ۱۱-الف.

روش	تحلیل طیفی تکنیکی	فیلتر داده‌مینا	برازش درجه ۲	ادامه فراسو ۱۰ با ارتفاع	ادامه فراسو ۲۰ با ارتفاع	ادامه فراسو ۳۰ با ارتفاع	ادامه فراسو ۴۰ با ارتفاع	ادامه فراسو ۵۰ با ارتفاع	ادامه فراسو ۶۰ با ارتفاع	ضریب همبستگی
	۹۹/۲۸	۹۴/۷۱	۹۷/۴۶	۹۸/۲۱	۹۷/۴۴	۹۶/۹۹	۹۶/۷۶	۹۶/۶۶	۹۶/۶۱	



شکل ۱۷. بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده‌شده به روش (الف) فیلتر داده‌مینا، (ب) برازش چندجمله‌ای درجه ۲ و (ج) تا (ح) ادامه فراسو به‌ازای ارتفاع ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ متری.



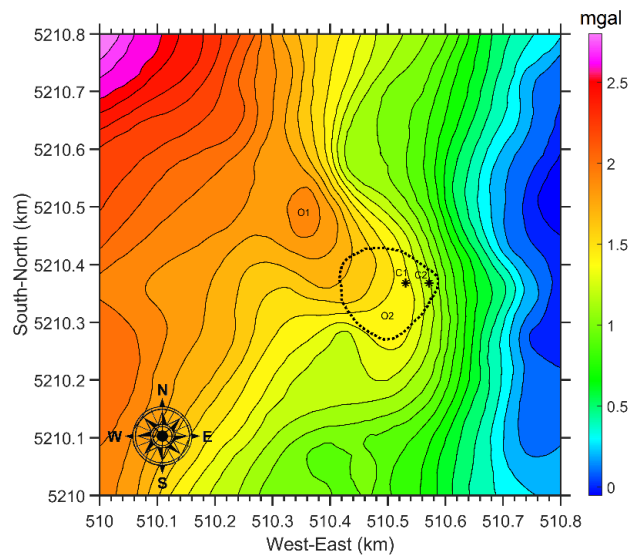
شکل ۱۸. بی‌هنجاری محلی تخمین زده شده به روش (الف) فیلتر داده‌مبنا، (ب) برازش چندجمله‌ای درجه ۲ و (ج) تا (ح) ادامه فراسو به ازای ارتفاع ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ متری.

بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی در داده‌های واقعی میدان پتانسیل، بی‌هنجاری گرانی بوگه مربوط به کانسار دیدا (Dida) در استان جیلین (Jilin) در شمال شرقی کشور چین انتخاب شد که در شکل ۱۹ نشان داده شده است. بر اساس گزارش‌ها و حفاری‌های صورت گرفته در منطقه مورد مطالعه دو کانسار آهن مجزا در فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند. کانسار O1 دارای تباين گرانی و مغناطیسی بیشتری با محیط دربرگیرنده نسبت به کانسار O2 می‌باشد (ژنگ و همکاران، ۲۰۰۷). به همین دلیل کانسار آهن O2 در حضور بی‌هنجاری ناحیه‌ای در بی‌هنجاری بوگه کل در شکل ۱۹ قابل تشخیص نیست. نقطه چین سیاه در مرکز شکل، گسترش جانبی کانسار آهن O2 موجود در منطقه را نشان می‌دهد که پس از مدل‌سازی معکوس داده‌های گرانی‌سنجی و مغناطیس‌سنجی مشخص شده است (ژنگ و همکاران، ۲۰۰۷؛ وانگ و همکاران، ۲۰۲۰). همچنین نتایج حفاری در دو محل که با ستاره‌های سیاه و به نام‌های C1 و C2 در شکل نشان داده شده‌اند، وجود کانسار آهن O2 را تأیید کرده است (وانگ و همکاران، ۲۰۲۰).

با مقایسه کیفی و کمی نتایج به دست آمده می‌توان مشاهده کرد روش تحلیل طیفی تکین ماتریس مسیر در مقایسه با سه روش دیگر، تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی را با دقت بیشتری انجام داده است. روش فیلتر داده‌مبنا به دلیل این که مبتنی بر طیف توان است، همان‌طور که قبلاً هم بیان شد، نتوانسته است بین بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای تفکیک مناسبی ایجاد کند. اما بر خلاف آن، روش برازش چندجمله‌ای به دلیل این که بی‌هنجاری ناحیه‌ای بسیار شبیه به یک رویه درجه ۲ است، نتایج قابل قبولی تولید کرده است. البته در داده‌ها با بی‌هنجاری ناحیه‌ای پیچیده، این روش نمی‌تواند کارآمد باشد. در روش ادامه فراسو نیز به خصوص برای ارتفاع کم نتیجه قابل قبول و خوبی به دست آمده است. البته در این روش تعیین ارتفاع بهینه یک مسئله مهم و تأثیرگذار است که روش‌هایی برای تعیین مقدار بهینه آن معرفی شده است (روش‌دندل کاهو و نجاتی کلاته، ۲۰۱۴).

۴. نتایج داده واقعی

به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی در جداسازی



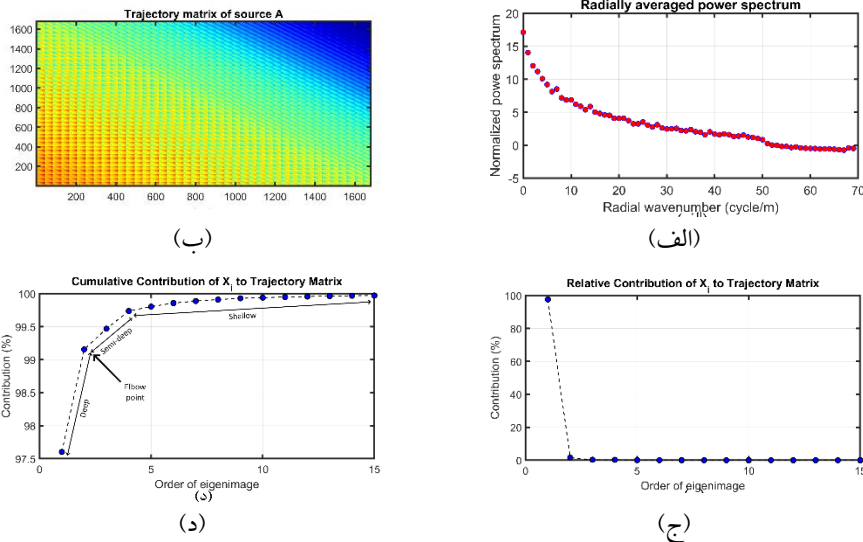
شکل ۱۹. بی‌هنجاری گرانی بوگه مربوط به دو کانسار آهن O1 و O2 دیده در ایالت جیلین شمال شرقی کشور چین. نقطه چین در مرکز تصویر موقعیت گسترش جانبی کانسار آهن O2 را بر اساس مطالعات انجام شده نشان می‌دهد. ستاره‌های C1 و C2 موقعیت حفاری‌های انجام شده را نشان می‌دهد که وجود کانسار آهن در آنها تأیید شده است.

چندجمله‌ای و ادامه فراسو به ترتیب در شکل‌های ۲۱ و ۲۲ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پس حذف اثر بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین زده شده به روش تحلیل طیفی تکینی، اثر کانسار آهن O2 در بی‌هنجاری محلی به خوبی آشکار شده است. مطابق انتظار، کانسار آهن O1 که دارای تباين گرانی و مغناطیس قوی تری نسبت به کانسار آهن O2 است، در بی‌هنجاری محلی با شدت بیشتری نمایان شده است. روش فیلتر داده مبنا به دلیل عدم امکان تفکیک عدد موج مربوط به بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای از یکدیگر، نتوانسته است تفکیک مناسبی بین بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای ایجاد کند. با توجه به این که بی‌هنجاری ناحیه‌ای یک روند مشابه یک صفحه تخت دارد، نتیجه به دست آمده از روش برازش چندجمله‌ای درجه ۱ نیز قابل قبول است. درجات بالاتر برای برازش چندجمله‌ای نتیجه خوبی تولید نکرده است. هر چند نتایج تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای به روش برازش چند جمله‌ای درجه یک دارای شباهت‌هایی با نتایج روش تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر است، با این وجود، همچنان روش پیشنهادی تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر کارآیی بهتری در تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای دارد. زیرا همان‌طور که گفته شد، بر اساس شواهد مدل‌سازی معکوس

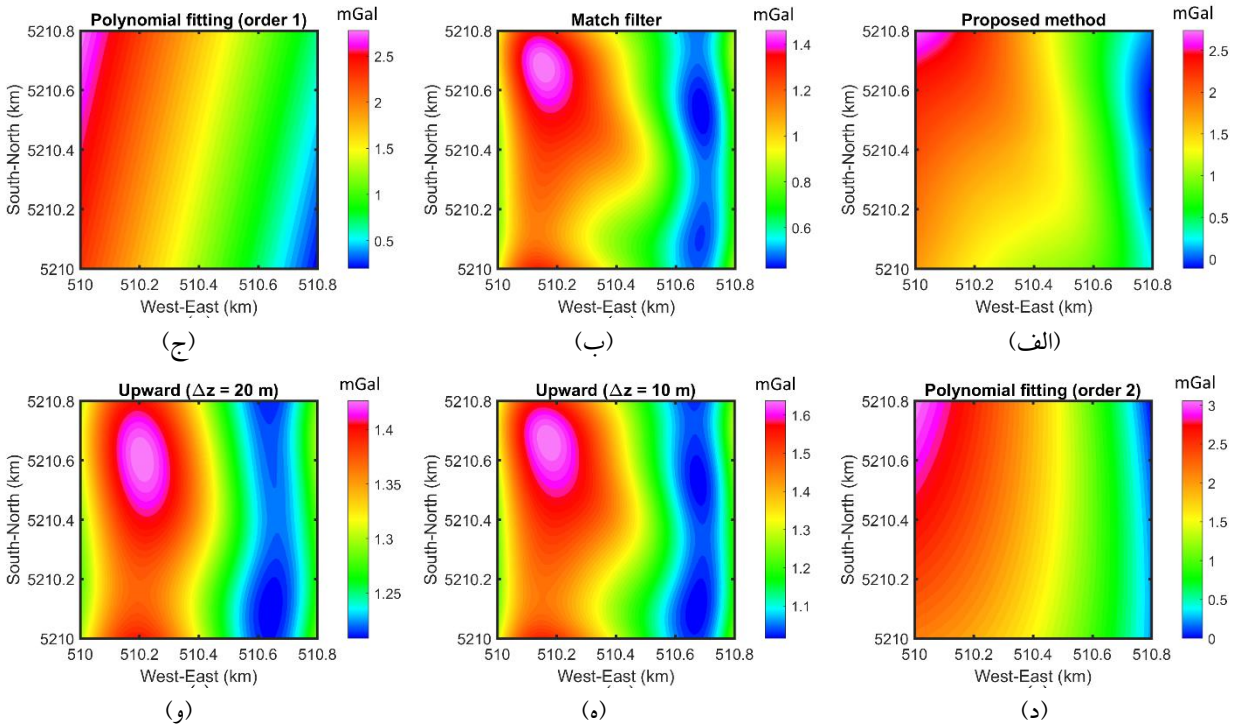
به منظور انجام فرایند تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای با استفاده از روش پیشنهادی ماتریس مسیر بی‌هنجاری بوگه کل شکل ۱۹ محاسبه شد. در شکل ۲۰ نمودار طیف توان شعاعی میانگین برای بی‌هنجاری بوگه کل، ماتریس مسیر و مشارکت نسبی و تجمعی ۱۵ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار مشارکت تجمعی شامل سه بخش است که سه گروه بی‌هنجاری بر اساس عمق (سطحی، عمق متوسط و عمیق) را نشان می‌دهد. از آنجایی که در مطالعات معدنی، هدف تفکیک بی‌هنجاری‌های ناحیه‌ای (عمیق) و بی‌هنجاری‌های محلی (سطحی و عمق متوسط) است، بر اساس نمودار مشارکت تجمعی مقدار رتبه بهینه ماتریس مسیر برای کاهش رتبه برابر با دو انتخاب می‌شود. همچنین می‌توان دید که امکان تفکیک محدوده عدد موج مربوط به بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی بر اساس طیف توان شعاعی وجود ندارد و امکان تفکیک بی‌هنجاری‌ها به روش‌های مبتنی بر طیف توان در این داده بسیار ضعیف است. فرایند جداسازی با روش تحلیل طیفی تکینی ماتریس مسیر بر روی بی‌هنجاری بوگه کل نشان داده شده در شکل ۱۹ اعمال شد. نتیجه بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی به دست آمده به روش تحلیل طیفی تکینی، فیلتر داده مبنا، برازش

روش برازش چندجمله‌ای عکس این موضوع اتفاق افتاده است. همچنین روش ادامه فراسو نیز به دلیل این که به صورت یک فیلتر پایین‌گذر در حوزه فرکانس می‌باشد، به دلیل عدم امکان تفکیک عدد موج مربوط به دو بی‌هنجاری نایه‌ای و محلی نتوانسته تفکیک مناسبی انجام دهد.

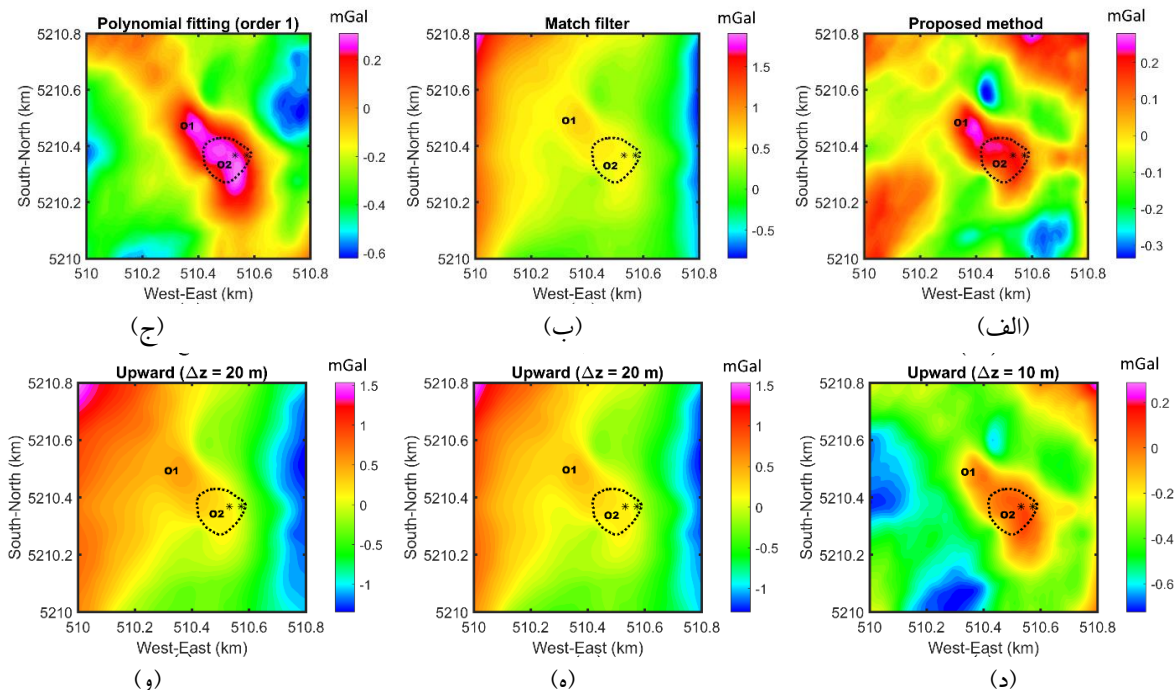
و حفاری‌های صورت گرفته در منطقه مورد مطالعه، کانسار آهن O2 دارای تباین گرانی و مغناطیس ضعیف‌تری با محیط دربرگیرنده نسبت به کانسار آهن O1 می‌باشد و با توجه به عمق قرارگیری دو کانسار انتظار می‌رود که در محدوده کانسار O2 مقادیر بی‌هنجاری محلی نسبت به محدوده کانسار O1 پایین‌تر باشد که در تمام خروجی‌های



شکل ۲۰. (الف) طیف توان شعاعی بی‌هنجاری بوگه داده واقعی شکل ۱۹ و (ب) ماتریس مسیر آن. میزان مشارکت (ج) نسبی و (د) تجمعی تعداد ۱۵ ویژه تصویر اول ماتریس مسیر.



شکل ۲۱. بی‌هنجاری ناحیه‌ای تخمین‌زده شده به روش (الف) تحلیل طیفی تکین با رتبه سه، (ب) فیلتر داده‌مبنا، (ج) و (د) برازش چندجمله‌ای درجه ۱ و ۲ و (ه) و (و) ادامه فراسو به ازای ارتفاع ۱۰ و ۲۰ متری.



شکل ۲۲. بی‌هنجاری محلی تخمین‌زده‌شده به روش (الف) تحلیل طیفی تکین با رتبه سه، (ب) فیلتر داده‌مبنا، (ج) و (د) برازش چندجمله‌ای درجه ۱ و ۲، (ه) و (و) ادامه فراسو به ازای ارتفاع ۱۰ و ۲۰ متری. نقطه چین در مرکز تصویر موقعیت گسترش جانبی کانسار آهن O2 را بر اساس مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری

تفکیک بی‌هنجاری ناحیه‌ای و محلی یکی از مراحل اصلی پردازش داده‌های میدان پتانسیل است و خروجی آن به‌طور معمول ورودی برای تفسیر و مدل‌سازی است. بنابراین، هر گونه خطا در این مرحله پردازشی می‌تواند سبب ایجاد خطا در مراحل بعدی پردازش و تفسیر داده‌های میدان پتانسیل شود. در این مقاله روش نوینی بر مبنای الگوریتم تحلیل طیفی تکین معرفی شد و کارایی روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های متداول برازش چندجمله‌ای و فیلتر داده مبنا روی داده مصنوعی و داده میدانی مورد بررسی قرار گرفت. از تحلیل خروجی‌های به‌دست‌آمده در داده‌های مصنوعی و میدانی می‌توان نتایج زیر را بیان کرد:

- ماتریس مسیر یک ماتریس معنادار قابل محاسبه از داده‌های میدان پتانسیل است که میان رتبه آن و عمق منشأ بی‌هنجاری ارتباط معکوس وجود دارد. به این معنی که با افزایش عمق منشأ بی‌هنجاری، رتبه ماتریس مسیر کاهش می‌یابد.

ارتباط مستقیم وجود دارد.

- با توجه به رابطه رتبه ماتریس مسیر با عمق منشأ بی‌هنجاری و طیف مقادیر تکین ماتریس، می‌توان از روش کاهش رتبه ماتریس مسیر برای تفکیک بی‌هنجاری‌ها با عمق‌های منشأ متفاوت در داده‌های میدان پتانسیل استفاده کرد.

- در مقایسه با سه روش متداول برازش چندجمله‌ای، فیلتر داده‌مبنا و ادامه فراسو، روش پیشنهادی تحلیل طیفی تکین ماتریس مسیر از عملکرد بهتری در تفکیک بی‌هنجاری محلی و ناحیه‌ای برخوردار است و می‌تواند در محیط‌های با پیچیدگی زمین‌شناسی بالا نتایج با دقت بهتری تولید کند. بنابراین، می‌توان روش تحلیل طیفی تکین ماتریس مسیر را به‌عنوان یک روش جایگزین روش‌های متداول برای تفکیک بی‌هنجاری‌های محلی و ناحیه‌ای در نظر گرفت تا با افزایش دقت تفکیک بی‌هنجاری، دقت مدل‌سازی را نیز افزایش داد.

مراجع

- میان رتبه ماتریس مسیر و طیف مقادیر تکین آن نیز یک

- Anvari, R., Mohammadi, M., Roshandel Kahoo, A., Khan, N. A., & Abdullah, A. I. (2020). Random noise attenuation of 2D seismic data based on sparse low-rank estimation of the seismic signal. *Computers & Geosciences*, 135, 104376.
- Anvari, R., Roshandel Kahoo, A., Mohammadi, M., Khan, N. A., & Chen, Y. (2019). Seismic random noise attenuation using sparse low-rank estimation of the signal in the time-frequency domain. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 12(5), 1612-1618.
- Anvari, R., Siahsar, M. A. N., Gholtashi, S., Roshandel Kahoo, A., & Mohammadi, M. (2017). Seismic random noise attenuation using synchrosqueezed wavelet transform and low-rank signal matrix approximation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 55(11), 6574-6581.
- Bhattacharyya, B. (1965). Two-dimensional harmonic analysis as a tool for magnetic interpretation. *Geophysics*, 30(5), 829-857.
- De Klerk, J. (2015). Adapting the singular spectrum analysis trajectory matrix technique to identify multiple additive time-series outliers. *Studies in Economics and Econometrics*, 39(3), 25-47. <https://doi.org/10.1080/10800379.2015.12097284>
- Dentith, M., & Mudge, S. T. (2014). *Geophysics for the mineral exploration geoscientist*. Cambridge University Press.
- Downs, C., & Jazayeri, S. (2021). Resolution enhancement of deconvolved ground penetrating radar images using singular value decomposition. *Journal of Applied Geophysics*, 193, 104401. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2021.104401>
- Eckart, C., & Young, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1(3), 211-218.
- Fedi, M., & Quarta, T. (2006). Wavelet analysis for the regional-residual and local separation of potential field anomalies. *Geophysical prospecting*, 46(5), 507-525.
- Fedi, M., Quarta, T., & De Santis, A. (1997). Inherent power-law behavior of magnetic field power spectra from a Spector and Grant ensemble. *Geophysics*, 62(4), 1143-1150.
- Golyandina, N., Florinsky, I., & Usevich, K. (2007). Filtering of digital terrain models by 2D singular spectrum analysis. *International Journal of Ecology & Development*, 8(F07), 81-94.
- Golyandina, N., & Zhigljavsky, A. (2013). *Singular Spectrum Analysis for time series*. Springer Science & Business Media.
- Guo, L., Meng, X., Chen, Z., Li, S., & Zheng, Y. (2013). Preferential filtering for gravity anomaly separation. *Computers & Geosciences*, 51, 247-254.
- Hua, Y. (1992). Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil.
- Kumar, K. S., Rajesh, R., & Tiwari, R. K. (2018). Regional and residual gravity anomaly separation using the singular spectrum analysis-based low pass filtering: a case study from Nagpur, Maharashtra, India. *Exploration Geophysics*, 49(3), 398-408.
- Lange, K. (2010). *Singular value decomposition* (2 ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5945-4>
- Mandal, A., & Niyogi, S. (2018). Filter assisted bi-dimensional empirical mode decomposition: A hybrid approach for regional-residual separation of gravity anomaly. *Journal of Applied Geophysics*, 159, 218-227.
- Mickus, K. L., Aiken, C. L., & Kennedy, W. (1991). Regional-residual gravity anomaly separation using the minimum-curvature technique. *Geophysics*, 56(2), 279-283.
- Moradi Shah Ghariyeh, A., Nejati Kalateh, A., & Roshandel Kahoo, A. (2015). Magnetic field anomaly separation using empirical mode decomposition. *Iranian Journal of Geophysics*, 9(1), 46-57. http://www.ijgeophysics.ir/article_33572_9effa4011ef0cc1f09877b044b25e484.pdf
- Nazari Siahsar, M. A., Gholtashi, S., Roshandel Kahoo, A., Marvi, H., & Ahmadi, A. (2016). Sparse time-frequency representation for seismic noise reduction using low-rank and sparse decomposition. *Geophysics*, 81(2), V117-V124.
- Oropeza, V., & Sacchi, M. (2011). Simultaneous seismic data denoising and reconstruction via multichannel singular spectrum analysis. *Geophysics*, 76(3), V25-V32.
- Pawłowski, R. S., & Hansen, R. (1990). Gravity anomaly separation by Wiener filtering. *Geophysics*, 55(5), 539-548.
- Rajesh, R., Kumar, K. S., & Tiwari, R. (2020). Regional and residual gravity anomaly separation using singular spectrum based frequency filtering methods: A case study of shallow subsurface modeling from Nagpur, India. *Pure and Applied Geophysics*, 177(2), 977-990.
- Rekapalli, R., & Tiwari, R. (2016). Singular spectral analysis based filtering of seismic signal using new Weighted Eigen Spectrogram. *Journal of Applied Geophysics*, 132, 33-37.
- Roshandel Kahoo, A., & Nejati Kalateh, A. (2012). Potential field anomaly separation using empirical mode decomposition. *Iranian Journal of Geology*, 6(21), 51-56.
- Roshandel Kahoo, A., & Nejati Kalateh, A. (2014). Estimation of the optimum upward

- continuation height for chromite prospecting at Hormozgan province. *Iranian Journal of Geophysics*, 8(2), 1-9. <https://doi.org/20.1001.1.20080336.1393.8.2.1.4>
- Roshandel Kahoo, A., & Nejati Kalateh, A. (2015). Design of a data-based filter for separation of gravity anomalies. *Iranian Journal of Mining Engineering*, 10(26), 45-53.
- Roy, K. K. (2008). *Potential theory in applied geophysics*. Springer Science & Business Media.
- Sheriff, S. D. (2010). Matched filter separation of magnetic anomalies caused by scattered surface debris at archaeological sites. *Near Surface Geophysics*, 8(2), 145-150.
- Spector, A., & Grant, F. (1985). Statistical models for interpreting aeromagnetic data. *Geophysics*, 50(11), 1951-1960.
- Telford, W. M., Telford, W., Geldart, L., Sheriff, R. E., & Sheriff, R. E. (1990). *Applied geophysics*. Cambridge university press.
- Vautard, R., & Ghil, M. (1989). Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 35(3), 395-424. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(89\)90077-8](https://doi.org/10.1016/0167-2789(89)90077-8)
- Wang, J., Meng, X., & Li, F. (2020). A computation scheme based on field attenuation rate for improving regional-residual separation of potential field data set. *Journal of Geophysics and Engineering*, 17(1), 117-126. <https://doi.org/https://doi.org/10.1093/jge/gxz095>
- Yang, H. H., & Hua, Y. (1996). On rank of block Hankel matrix for 2-D frequency detection and estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(4), 1046-1048.
- Zeng, H., Xu, D., & Tan, H. (2007). A model study for estimating optimum upward-continuation height for gravity separation with application to a Bouguer gravity anomaly over a mineral deposit, Jilin province, northeast China. *Geophysics*, 72(4), 145-150. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.2719497>
- Zhu, D., Li, H., Liu, T., Fu, L., & Zhang, S. (2020). Low-rank matrix decomposition method for potential field data separation. *Geophysics*, 85(1), G1-G16. <https://doi.org/10.1190/geo2019-0016.1>