

Influence of noise estimation on Electrical Resistivity Tomography Data Inversion

Azadi, Y.¹  | Ghanati, R.² 

1. Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: yosraazadi@ut.ac.ir

2. **Corresponding Author**, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail: rghanati@ut.ac.ir

(Received: 10 May 2022, Revised: 6 June 2022, Accepted: 4 Oct 2022, Published online: 14 June 2023)

Summary

Electrical resistivity tomography is a simple, cost-effective, and highly practical method for surveying near-surface properties. Today, this method is widely used in the discovery and exploitation of water resources, archeology, and environmental and hydro-geophysical studies (such as estimating the hydrogeological parameters of the aquifer). In electrical resistivity imaging, according to the purpose and location of data collection, the electrodes are placed in specific arrays, and data collection is performed. The collected data (potential distribution or apparent resistivity) is then transformed into a distribution of actual electrical resistivity values using inverse modeling methods. Imaging requires defining and solving a nonlinear inverse problem. In this strategy, we optimize the objective function, which consists of fitting field and theoretical data. First, the physics of the problem (forward model) is presented by solving Poisson's equation with the finite difference numerical solution method. An accurate and efficient forward calculation is the basis of most processes of the inversion. Calculation of resistivity forward responses is carried out using simulation of the current flow into the earth's surface through solving Poisson's equation. In this contribution, a finite-difference algorithm is applied to discretize the simulated models, restricted by a mixed boundary condition. One of the merits of the finite-difference method over the other methods is its well-known ability to quickly approximate the solutions for any arbitrary and complex structure models. The finite-difference method is relatively fast compared with the finite-element method. However, to include a general topography, the finite-element method becomes a better selection despite being computationally expensive. The partial differential equations governing the resistivity problem are obtained by using the principle of conservation of charge and the continuity equation.

The inverse problem is then solved by linearizing the problem in different iterations. A significant part of this research is how to perform inverse modeling of electrical resistivity data. The formulation and solution of the forward and inverse problem in this dissertation have been programmed in MATLAB and part of the program has been written in the C language to increase the computing speed. The field data is noisy due to the non-ideal measuring instruments, improperly filed conditions, operator errors, and geological conditions. Noise values can play a pivotal role in the inversion of electrical resistivity due to the special properties of the inverse problem. A proper estimation of field measurements noise level prevents over- or under-fitting of the calculated data and field data during inversion. Improper fitting (i.e., fitting where the value of the parameter χ^2 is much more or less than one) leads to creating an artifact or loss of important details in the final inverted model. In this paper, to deal with the effect of noise level on the ERT inversion results, two methods of reciprocity error method and stacking error method have been used. The results of numerical modeling show that the appropriate estimation of the noise level leads to the estimation of subsurface resistivity models close to the ground reality. We also provide a comparison between the inversion results obtained with the presence of noise level and those derived without including the weighting matrix into the objective function.

Keywords: Electrical resistivity tomography (ERT), Finite difference, Noise level estimation, Non-linear inversion, Stacking error method, Reciprocity error method.

اثر تخمین نوفه در وارون سازی داده‌های توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی

یسری آزادی^۱ | رضا قناتی^۲ ✉

۱. گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: yosraazadi@ut.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه فیزیک زمین، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: rghanati@ut.ac.ir

(دریافت: ۱۴۰۱/۲/۲۰، بازنگری: ۱۴۰۱/۳/۱۶، پذیرش نهایی: ۱۴۰۱/۷/۱۲، انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۳/۲۴)

چکیده

تصویرسازی دوبعدی الکتریکی تحت عنوان توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی از طریق تعریف و حل یک مسئله وارون غیرخطی انجام می‌شود. در اغلب موارد داده‌های حاصل از برداشت صحرایی به دلیل ایده‌آل نبودن دستگاه‌های اندازه‌گیری، شرایط نامناسب برداشت، خطاهای اپراتوری و شرایط زمین‌شناسی، دارای نوفه هستند. آگاهی از توزیع آماری و مقادیر نوفه به دلیل ویژگی‌های خاص مسئله وارون می‌تواند نقش محوری در وارون‌سازی مقاومت ویژه الکتریکی ایفا کند. به طوری که برآورد درستی از مقادیر نوفه، مانع برآزش بیش از حد و کمتر از حد داده‌های محاسباتی و داده‌های صحرایی در حین وارون‌سازی می‌شود. در واقع برآزش نامناسب (برآزشی که مقدار پارامتر χ^2 خیلی بیشتر یا کمتر از یک باشد) منجر به ایجاد بی‌هنجاری‌های کاذب یا از دست دادن جزئیات مهم در مدل وارون نهایی می‌شود؛ بنابراین برآورد صحیح از سطح نوفه داده‌های صحرایی از طریق مدل‌های ریاضی و یا تکنیک‌های صحرایی با هدف تخمین مدلی نزدیک به واقعیت زمین ضرورتی اجتناب‌ناپذیر است. در این مقاله برای ارزیابی نقش برآورد سطح نوفه داده‌های صحرایی در خروجی مدل‌های وارون، ماتریس وزنی داده‌ها که متشکل از سطح نوفه در هر داده است از طریق دو روش هم‌پاسخی و برانبارش و در قالب آرایه و نر محاسبه می‌شود. نتایج مدل‌سازی‌های عددی بر روی داده‌های مصنوعی و صحرایی نشان می‌دهد که تخمین صحیح ماتریس وزنی داده‌ها منجر به برآورد مدل‌های مقاومت ویژه نزدیک به واقعیت زمین می‌شود.

واژه‌های کلیدی: خطای برانبارش، خطای هم‌پاسخی، تخمین سطح نوفه، تفاضل محدود، توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی (ERT)، وارون‌سازی غیرخطی.

۱. مقدمه

بی‌هنجاری‌های زیرسطحی پیچیده استفاده کرد. امروزه با پیشرفت تجهیزات و ابزارآلات در عملیات صحرایی مثل ابزارهای چندکاناله و چندالکترودی، بهبود اندازه‌گیری‌ها و دسترسی به کامپیوترهای قدرتمند برای حل مسئله‌های عددی، روش توموگرافی مقاومت ویژه (Electrical Resistivity Tomography) به‌عنوان ابزاری برای بررسی ساختارهای زمین و نیز پی‌جویی و اکتشاف منابع آبی زیرزمینی و مواد معدنی کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است (پارک و وان، ۱۹۹۱؛ گریفیتز و بارکر، ۱۹۹۳؛ لوک و بارکر، ۱۹۹۵؛ داهلین، ۱۹۹۶؛ اولدنبرگ و لی، ۱۹۹۹؛ سیگل و همکاران، ۲۰۰۷؛ کمنا و همکاران، ۲۰۱۲؛ زدانوف و همکاران، ۲۰۱۸). دی و مورسون (۱۹۷۹a)، (۱۹۷۹b) به بررسی مدل‌سازی پیشرو میدان الکتریکی محیط زیرسطحی زمین حاصل از تزریق جریان الکتریکی

روش مقاومت ویژه الکتریکی یکی از روش‌های مهم و پرکاربرد ژئوفیزیکی برای برداشت داده و مطالعه ساختارهای زیرسطحی است. این روش برای اولین بار در فرانسه و در اوایل قرن بیستم توسط کنراد شلومبرژه در یک مطالعه معدنی معرفی شد. نتیجه تحقیقات شلومبرژه در سال ۱۹۲۹ با موضوع مطالعات اکتشافی مخازن هیدروکربنی با استفاده از روش مقاومت ویژه الکتریکی، منجر به کشف مخازن هیدروکربنی در اتحاد جماهیر شوروی شد. وی با کمک بررسی و لئاژ اندازه‌گیری‌شده که در ارتباط با جریان الکتریکی تزریق‌شده به درون زمین است، توانست ساختار زیرسطحی زمین را تخمین بزند. طی دهه‌های اخیر، روش تصویرسازی الکتریکی دوبعدی و سه بعدی افزایش گسترده‌ای پیدا کرده است. از این روش می‌توان برای آمایش مناطقی با زمین‌شناسی و

مسئله کمترین مربعات پایدار و همگرا می‌شود. (دی‌گروت هدلین و کانستبل، ۱۹۹۰؛ ساساکی، ۱۹۹۲). اولدنبِگ و لی (۱۹۹۴) با گسترش و تعمیم وارون‌سازی منظم‌سازی‌شده داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی، وارون‌سازی داده‌های پلاریزاسیون القایی را مبتنی بر محاسبه ماتریس حساسیت حاصل از وارون‌سازی داده‌های مقاومت‌ویژه انجام دادند. یک ضعف بزرگ روش کمترین مربعات، حجم بالای محاسبات و زمان‌بر بودن آن است. لوک و بارکر (۱۹۹۴) برای افزایش سرعت وارون‌سازی به روش کمترین مربعات، روش شبه‌نیوتن (Quasi-Newton) را به کار بردند که سرعت محاسبات در آن روش، هشت برابر دیگر وارون‌سازی‌های کمترین مربعات به روش گاوس-نیوتن (Gauss-Newton) بود. در یک تحقیق دیگر، کاهش زمان محاسبات و بهبود سرعت وارون‌سازی غیرخطی داده‌های مقاومت‌ویژه دوبعدی با روش کمترین مربعات توسط لوک و بارکر (۱۹۹۵) بررسی شد که آن را روش واهمامیخت کمترین مربعات (Least-Squares Deconvolution Method) نامیدند. در این روش برای محاسبه ماتریس حساسیت از محاسبه مشتق فرشت (Frechet Derivative) برای یک نیم‌فضای همگن استفاده می‌شود و از آنجایی که انتگرال‌های موجود در مسئله حل تحلیلی ساده‌ای ندارند، آن‌ها را به روش تربیع گاوسی (Gaussian Quadrature) حل می‌کنند (لوک، ۱۹۹۴). اولدنبِگ و لی (۱۹۹۹) اصلاحات بیشتری بر روی وارون‌سازی تعمیم‌یافته داده با هدف برآورد پارامتر منظم‌سازی و تخمین عمق بررسی برداشت داده‌های مقاومت‌ویژه انجام دادند. لوک و همکاران (۲۰۰۳) نتایج حاصل از انجام وارون‌سازی چندین مجموعه از داده‌های محاسبه‌ای و صحرایی مقاومت‌ویژه، با استفاده از هر دو روش هموار (کاربرد نرم دو) و بلوکی (کاربرد نرم یک) را با یکدیگر مقایسه و درباره مزایا و معایب هر یک از این روش‌ها بحث کردند. لوک و همکاران (۲۰۱۳) در یک بررسی مروری به تغییرات اخیر در آمایش‌های دوبعدی و سه‌بعدی روش

یک منبع نقطه‌ای پرداختند. نتایج این مطالعات منجر به پیشرفت‌های بسیار مهمی در مدل‌سازی پیشرو داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی شد. این مدل‌سازی داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی با استفاده از رویکرد تفاضل محدود به صورت مدل‌های ساده بلوکی و دلخواه دوبعدی و سه‌بعدی از ساختارهای پیچیده محیط زیرسطحی زمین انجام شد. مک گیلوری (۱۹۹۲) با تمرکز بر بهبود الگوریتم‌های عددی، حل صحیح‌تر و کارآمدتری از معادلات مسئله مدل‌سازی پیشرو داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی ارائه کرد. الگوریتم بهبودیافته مدل‌سازی پیشرو مبتنی بر گسسته‌سازی معادلات انتگرالی به روش تفاضل محدود، بر روی طیف وسیعی از داده‌های مقاومت‌ویژه الکتریکی سطحی و درون‌چاهی با آرایه‌های الکترودی مختلف و همچنین با در نظر گرفتن ساختارهای پیچیده رسانا و توپوگرافی در مدل‌سازی پیشرو، طراحی و اجرا شد.

باکوس و گیلبرت (۱۹۶۸) در یک مطالعه که از مطالعات اولیه در وارون‌سازی سیستم‌های بدوضع (Ill-Posed) محسوب می‌شود، نشان دادند که وارون‌سازی سیستم‌های بدوضع با استفاده از روش میانگین محلی بهینه (Optimally Localized Average Method) که به روش باکوس-گیلبرت نیز معروف است، امکان‌پذیر است. یک روش دیگر برای وارون‌سازی سیستم‌های معادلاتی بدوضع حاصل شده از داده‌های همراه با نوفه، کاربرد روش تجزیه مقادیر تکین (SVD) است (جکسون، ۱۹۷۲). کلربوت و مویر (۱۹۷۳) نشان دادند که برای انجام وارون‌سازی یک مجموعه داده که حاوی داده‌های پرت (Outliers) می‌باشد، استفاده از نرم یک از عدم‌برازش داده‌ها نسبت به کاربرد نرم دو کمترین مربعات، کارآمدتر و قابل‌قبول‌تر می‌باشد. وارون‌سازی به روش کمترین مربعات یک روش کاربردی و رایج به حساب می‌آید و از گذشته توسط محققان استفاده شده است مثل: (اسمیت و ووزوف، ۱۹۸۴؛ تریپ و همکاران، ۱۹۸۴). نتیجه تحقیقات نشان داده است که با استفاده از یک عامل منظم‌سازی مناسب،

پارک و وان (۱۹۹۱) با اصل هم‌پاسخی انجام دادند و دریافتند که حدود ۱۵ درصد از داده‌های آن‌ها در برداشت معکوس مشابه برداشت مستقیم نیست. لابرک و همکاران (۱۹۹۶) اثرات نوفه سیستماتیک را در روش وارون‌سازی اُکام (Occam's Inversion) برای توموگرافی مقاومت‌ویژه مورد بررسی قرار دادند و تأکید کردند که اگر نوفه کم تخمین زده شود، ممکن است برازش مناسبی بین داده‌های محاسبه‌ای و صحرایی اتفاق نیافتد و مدل حاصل ناهموار و دارای بی‌هنجاری‌های کاذب (Artifact) باشد. از طرف دیگر، نوفه تخمینی بیش از مقدار موجود، ممکن است وضوح تصویربرداری را به میزان قابل توجهی کاهش دهد (تصویر خیلی هموار است به عبارت دیگر جزئیات مدل نادیده گرفته شده است؛ یعنی برازش کمتر از حد صورت گرفته است). آن‌ها همچنین اشاره کردند که اندازه‌گیری هم‌پاسخی و تکرارپذیری معیاری از دقت هستند و نه معیاری از صحت اندازه‌گیری‌ها.

در روش هم‌پاسخی جابه‌جایی الکترودها به‌عنوان راهی برای محاسبه خطای سیستماتیک تلقی می‌شود؛ درحالی‌که روش تکرار این‌طور نیست. ژو و داهلین (۲۰۰۳) به بررسی اثر نوفه‌ها برای ۸ نوع از آرایه‌های روش مقاومت‌ویژه دوبعدی رایج پرداختند. آن‌ها تأیید کردند که گاهی نوفه‌ها برای برخی از الکترودهای به‌کار برده شده در اندازه‌گیری همبسته هستند. از مدل نوفه‌های گزارش‌شده، مشاهده شده است که سطوح نوفه در مطالعات درون‌چاهی در مقایسه با بیشتر آرایه‌های الکترودی غیردرون‌چاهی در اندازه‌گیری‌های ERT، بالاتر است که معمولاً ناشی از شرایط تماس الکترودی می‌باشد (ویلکینسون و همکاران، ۲۰۱۶). مجموع تحقیقات ذکرشده مربوط به توموگرافی به روش مقاومت‌ویژه هستند که به بررسی مدل‌سازی داده‌ها، بهبود مدل‌سازی‌ها، همچنین موضوع نوفه و تأثیر آن در فرایند وارون‌سازی داده‌های مقاومت‌ویژه با هدف ارائه مدلی قابل‌اعتماد از زمین تأکید دارند. بنابراین درک صحیح و

مقاومت‌ویژه پرداختند. آن‌ها تحولات چند سال گذشته را در چند حوزه خاص بررسی کردند و در نتیجه با توجه به روند تغییرات درباره نحوه پیش‌روی این حوزه‌ها در آینده بحث نمودند.

خطاهای اندازه‌گیری جزئی جدایی‌ناپذیر از مشاهدات علمی است. توصیف مناسب چنین خطاهایی منجر به مدل خروجی بهتر و در نهایت تفسیر دقیق‌تر می‌شود و در اندازه‌گیری‌ها امری ضروری است (تسو و همکاران، ۲۰۱۷). خطاهای اندازه‌گیری ممکن است تصادفی یا سیستماتیک باشند. در روش‌های وارون ژئوفیزیکی متداول، خطاهای اندازه‌گیری مستقل و تصادفی فرض می‌شوند. خطاهای مدل‌سازی معمولاً شامل عدم‌دقت مدل پیشرو (مثلاً به‌دلیل گسسته‌سازی) و مناسب نبودن مدل پیشرو (به‌عنوان مثال حل یک مسئله سه‌بعدی با استفاده از یک مدل دوبعدی) می‌باشند. خطاهای مدل‌سازی را می‌توان به‌وسیله مقایسه داده‌های پیشرو یک دامنه مشخص با راه‌حل‌های تحلیلی، بررسی کرد (تسو و همکاران، ۲۰۱۷). دست‌یابی به مدل توزیع مکانی مقاومت‌ویژه زیرسطح زمین با استفاده از مجموعه کوچکی از داده‌های صحرایی که همراه با نوفه هستند، یک امر سخت و چالش‌برانگیز است. تخمین سطح نوفه در مدل‌سازی‌های وارون از آن جهت دارای اهمیت است که ارزیابی صحیح از میزان خطا در داده‌های مشاهده‌ای امکان تعریف یک ضابطه توقف مناسب در حین حل مسئله وارون را فراهم می‌آورد و مانع از برازش بیش از حد یا کمتر حد از مدل به داده‌ها می‌شود. به‌عبارت‌دیگر تخمین نوفه بیشتر از مقدار واقعی آن باعث حذف جزئیاتی از مدل زمین و تخمینی کمتر از مقدار واقعی منجر به ایجاد آنومالی‌های ناخواسته می‌شود. رهیافت‌های مختلفی در رابطه با برآورد سطح نوفه در داده‌های ERT وجود دارد از جمله می‌توان به روش برانبارش (Stacking Method)، روش خطای تکرارپذیری (Repeatability Error Method) و روش خطای هم‌پاسخی (Reciprocity Theory) اشاره کرد. ارزیابی خطاهای تصادفی به‌کمک آرایه قطبی-قطبی را

(توزیعی دلخواه از مقادیر رسانندگی محیط زیر سطحی)، مدل‌سازی به روش عددی انجام می‌شود. حل‌های عددی در ژئوالکتریک از همان اصول حل معادلات دیفرانسیل جزئی بهره می‌برند. رابطه بنیادی برای پارامتر فیزیکی مورد بررسی در برداشت داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی قانون اهم است که قوانین حاکم بر جریان الکتریکی تریق شده به درون زمین را بیان می‌کند.

با به کارگیری قانون اهم برای محیط رسانا ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) و استفاده از اصل پایستگی بار ($\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial q}{\partial t}$) برای حجم مشخص و استفاده از معادله پیوستگی، رابطه زیر نتیجه می‌شود (دی و موریسون، ۱۹۷۹ا).

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\partial q}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (1)$$

به طوری که σ رسانندگی بر حسب زمینس بر متر (sm^{-1}) و E میدان الکتریکی بر حسب ولت بر متر (Vm^{-1}) و J چگالی جریان بر حسب آمپر بر مترمربع (Am^{-2}) و q چگالی بار الکتریکی و δ تابع دلتای دیراک، $r(x, y, z)$ فاصله شعاعی محل چشمه نقطه‌ای از سلول مورد نظر و $r_s(x_s, y_s, z_s)$ موقعیت چشمه نقطه‌ای است. با جایگزینی $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ در معادله (۱) رابطه زیر ارائه می‌شود.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = -I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (2)$$

به طوری که I شدت جریان الکتریکی و Φ پتانسیل الکتریکی را نشان می‌دهد. همچنین می‌توان نوشت (دی و موریسون، ۱۹۷۹ا).

$$\nabla \cdot (\sigma(x, y, z) \nabla \Phi(x, y, z)) = -I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s) \quad (3)$$

معادله فوق معرف توزیع پتانسیل محیط زیرسطحی زمین در اثر وجود جریان الکتریکی یک منبع نقطه‌ای است. روش‌های زیادی برای حل این معادله مهم توسعه داده شده است. این معادله، معادله حاکم بر مسئله مدل‌سازی پیشرو داده‌های مقاومت ویژه می‌باشد. با هدف حفظ ویژگی‌های سه بعدی تریق جریان الکتریکی، توزیع پتانسیل در یک محیط دو و نیم بعدی (2.5D) از طریق محاسبه تبدیل فوریه معادله توزیع پتانسیل الکتریکی (معادله ۳) بر حسب عدد موج‌های مختلف در جهت عمود

دقیق در مورد کیفیت داده یا سطح نوفه داده‌ها برای انجام مدل‌سازی وارون موفق اندازه‌گیری‌های توموگرافی مقاومت ویژه بسیار مهم است و می‌بایست به میزان خطای داده‌ها و تأثیرات آن بر نتایج توموگرافی توجه زیادی شود.

با توجه به اهمیت موضوع، در این مقاله ابتدا اثر تخمین سطح نوفه با استفاده از ماتریس وزنی داده‌ها در نتایج مدل‌سازی وارون داده‌های مصنوعی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد، سپس کارایی دو روش برآورد سطح نوفه یعنی روش خطای برانبارش و خطای هم‌پاسخی بر روی نتایج مدل‌سازی وارون داده‌های صحرائی بررسی می‌شود. ادامه مقاله شامل موارد زیر می‌شود: در بخش ۲ تئوری مدل‌سازی پیشرو و وارون توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی همراه با تعریف روش‌های مختلف برآورد سطح نوفه ارائه می‌شود. بخش ۳ شامل نتایج عددی حاصل از مدل‌سازی وارون داده‌های مصنوعی و داده‌های صحرائی و بررسی تأثیر استفاده از تخمین سطح نوفه در قالب ماتریس وزنی داده‌ها می‌شود. در نهایت بخش ۴ نتایج ای مطالعه به صورت خلاصه ارائه می‌شود.

۲. تئوری مسئله

در این بخش ابتدا تئوری مدل‌سازی پیشرو در چارچوب رهیافت تفاضل محدود و وارون توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی با استفاده از الگوریتم وارون‌سازی اکام ارائه می‌شود. سپس روش‌های مختلف برآورد نوفه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که تمام مثال‌های عددی ارائه شده در مقاله در قالب توابع مختلف در محیط متلب (MATLAB) توسط نویسندگان نوشته شده است.

۲-۱. حل مسئله پیشرو

مدل‌سازی پیشرو نقشی غیرقابل انکار در ژئوفیزیک و توسعه روش‌های وارون‌سازی دارد. مدل‌سازی پیشرو دو بعدی تنها برای حالت‌های خاصی می‌تواند به صورت تحلیلی انجام شود و در حالت‌های عمومی دو یا سه بعدی

همچنین با توجه به اینکه ماتریس C تنها به ویژگی‌های هندسی آرایه الکترودی و توزیع ویژگی‌های فیزیکی زیرسطحی وابسته است، لذا وارون ماتریس C صرفاً یک‌بار برای موقعیت‌های مختلف الکترودهای جریان محاسبه می‌شود. این رهیافت باعث کاهش چشمگیر محاسبات حل مدل پیشرو می‌شود. در مرحله آخر پتانسیل به‌دست‌آمده از طریق رابطه عکس تبدیل فوریه (معادله ۸) به حوزه مکان منتقل می‌شود.

$$\Phi(x, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}(x, K_y, z) \cos(K_y y) dK_y \quad (۸)$$

۲-۲. حل مسئله وارون

بر اساس رابطه (۳) به‌عنوان معادله پیشرو توزیع پتانسیل الکتریکی، رابطه بین داده و پارامترهای مدل به‌صورت غیرخطی و به شکل کلی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{G}(\mathbf{m}_j)_i + \mathbf{e}_i \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (۹)$$

که بردار \mathbf{e}_i نشان دهنده خطا است.

هدف ما حل معادله $\mathbf{d}_i = \mathbf{G}(\mathbf{m}_j)$ در حالت غیرخطی و به‌دست آوردن پارامترهای مدل (\mathbf{m}_j) است که باید مجموع مربعات خطا $(\|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m e_i^2)$ کمینه شود؛ بنابراین تابع هدف به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi(\mathbf{d}_i, \mathbf{m}_j) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{d}_i^{\text{obs}} - \mathbf{G}(\mathbf{m}_j)_i]^2 \quad (۱۰)$$

که در آن $i = (1, 2, \dots, n)$ و $j = (1, 2, \dots, m)$ می‌باشد. با توجه به غیرخطی بودن عملگر پیشرو $\mathbf{G}(\mathbf{m})$ ، ابتدا با کاربرد بسط تیلور روابط خطی می‌شوند. برای خطی‌سازی روابط، ابتدا یک مدل اولیه دلخواه \mathbf{m}_0 از بردار پارامتر مدل‌ها حدس زده می‌شود، سپس عملگر پیشرو $\mathbf{G}(\mathbf{m})$ با کاربرد بسط سری تیلور آن حول مدل اولیه دلخواه \mathbf{m}_0 ، به‌صورت معادله (۱۱) خطی می‌شود.

$$\mathbf{G}(\mathbf{m}_j) = \mathbf{G}(\mathbf{m}_0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right) \Delta \mathbf{m}_j \quad (۱۱)$$

مقدار $\Delta \mathbf{m}_j = (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)_j$ در بسط تیلور، کوچک است و هرچه به توان برسد این مقدار کوچک‌تر هم می‌شود؛ بنابراین از جملات مرتبه دوم به بالا صرف‌نظر

بر امتداد آنومالی (راستای y) محاسبه می‌شود. تبدیل فوریه پتانسیل الکتریکی از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\tilde{\Phi}(x, K_y, z) = \int_0^{\infty} \Phi(x, y, z) \cos(K_y y) dy \quad (۴)$$

به‌طوری‌که $\tilde{\Phi}(x, K_y, z)$ توزیع پتانسیل الکتریکی در فضای فوریه (فضای عدد موج) برحسب عدد موج‌های K_y مختلف در راستای y را نشان می‌دهد.

با تعریف شرایط مرزی ترکیبی (دی و موریسون، ۱۹۷۹ا).

$$\frac{\partial}{\partial n} \tilde{\Phi}(x, K_y, z) + \alpha \tilde{\Phi}(x, K_y, z) = 0 \quad (۵)$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ مشتق نرمال خارجی است و فرض می‌کنیم که منبع با مختصات (x_s, y_s, z_s) منطبق بر یک‌گره است. همچنین ضریب α ناشی از رفتار مجانبی پتانسیل در فاصله دور از چشمه جریان الکتریکی است. در نهایت پتانسیل تبدیل شده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, z) + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} + K_y^2 \sigma(x, z) \tilde{\Phi} - \frac{\partial}{\partial z} \sigma(x, z) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = \frac{1}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \quad (۶)$$

معادله فوق برای یک محیط دوبعدی و با اعمال شرایط مرزی ترکیبی (رابطه ۵) حل می‌شود. برای این منظور، محیط زیرسطحی بر اساس بلوک‌های مختلف گسسته شده و سپس مشتقات جزئی موجود توسط روابط تفاضل محدود جایگزین می‌شود. در نتیجه مسئله پیشرو در فضای فوریه (عدد موج) به‌صورت یک دستگاه معادلات خطی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{C} \tilde{\Phi}(x, K_y, z) = \mathbf{s} \quad (۷)$$

به‌طوری‌که $\tilde{\Phi}$ بردار پتانسیل در فضای فوریه، \mathbf{s} بردار مربوط به چشمه و \mathbf{C} ماتریس جفت‌شدگی که به پارامترهای برداشت و توزیع رسانندگی محیط زیرسطحی وابسته است. ماتریس \mathbf{C} تَنک و تنها درایه‌های قطر آن شامل مقادیر غیر صفر است. از این ویژگی برای افزایش سرعت محاسبه وارون ماتریس \mathbf{C} استفاده می‌شود.

ماتریس حساسیت (ژاکوبین) را ایجاد می‌کنند. برای زمین‌های همگن این تابع از طریق راه‌حل تحلیلی با مشتق فرجت (Frechet Derivative) حل می‌شود ولی برای زمین‌های ناهمگن، حل عددی می‌بایست به کار گرفته شود. هرچه مقدار تابع حساسیت بیشتر باشد، تأثیر محیط زیرسطحی بر پتانسیل اندازه‌گیری شده توسط آرایه الکتریکی بیشتر است. به عبارت دیگر، از طریق مقایسه مقادیر مشتق برای هر داده به صورت جداگانه با توجه به همه پارامترهای مدل، می‌توان مفهومی را در مورد چگونگی تفکیک خواص فیزیکی از یکدیگر ارائه کرد. تجزیه و تحلیل حساسیت امکان بهینه‌سازی طراحی میدانی را فراهم می‌کند. ابعاد ماتریس حساسیت به اندازه فضای مدل و تعداد جابه‌جایی الکتروود بستگی دارد به طوری که هر عنصر ماتریس فقط رسانایی همسایه سلول مربوطه را دارد و برای هر سلول مدل تمام جریان منابع باید در نظر گرفته شوند که منجر به حل یک مسئله پیشرو می‌شوند (قناتی و فلاح‌صفری، ۲۰۲۲). در این مطالعه، برای حل مسئله وارون از یک رویکرد عددی تفاضل محدود برای محاسبه ماتریس عملگر پیشرو در مدل‌سازی مقاومت ویژه الکتریکی دویعدی استفاده شده است (برای جزئیات بیشتر به ضمیمه (الف) مراجعه شود).

با توجه به بد وضع بودن مسئله یعنی رتبه ناقص بودن ماتریس J نیاز به منظم سازی مسئله از طریق اضافه کردن جمله منظم‌ساز (ϕ_m) به تابع هدف و در نهایت کمینه‌سازی تابع هدف جدید وجود دارد. در این حالت تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\arg \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} (\psi(\mathbf{m}, \beta)) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \{\phi_m + \beta^{-1} \phi_d\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} (\psi(\mathbf{m}, \beta)) &= \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \left[(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr})^T \mathbf{W}_m^T \mathbf{W}_m (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{apr}) \right. \\ &+ \beta^{-1} \left\{ (\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))^T \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d (\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m})) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

می‌کنیم. با توجه به معادلات (۱۰) و (۱۱)، تابع هدف مسئله وارون‌سازی به صورت معادله (۱۲) بازنویسی می‌شود.

$$\phi_d(\mathbf{d}_i, \mathbf{m}_j) = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{d}_i^{obs} - \mathbf{G}(\mathbf{m}_0) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{m}_0)_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right) \Delta \mathbf{m}_j \right]^2 \quad (12)$$

به منظور برآورد پارامترهای مدل مسئله وارون‌سازی با کاربرد روش کمترین مربعات با این شرط که تابع عدم‌برازش باید کمینه شود، با مشتق‌گیری از تابع هدف معادله (۱۲) نسبت به بردار تغییر پارامتر مدل $(\Delta \mathbf{m}_j)$ و برابر صفر قرار دادن آن، معادله (۱۳) باید برقرار باشد.

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \Delta \mathbf{m}_j} = 0 \quad (13)$$

که در نهایت برای انجام وارون‌سازی به روش کمترین مربعات، از معادله (۱۴) که یک معادله خطی است، بهره می‌بریم.

$$\Delta \mathbf{d}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{m}_j} \right) \Delta \mathbf{m}_j = \mathbf{J} \Delta \mathbf{m}_j \quad (14)$$

که در آن ماتریس J با $\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{m}_j}$ نشان داده می‌شود و ماتریس ژاکوبین یا ماتریس حساسیت نامیده می‌شود. ماتریس حساسیت به صورت معادله (۱۵) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \mathbf{m}_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{m}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial \mathbf{m}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{G}_m}{\partial \mathbf{m}_1} & \frac{\partial \mathbf{G}_m}{\partial \mathbf{m}_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{G}_m}{\partial \mathbf{m}_n} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ماتریس حساسیت بخشی جدایی‌ناپذیر از هر فرایند وارون‌سازی غیرخطی است. مقادیر حساسیت نشان‌دهنده تغییر در مقاومت ویژه ظاهری (پتانسیل الکتریکی) ناشی از تغییر در مقاومت ویژه زیرسطحی (توزیع رسانایی) است. این مقادیر پیوندی بین داده‌ها و بردار مدل ایجاد می‌کنند. وارون‌سازی توموگرافی مقاومت ویژه الکتریکی تصویری از توزیع رسانایی زیرسطحی در بررسی‌های نزدیک به سطح را ارائه می‌دهد. حل وارون داده‌های مقاومت ویژه نیاز به محاسبه تک‌تک مقادیر حساسیت دارد که عناصر

اندازه‌گیری یا فرض شده بسیار حساس باشد پس لازم است قبل از اعمال الگوریتم‌های پردازشی بر روی داده‌ها، ماهیت و ویژگی‌های آماری نوفه‌ها بررسی شوند. در فرایند اندازه‌گیری صحرایی نوفه‌های ممکن است تصادفی یا سیستماتیک باشند. در روش‌های وارون ژئوفیزیکی، فرض می‌شود که نوفه اندازه‌گیری ناهمبسته و تصادفی است. در زمینه وارون‌سازی، کل نوفه مربوط به داده، توسط ریشه دوم مجموع مربعات «نوفه‌های مدل‌سازی» و «نوفه‌های اندازه‌گیری» داده می‌شود. منابع نوفه‌های مدل‌سازی شامل عدم‌دقت مدل پیشرو است (مثل خطای گسسته‌سازی و تقریب‌هایی که در حل فیزیک مسئله در نظر گرفته می‌شود). معمولاً نوفه‌های مدل‌سازی (البته برای مدل‌های ساده مثل همگن و لایه‌ای) به‌خوبی قابل‌اندازه‌گیری هستند زیرا می‌توانند با مقایسه داده‌های مدل‌سازی پیشرو در یک دامنه همگن با راه‌حل‌های تحلیلی مقایسه شوند. نوفه‌های اندازه‌گیری می‌تواند نقش محوری در وارون‌سازی ژئوفیزیکی از جمله وارون‌سازی داده‌های ERT ایفا کند. اغلب در مدل‌های وارون قبل از وارون‌سازی، یک مدل آماری از نوفه‌ها را اعمال یا فرض می‌کنیم. تخمین نوفه بیشتر از مقدار واقعی آن باعث حذف جزئیاتی از مدل زمین یا برازش کمتر از حد (Under-Fitting) و همچنین تخمینی کمتر از مقدار واقعی منجر به ایجاد بی‌هنجاری‌های کاذب (Artifact) و یا (Over-Fitting) می‌شود. در هر دو مورد گفته شده مدلی که از وارون‌سازی داده‌ها حاصل می‌شود دارای عدم‌قطعیتی بالا است. همچنین تقریب نوفه‌های اندازه‌گیری بر روی مقدار وزن اعمال شده در هر یک از داده‌ها و نیز نحوه همگرایی مسئله وارون تأثیرگذار است. با بهبود در برآورد نوفه‌های اندازه‌گیری و اعمال آن به مسئله می‌توان یک ارزیابی بهتر از مدل زمین مورد بررسی را ارائه داد. هدف نهایی در وارون‌سازی داده‌ها، رسیدن به مدلی نزدیک‌تر به مدل واقعی زمین است که به کمک آن بتوان تفسیرهای بهتر و قابل‌اطمینان‌تری داشت؛ بنابراین تقریب سطح نوفه در رسیدن به مدلی معنادار از لحاظ

با استفاده از بسط تیلور تابع $G(\mathbf{m})$ (معادله ۱۱) و رابطه (۱۶) تابع هدف به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\psi(\delta\mathbf{m}, \beta) = \arg \min_{\delta\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times 1}} \{ \beta^{-1} \|\mathbf{W}_d(\delta\mathbf{d} - \mathbf{J}\delta\mathbf{m})\|_2^2 + \|\mathbf{W}_m(\delta\mathbf{m})\|_2^2 \} \quad (18)$$

به طوری که $\delta\mathbf{d} = (\log \mathbf{d} - \log \mathbf{G}(\mathbf{m}))$ تعریف می‌شود. با حل تابع هدف (معادله ۱۸)، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{m}^{k+1} &= \mathcal{J}^k \\ &\times \left\{ (\mathbf{J}^T(\mathbf{m}^k) \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d \mathbf{J}(\mathbf{m}^k) + \beta \mathbf{W}_m^T \mathbf{W}_m)^{-1} \times \mathbf{J}^T(\mathbf{m}^k) \mathbf{W}_d^T \mathbf{W}_d (\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}^k)) - \beta \mathbf{W}_m^T \mathbf{W}_m (\mathbf{m}^k - \mathbf{m}_{apr}) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

به طوری که \mathcal{J} ماتریس ژاکوبین، \mathbf{W}_d ماتریس وزنی داده‌ها که شامل عکس‌سطح نوفه هر داده می‌شود، \mathbf{W}_m ماتریس هموارساز، β پارامتر منظم‌سازی، $\delta\mathbf{m}^{k+1}$ پارامتر اغتشاش یا جهت جستجو (Search Direction) و \mathcal{J}^k طول گام (Step Length) با مقادیر مثبت در بازه $(0, 1]$ در k امین تکرار و \mathbf{m}_{apr} اطلاعات پیشین در رابطه با مدل \mathbf{m} است. فرآیند کمینه‌سازی به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر منظم‌سازی β انجام می‌گیرد با هدف انتخاب مقداری از β به طوری که منجر به برآورد هموارترین مدل در حالی که عدم برازش $\Phi_d = \|\mathbf{W}_d(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\mathbf{m}))\|_2 \leq 1$ در سطح دلخواه حفظ می‌شود (فلاح صفری و قناتی، ۲۰۲۲).

۲-۳. روش‌های تخمین نوفه

نوفه‌های اندازه‌گیری جزئی جدایی‌ناپذیر از مشاهدات علمی هستند و شناخت و آگاهی مناسب از وجود چنین نوفه‌هایی برای استفاده از داده‌های اندازه‌گیری امری ضروری است. مسائل موجود در وارون‌سازی داده‌های مقاومت ویژه الکتریکی معمولاً بدوضع هستند و به دلیل عدم‌پایداری این مسائل، تغییر کوچک ایجاد شده در داده‌ها باعث به وجود آمدن تغییرات بسیار زیادی در نتایج می‌شود؛ یعنی نتایج وارون‌سازی می‌تواند به سطوح نوفه

روش هم‌پاسخی می‌تواند برای پیدا کردن مقادیر مقاومت ویژه نزدیک‌تر به واقعیت زمین، یک روش مناسب باشد. اصول روش هم‌پاسخی بسیار ساده است؛ اگر در یک مدار الکتریکی (ایده‌آل) با مولد جریان مستقیم، جای منبع جریان و ولت‌متر را عوض کنیم، عدد روی ولت‌متر تغییر نمی‌کند و دو مدار معادل هم هستند. در نتیجه این اصل، زمانی که بررسی در زمینی باشد که قانون اهم در آن صادق است، در شرایط عدم حضور نوفه، اگر جای فرستنده (منبع) و گیرنده را عوض کنیم، مقدار اختلاف پتانسیل اندازه‌گیری شده تغییری نمی‌کند؛ بنابراین اندازه‌گیری‌های مستقیم و معکوس (اندازه‌گیری معکوس یعنی اندازه‌گیری بعد از جابه‌جا کردن فرستنده و گیرنده انجام می‌شود). باید مقادیر یکسانی را ارائه دهند. از آنجایی که در برداشت‌های صحرائی شرایط ایده‌آل وجود ندارد و به دلیل نوفه، تفاوت بین این دو اندازه‌گیری صفر نیست و این اختلاف تخمینی از سطح نوفه را به ما می‌دهد. بنا به آنچه گفته شد، بعد از اندازه‌گیری مستقیم، جای الکترودهای جریان و پتانسیل را عوض می‌کنیم. بنابراین اگر $R_f = \frac{\Delta V_f}{I}$ مقاومت انتقالی مستقیم (Forward Transfer Resistance) و $R_r = \frac{\Delta V_r}{I}$ مقاومت انتقالی معکوس (Reverse Transfer Resistance) باشد، مقاومت انتقالی متوسط از رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$|R| = \frac{|R_f| + |R_r|}{2} \quad (21)$$

در نهایت سطح نوفه هر داده به صورت زیر تخمین زده می‌شود.

$$|e| = \frac{||R_f| - |R_r||}{2} \quad (22)$$

در این مقاله از دو روش مذکور برای تخمین سطح نوفه و اعمال ماتریس وزنی داده‌ها در وارون سازی داده‌های واقعی استفاده می‌شود. هرچند اعمال روش‌های فوق در رابطه با داده‌های مصنوعی امکان‌پذیر نیست (به دلیل عدم وجود نوفه‌های طبیعی در برداشت صحرائی) ولی با توجه معلوم بودن سطح نوفه امکان برآورد ماتریس وزنی داده‌ها

فیزیکی دارای اهمیت است. یکی از روش‌های قدیمی در تخمین و کاهش اثر خطا در داده‌های برداشتی، روش برانبارش است که برای تخمین سطح نوفه تصادفی روش مناسبی است. در این روش تعدادی از اندازه‌گیری‌های هم‌مکان روی هم انباشت می‌شوند و نتیجه این عمل علاوه بر اینکه به بهبود کلی مجموعه داده‌ها منجر می‌شود، به تخمین سطح نوفه موجود در مجموعه داده‌ها هم می‌انجامد. همچنین مؤلفه‌های آماری داده‌های برداشت شده مانند انحراف معیار به عنوان برآوردی از سطح نوفه داده محاسبه می‌شود. در برداشت داده‌های تجربی این نکته وجود دارد که هر مشاهده (d_i) مربوط به مجموعه یکسانی از برداشت‌ها است. در صورتی که برداشت داده‌ها برای چندین بار با شرایط یکسان انجام شوند، معمولاً مقادیر مشاهده شده متفاوت‌اند. این اختلاف در یک داده ممکن است به دلیل خطای دستگاهی یا خطای ناشی از کاربر دستگاه و شرایط محیطی باشد. توزیع این مقادیر برای یک برداشت خاص یک توزیع آماری از متغیر خاص بیان می‌کند. خطاهای برانبارش به وسیله میانگین‌گیری انباشته‌ها (که این کار توسط دستگاه‌های اندازه‌گیری ERT هم‌زمان با اندازه‌گیری مقادیر مقاومت ویژه جمع‌آوری می‌شود) حاصل می‌شوند. بنابراین سطح نوفه تخمینی در هر ایستگاه اندازه‌گیری به ازای n تکرار برداشت از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$e_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (d_i^l - \bar{d}^i)^2 \quad (20)$$

$$i = (1, \dots, n) \quad l = (1, \dots, m)$$

به طوری که i نشان دهنده تعداد تکرار اندازه‌گیری در هر ایستگاه، l تعداد ایستگاه‌های اندازه‌گیری در یک پروفیل و \bar{d}^i مؤید میانگین داده‌های تکرار شده در یک اندازه‌گیری است. با استفاده از این رابطه سطح نوفه داده اندازه‌گیری شده در هر ایستگاه برآورد می‌شود. هابرجام (۱۹۶۷) در یک نوشته کوتاه از اولین کسانی بود که تئوری هم‌پاسخی (Reciprocity Theory) در برداشت ژئوالکتریکی را معرفی و بررسی کرد. او اذعان داشت که

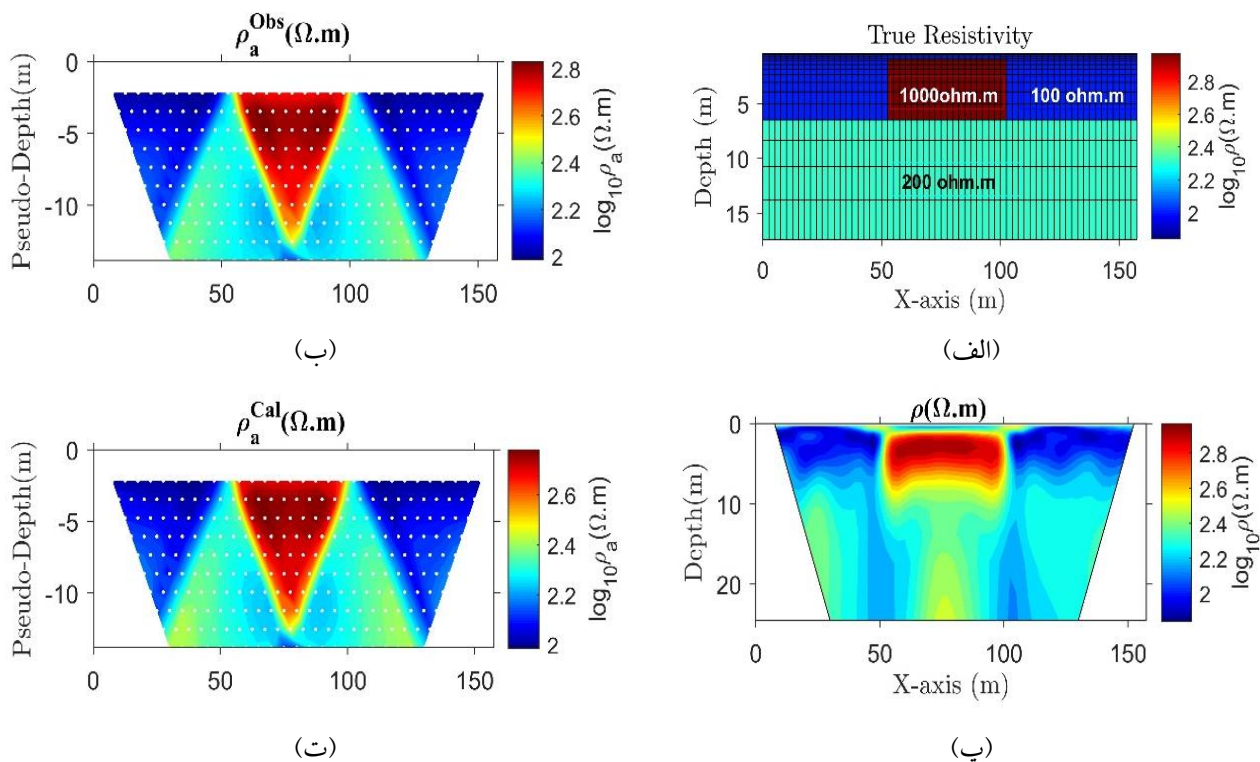
در حین وارون سازی وجود دارد.

۳. مثال‌های عددی

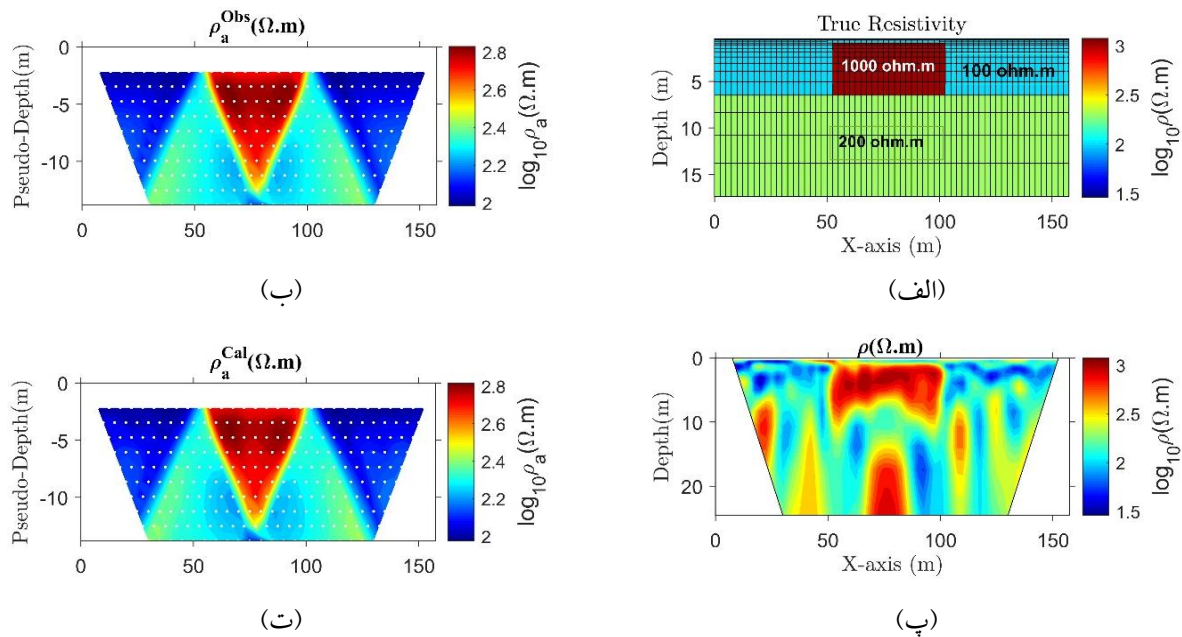
در این بخش ابتدا نتایج وارون سازی داده‌های مصنوعی با در نظر گرفتن سطح نوفه اضافه شده به داده‌های مشاهده‌ای و از طریق اعمال ماتریس وزنی (W_d) به تابع هدف و بدون در نظر گرفتن ماتریس وزنی داده‌ها در تابع هدف مورد بررسی قرار می‌گیرد. گام دوم شامل ارزیابی اثر تخمین نوفه در مدل‌سازی وارون داده‌های صحرائی با دو روش خطای برانبارش و خطای هم‌پاسخی می‌باشد.

۱-۳. داده‌های مصنوعی

ارزیابی بر روی داده‌های مصنوعی شامل یک مدل



شکل ۱. نتایج وارون سازی مدل مصنوعی اول با اعمال سطح نوفه در تابع هدف. (الف) مدل مصنوعی با سه محیط متفاوت از لحاظ مقاومت ویژه الکتریکی ۱۰۰۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ اهم‌متر، (ب) شبه مقطع داده‌های مشاهده‌ای حاصل از مدل‌سازی پیشرو و آغشته به نوفه گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار به اندازه ۳ درصد اندازه داده‌ها، (پ) مقطع مقاومت ویژه حاصل از وارون سازی، (ت) شبه مقطع داده‌های محاسباتی متناسب با مدل به‌دست‌آمده از وارون سازی.



شکل ۲. نتایج وارون سازی مدل مصنوعی اول بدون اعمال سطح نوفه در تابع هدف. الف) مدل مصنوعی با سه محیط متفاوت از لحاظ مقاومت ویژه الکتریکی ۱۰۰۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ اهم‌متر، ب) شبه مقطع داده‌های مشاهده‌ای حاصل از مدل‌سازی پیشرو و آغشته به نوفه گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار به اندازه ۳ درصد اندازه داده‌ها، پ) مقطع مقاومت ویژه حاصل از وارون سازی، ت) شبه مقطع داده‌های محاسباتی متناسب با مدل به دست آمده از وارون سازی.

ارزیابی مقادیر χ^2 در حلقه خارجی به‌عنوان یکی از شروط توقف فرآیند وارون‌سازی، حداکثر تعداد تکرار نیز به‌عنوان یکی دیگر از شروط توقف در نظر گرفته می‌شود. شکل (۱) و (۲) به ترتیب مدل مصنوعی اول همراه با شبه مقطع مقاومت ویژه الکتریکی و مقطع منتج شده از حل مسئله وارون با در نظر رفتن ماتریس وزنی داده‌ها W_d و بدون اعمال W_d در فرآیند وارون‌سازی را نشان می‌دهند. مقایسه نتایج وارون‌سازی مؤید این مطلب است که آگاهی از سطح داده‌های مشاهده‌ای به تعریف یک ضابطه توقف مناسب کمک می‌کند که این امر منجر به عدم برازش بیش از حد یا کمتر از حد داده‌های محاسباتی به داده‌های مشاهده‌ای می‌شود. در واقع برازش در حد سطح نوفه داده‌ها مانع از ایجاد ساختارهای کاذب و یا حذف جزئیات مهم در مدل نهایی می‌شود. مقاطع وارون نمایش داده در شکل ۱-پ نشان می‌دهد که اعمال سطح نوفه در قالب ماتریس وزنی منجر به برآورد بهتری از مدل زیر سطحی نسبت به عدم تعریف ماتریس وزنی در حل مسئله

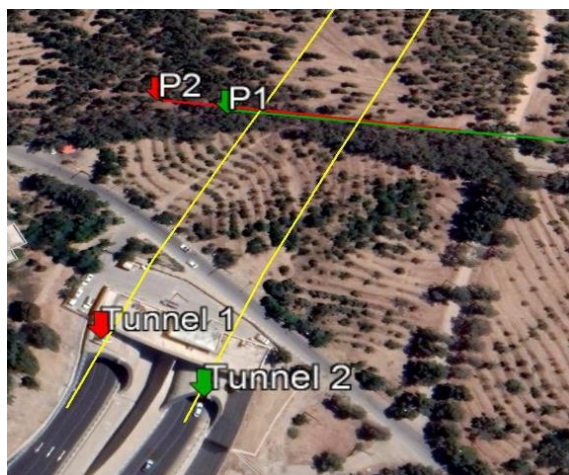
مقادیر مقاومت ویژه ظاهری در مدل مصنوعی با استفاده از آرایه دوقطبی-دوقطبی و کمترین فاصله الکترودی ۵ متر و تعداد پرش ۱۰ شبیه‌سازی شده است. تعداد داده‌ها در این پروفیل برابر ۲۵۵ می‌باشد. حین فرایند وارون‌سازی، ضابطه توقف بر اساس میزان تغییرات پارامترهای مدل در هر تکرار نسبت به تکرار قبلی ($\|m^k - m^{k-1}\|_2 \leq \epsilon$) و نیز تغییرات خطای RMS تعریف می‌شود. وارون‌سازی بر اساس تعریف قیود هموارسازی یعنی اجرای الگوریتم اُکام انجام می‌گیرد. در واقع الگوریتم اُکام در دو فاز مختلف به‌طوری که در فاز اول سعی در کمینه کردن تابع هدف در سطح تعریف شده است ($\chi^2 \leq 1$) و بعد از تحقق گام اول در گام دوم سعی در هموارسازی مدل از طریق انتخاب بزرگ‌ترین پارامتر منظم‌سازی است. در واقع الگوریتم در دو حلقه داخلی و خارجی اجرا می‌شود؛ به‌طوری که حلقه داخلی شامل اجرای الگوریتم به ازای طیفی از پارامترهای منظم‌سازی می‌باشد و حلقه خارجی شامل بررسی شرط برازش یعنی $\chi^2 \leq 1$ است. علاوه بر

رو لایه نیز بین ۵ تا ۶ متر متغیر است. شکل ۳، امتداد مسیر تونل و نیز موقعیت پروفیل‌های (P1 و P2) برداشت شده را نشان می‌دهد. در تونل شهدای غزه، داده برداری با دستگاه RESECS از شرکت DMT آلمان و با آرایش الکترودی و نر و با فاصله الکترودی ۲ متر و تعداد پرش حداکثر ۱۵ انجام شد. به دلیل اینکه برداشت داده‌ها در منطقه شهری و همراه با نوفه‌های محیطی همراه بود، آرایه و نر به خاطر نسبت سیگنال به نوفه بالا انتخاب شد. همچنین این آرایه عمق نفوذ بالاتری نسبت به آرایه متقارن دوقطبی-دوقطبی دارد (ادوارد، ۱۹۷۷). برداشت در دو پروفیل ۱ و ۲ با طول تقریبی ۱۰۰ متر صورت گرفت. پروفیل ۱ با هدف آشکارسازی تونل ۲ و پروفیل ۲ نیز برای آشکارسازی تونل ۱ چیده شد. با کمک دستگاه RESECS، هم‌زمان با برداشت داده، خطای بر انبارش را نیز ثبت کردیم؛ همچنین برای بررسی خطای هم‌پاسخی اندازه‌گیری مستقیم و معکوس را انجام دادیم؛ یعنی جای منبع و گیرنده را عوض کرده و دوباره به اندازه‌گیری پرداختیم (در دستگاه‌های چندکاناله و اتوماتیک نیازی به جابه‌جایی فیزیکی نیست). بر اساس اندازه‌گیری‌های مستقیم و معکوس، در مجموع تعداد ۷۲۸ داده برداشت شد. همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌کنید، امتداد خطوط برداشت به تونل اول و دوم تقریباً عمود است.

وارون می‌شود. در واقع همان‌طور که دیده می‌شود در شکل ۲-پ وجود آنومالی‌های کاذب در جوانب و مرکز مقطع در نتیجه برازش بیش از حد داده‌های مشاهده‌ای به داده‌های محاسباتی است. این در حالی است که این آنومالی‌های کاذب در مقطع شکل ۱-پ وجود ندارد.

۳-۲. داده‌های واقعی

پس از ارزیابی الگوریتم وارون‌سازی پیشنهادی بر روی مدل مصنوعی و نیز بررسی اثر وارد کردن سطح نوفه به مسئله وارون، در این قسمت از پژوهش، عملکرد کدهای نوشته شده بر روی داده‌های واقعی و نیز روش‌های مختلف تخمین نوفه و بررسی تأثیر هر روش در حل مسئله وارون و در نتیجه مدل نهایی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. داده‌های صحرائی بر روی تونل شهدای غزه و با آرایه‌های الکترودی و نر برداشت شده است. تونل شهدای غزه از دو رشته تونل مجاور یکدیگر (دوقلو) تشکیل شده است. این تونل در امتداد بزرگراه حکیم است که در محدوده پارک چیتگر ادامه می‌یابد و طول تقریبی آن دو کیلومتر می‌باشد. طول این دو تونل حدود ۲۱۶۳ متر (عرض حفاری ۱۸ متر و ارتفاع اولیه ۱۲/۵۷ متر) است. البته بعد از خاک‌ریزی در کف تونل و احداث جاده ارتفاع تونل به حدود ۵ متر می‌رسد. همچنین ضخامت



شکل ۳. تصویر هوایی از امتداد تونل‌ها (خطوط زرد) و موقعیت پروفیل‌های P1 (خط سبز) و P2 (خط قرمز) تقریباً عمود بر امتداد مسیر تونل‌ها. برداشت پروفیل P1 و پروفیل P2 به ترتیب با هدف آشکارسازی موقعیت تونل ۲ (دهانه سمت راست) و موقعیت تونل ۱ (دهانه سمت چپ) برداشت شده است.

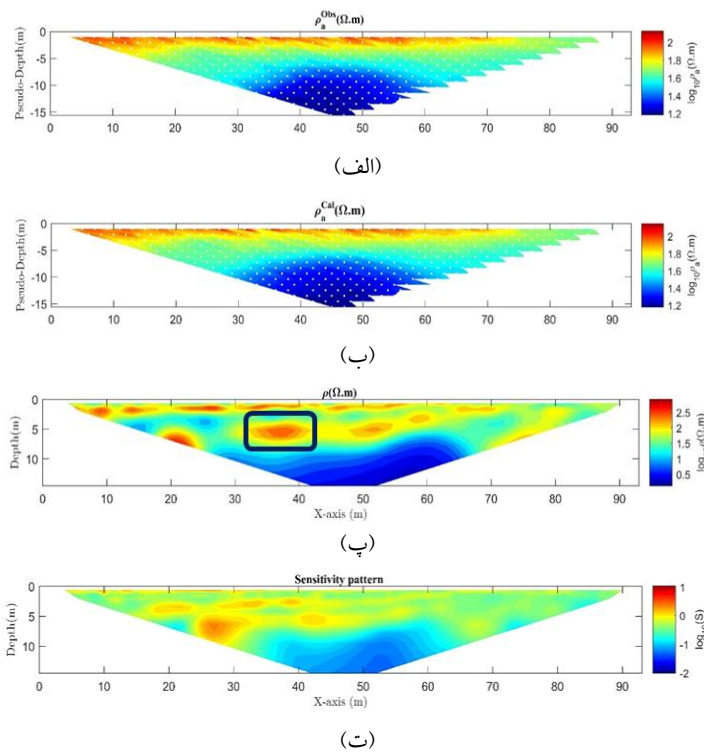
بیشتر بوده است؛ بنابراین در مقاطع حاصل از وارون سازی علاوه بر داده‌های مشاهده‌ای، شبه مقطع داده‌های محاسباتی، مدل وارون نهایی و مقطع حساسیت نمایش داده می‌شود. بر اساس نتایج آنالیز حساسیت مدل‌های منتج شده از مسئله وارون این نکته قابل ذکر است که میزان حساسیت در عمق و جوانب مقاطع کاهش می‌یابد و دلیل آن کاهش تفکیک‌پذیری با افزایش عمق برداشت و نیز عدم وجود داده کافی در کناره‌های پروفیل برداشت می‌باشد. همچنین در سطح مقاطع به دلیل تفکیک‌پذیری بالا، مقادیر حساسیت افزایش می‌یابد.

ابتدا داده‌های صحرایی مربوط به پروفیل ۱ برداشت شده با استفاده از آرایه و نر بدون اعمال سطح نوفه وارون می‌شود. بر اساس شکل ۴-الف شبه مقطع داده‌های صحرایی اثری از تونل را نشان نمی‌دهند. نتایج الگوریتم وارون‌سازی در شکل ۴-ب نمایش داده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود اثر تونل به صورت آنومالی با مقاومت بالا در فاصله ۳۲ متری تا ۳۸ متری پروفیل دیده می‌شود (شکل ۴-پ). هرچند وجود آنومالی‌های کاذب در مرکز مقطع مقاومت ویژه الکتریکی کاملاً مشهود است. همچنین بیشترین مقدار تابع حساسیت مربوط به سطح و عمق‌های میانی مقطع می‌باشد و با افزایش عمق به دلیل کاهش تفکیک‌پذیری و در جوانب مقطع به دلیل داده‌های کم اندازه‌گیری شده مقدار تابع حساسیت کاهش می‌یابد (شکل ۴-ت). در نگرش دوم، اثر سطح نوفه با استفاده از رهیافت خطای برانبارش در مسئله وارون اعمال می‌شود. نتایج این روش در شکل ۵ نمایش داده می‌شود. همان‌طور که دیده می‌شود وجود آنومالی‌های کاذب نسبت به مقطع قبلی به مراتب کمتر و موقعیت تونل در مقطع بهتر نمایش داده می‌شود.

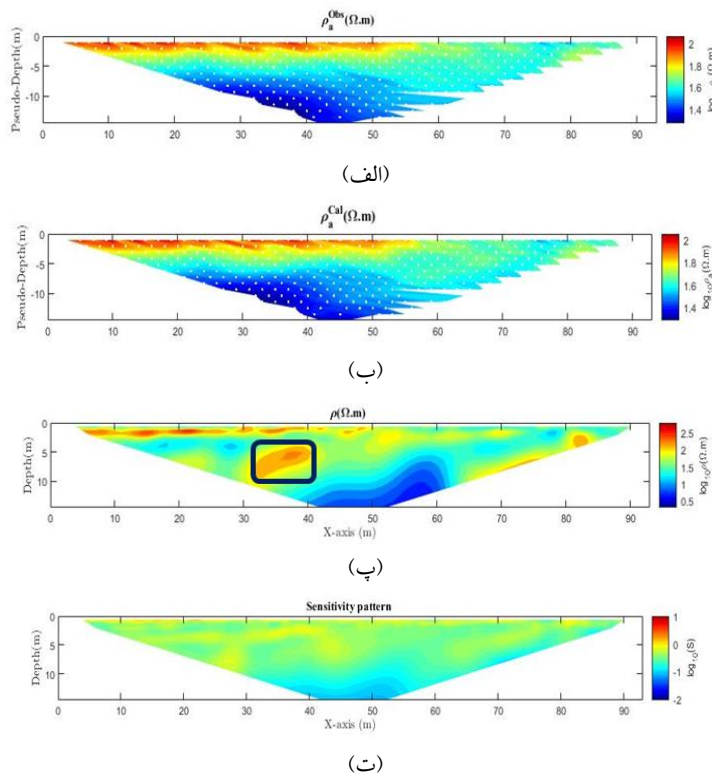
با توجه به اطلاعاتی که از تونل داریم، تونل حدوداً در عمق ۵ تا ۶ متری از سطح برداشت قرار دارد؛ همچنین فاصله تونل ۱ از ابتدای پروفیل ۲ برابر ۳۵ متر و تونل ۲ از ابتدای پروفیل ۱ برابر ۳۸ متر است که در ادامه در مقاطع به‌دست‌آمده برای پروفیل‌های ۱ و ۲، این واقعیت قابل مشاهده است. همان‌طور که پیشتر بیان شد تخمین نوفه از طریق روش خطای برانبارش و خطای هم‌پاسخی و از طریق روابط (۲۰) و (۲۲) و تشکیل ماتریس وزنی داده‌های انجام می‌گیرد. برای مقایسه اثر تخمین نوفه با استفاده از رهیافت‌های مختلف بر روی نتایج وارون‌سازی و مقایسه آن با زمانی که اطلاعاتی از سطح نوفه داده‌ها وجود ندارد، وارون‌سازی اندازه‌گیری‌های صحرایی با سه نگرش انجام می‌گیرد؛ (۱) بدون اعمال ماتریس وزنی داده‌ها (یعنی $W_d = I$ که ماتریس همانی است)، (۲) تخمین سطح نوفه با استفاده از روش خطای برانبارش و (۳) تخمین سطح نوفه با استفاده از روش خطای هم‌پاسخی. همچنین برای ارزیابی قطعیت مدل وارون به‌دست‌آمده از تابع حساسیت استفاده می‌شود. مؤلفه‌های ماتریس حساسیت از طریق مدل مقاومت‌ویژه نهایی منتج‌شده از الگوریتم وارون‌سازی محاسبه می‌شود.

$$S_{ij} = \sum_{i=1}^m J_{ij}(\mathbf{m}) \quad i = (1, 2, \dots, m) \\ j = (1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

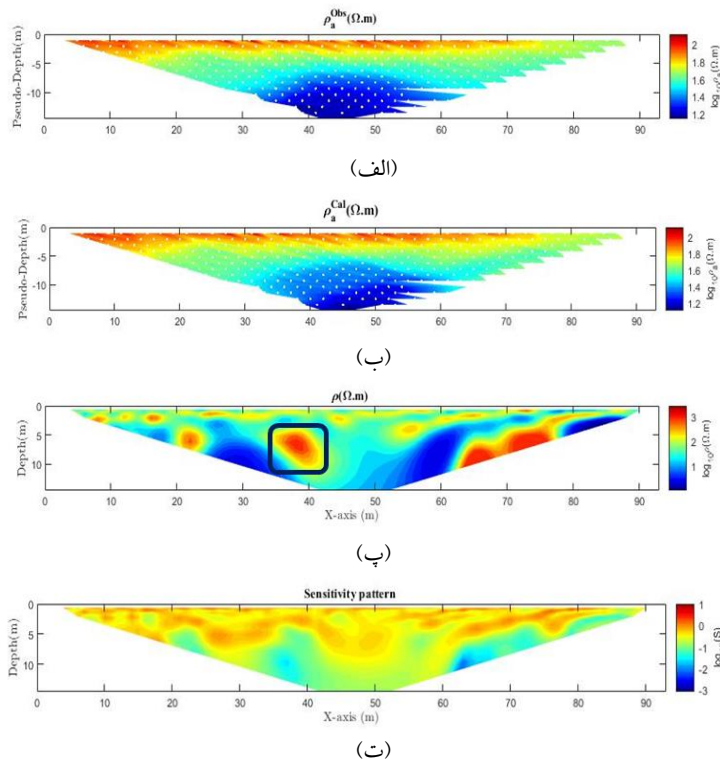
به‌طوری‌که n تعداد داده‌های صحرایی و j تعداد پارامترهای مدل (بلوک‌های گسسته شده در مدل زیر سطحی) را نشان می‌دهند. بر اساس رابطه بالا به هر بلوک یک مقدار تابع حساسیت اختصاص داده می‌شود که نمایانگر میزان حساسیت هر بلوک به داده‌های اندازه‌گیری شده نزدیک سطح است. هرچه میزان حساسیت در مقطع بیشتر باشد مؤید این مطلب است که آن قسمت از مقطع قطعیت بیشتر دارد و اثر آن بر روی داده‌های صحرایی



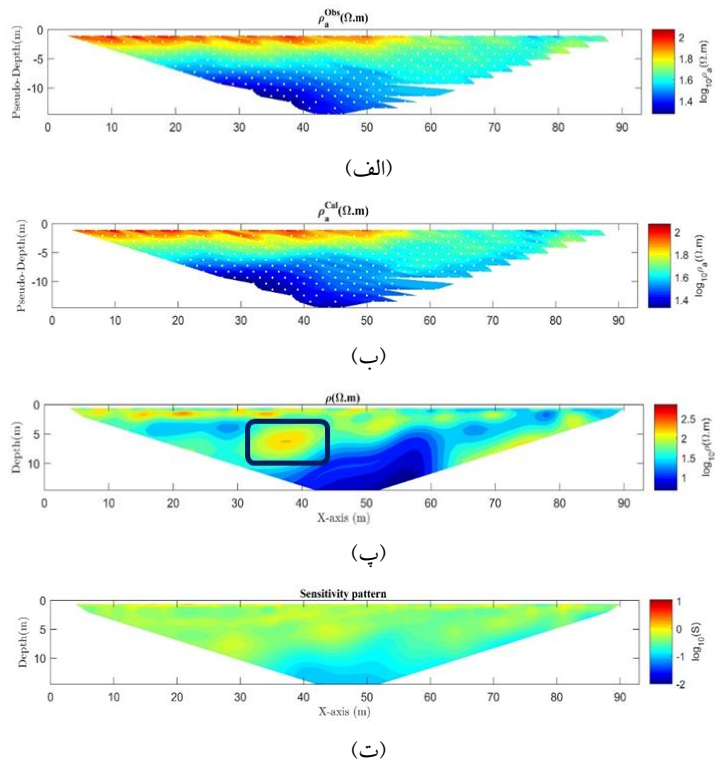
شکل ۴. پروفیل ۱ (تونل ۲)؛ نتایج وارون بدون در نظر گرفتن نوفه شکل‌ها به ترتیب از بالا (الف) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه بدون در نظر گرفتن نوفه (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.



شکل ۵. پروفیل ۱ (تونل ۲)؛ نتایج وارون با در نظر گرفتن خطای برانبارش؛ شکل‌ها به ترتیب از بالا (الف) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه با در نظر گرفتن خطای برانبارش (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.



شکل ۶. پروفیل ۱ (تونل ۲)؛ نتایج وارون با در نظر گرفتن خطای هم پاسخی؛ شکل‌ها به ترتیب از بالا (الف) شبه مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه مقاومت ویژه با در نظر گرفتن خطای هم پاسخی (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.

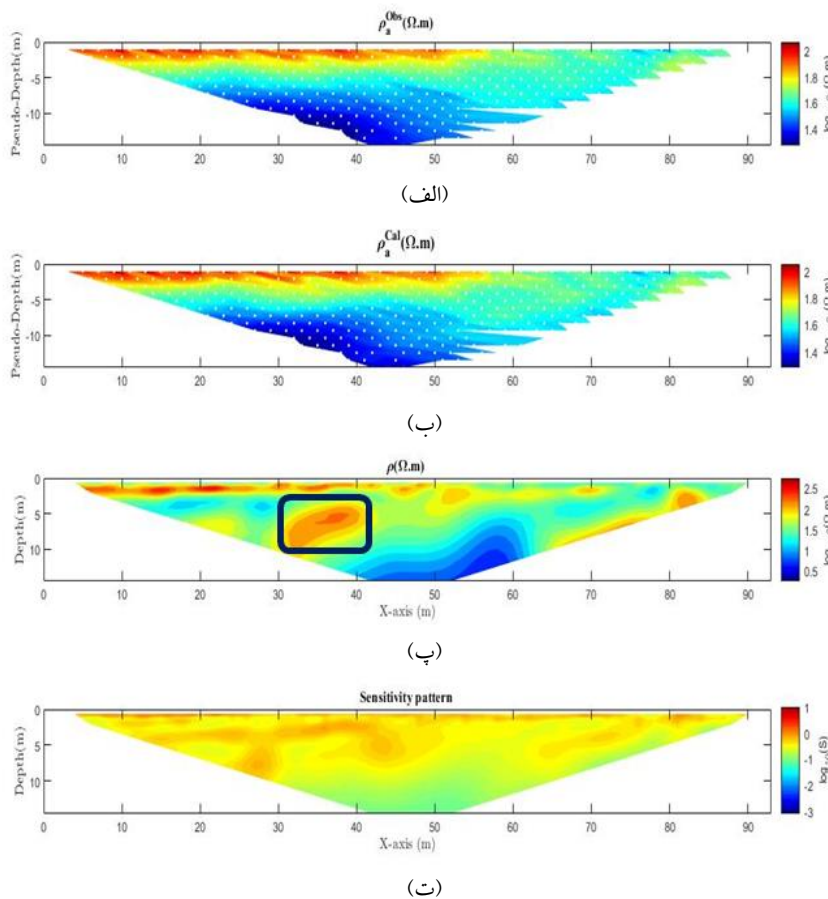


شکل ۷. پروفیل ۲ (تونل ۱)؛ نتایج وارون بدون در نظر گرفتن نوفه؛ شکل‌ها به ترتیب از بالا (الف) شبه مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه بدون در نظر گرفتن نوفه (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.

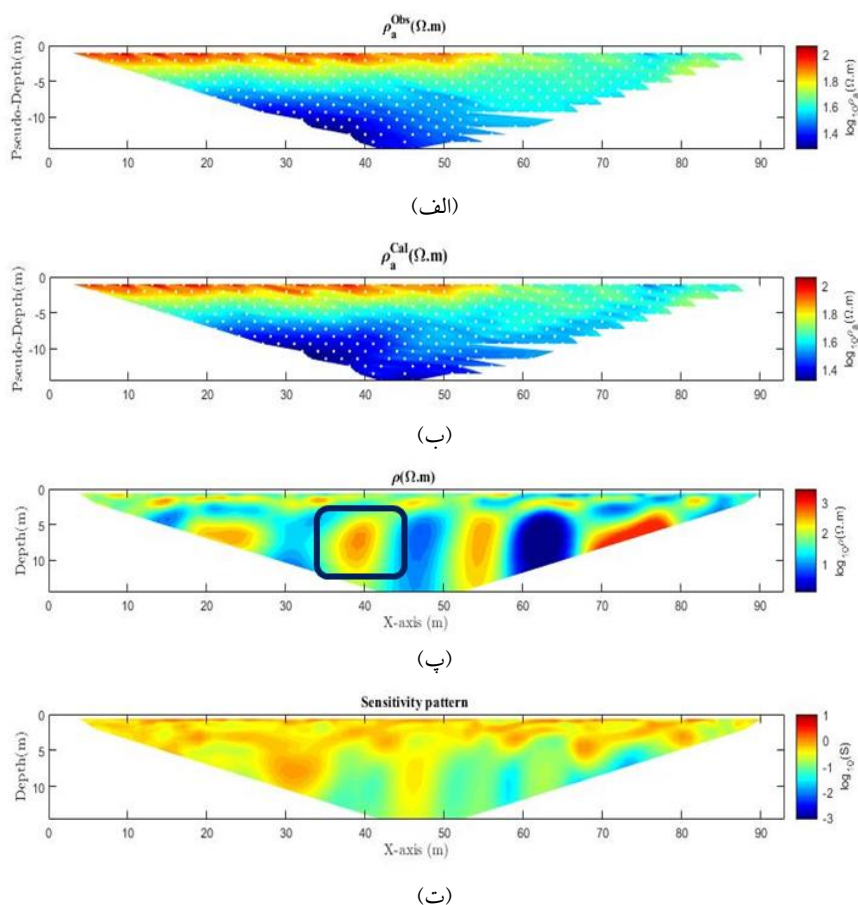
زمانی که جای الکترودهای منبع و گیرنده عوض می‌شود، نسبت سیگنال به نوفه تغییر می‌کند در واقع این تغییر موقعیت الکترودهای جریان و پتانسیل در اندازه‌گیری‌های پیشرو و معکوس منجر به اختلاف زیاد بین دو اندازه‌گیری می‌شود و در نتیجه تخمین غیرواقعی از سطح نوفه می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود برای آرایه ونر تخمین سطح نوفه از طریق رهیافت خطای هم‌پاسخی گزینه مناسبی نباشد.

نتایج وارون‌سازی پروفیل ۲ با در نظر گرفتن سه نگرش مذکور به ترتیب در شکل‌های ۷، ۸ و ۹ نشان داده می‌شود. همانطور که انتظار می‌رود (مانند نتایج پروفیل ۱) استفاده از روش خطای هم‌پاسخی منجر به ایجاد ساختارهای کاذب در مقطع وارون می‌شود (به شکل ۹-پ مراجعه شود).

شکل ۶ نتایج وارون‌سازی پس از اعمال ماتریس وزنی داده‌ها منتج شده از روش خطای هم‌پاسخی را نشان می‌دهد. از مقطع نهایی دیده می‌شود که هرچند موقعیت تونل تا حدودی مشخص شده است اما وجود آنومالی‌های با مقاومت ویژه بالا در سمت راست مقطع و عدم آشکارسازی قسمت انتهایی مقطع که مقاومت ویژه پایینی دارد نشان می‌دهد که روش مذکور به‌خوبی سطح نوفه داده‌های صحرائی را تخمین نزده و باعث پدیده برازش بیش از حد مدل نهایی شده است. با مقایسه شکل ۵-ب و ۶-ب مشاهده می‌شود که تخمین نوفه به روش خطای هم‌پاسخی برای آرایه ونر نتایج مطلوبی نداشته است. در واقع این نتیجه مربوط به نحوه قرار گرفتن الکترودهای جریان و پتانسیل در آرایه ونر است چون در این آرایه



شکل ۸. پروفیل ۲ (تونل ۱)؛ نتایج وارون با در نظر گرفتن خطای برانبارش؛ شکل‌ها به‌ترتیب از بالا (الف) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه مقاومت ویژه با در نظر گرفتن خطای برانبارش (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.



شکل ۹. پروفیل ۲ (تونل ۱)؛ نتایج وارون با در نظر گرفتن خطای هم‌پاسخی؛ شکل‌ها به ترتیب از بالا (الف) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی مشاهده‌ای، (ب) شبه‌مقطع مقاومت ویژه الکتریکی محاسبه‌ای، (پ) مقطع مقاومت ویژه مقاومت ویژه با در نظر گرفتن خطای هم‌پاسخی (ت) الگوی حساسیت. کادر مشکی نشان‌دهنده محل بی‌هنجاری است.

۴. نتیجه گیری

است که امکان محاسبه ماتریس حساسیت برای هر مدل با توزیع رسانندگی دلخواه وجود دارد. همچنین در این رهیافت استفاده از خروجی‌های مدل‌سازی پیشرو در فرایند حل ماتریس حساسیت منجر به کاهش زمان محاسبات می‌شود. پس از اطمینان حاصل کردن از درستی الگوریتم حل به بررسی تأثیر خطا بر داده‌های حاصل از آرایه‌های دوقطبی-دوقطبی و ونر در داده‌های مصنوعی و صحرایی پرداختیم. از بررسی‌هایی که انجام شد با توجه به نوع آرایه و روش انتخابی برای تخمین نوفه نتایج متفاوتی به دست آمد. این نتایج بر اساس مدل‌های مقاومت ویژه تخمینی در داده‌های مصنوعی و واقعی حاصل شد. مدل‌سازی‌های مصنوعی نشان داد که با اعمال ماتریس وزنی داده‌ها امکان تخمین بهتری از مدل مقاومت ویژه

حل مسئله وارون به دلیل ویژگی‌های ذاتی که در آن وجود دارد، چالش برانگیز است. از آنجا که غالب مسائل وارون ژئوفیزیکی غیرخطی و بدوضع هستند، ابتدا خطی‌سازی می‌شوند و به کمک روش کمترین مربعات همراه با روش‌های منظم‌سازی در قالب یک الگوریتم تکراری حل می‌گردند. بخش جدایی‌ناپذیر از هر مدل‌سازی وارون حل مسئله پیشرو است. در این مطالعه معادله پواسون برای یک زمین ۲/۵ بعدی که مشکل از معادلات دیفرانسیل جزئی است از طریق روش عددی تفاضل محدود حل شده است. مزیت روش محاسبه ماتریس حساسیت به کمک ماتریس پیشرو (روشی که در این مقاله استفاده شده) نسبت به روش‌های تحلیلی این

زمانی که از آرایه و نر استفاده می‌کنیم، روش خوب و مناسبی نیست. برای تخمین نوفه در آرایه و نر می‌بایست به سراغ روش‌های دیگر از جمله تخمین نوفه به روش برانبارش برویم. همان‌طور که گفته شد و در مقاطع خروجی هم پیداست، روش برانبارش نتایج مطلوبی روی نتایج حاصل دارد. می‌توان نتیجه گرفت در صورت انتخاب روش مناسب برای تخمین نوفه بنا به آرایش الکترودی مورد استفاده، می‌توان در نتایج به دست آمده از حل مسئله وارون غیریکتایی که سعی در حل آن داریم، بهبود حاصل کنیم. به‌طور کلی تخمین نوفه درست باعث می‌شود که Under-Fitting (حذف جزئیاتی از مدل زمین) و یا Over-Fitting (ایجاد بی‌هنجاری‌های کاذب) که باعث ایجاد عدم قطعیت بالا در مدل‌های حاصل از وارون‌سازی می‌شود، رخ ندهد. همچنین تخمین نوفه‌های اندازه‌گیری بر نحوه همگرایی مسئله وارون تأثیرگذار است.

منابع

- Backus, G., & Gilbert, F. (1968). The resolving power of gross earth data. *Geophysical Journal International*, 16(2), 169-205.
- Claerbout, J.F., & Muir, F. (1973). Robust modeling with erratic data. *Geophysics*, 38(5), 826-844.
- DeGroot-Hedlin, C., & Constable, S.C. (1990). Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magneto-telluric data. *Geophysics*, 55, 1613-1624.
- Dahlin, T. (1996). 2D resistivity surveying for environmental and engineering applications. *First break*, 14(7), 275-283.
- Dey, A., & Morrison, H.F. (1979a). Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, 27(1), 106-136.
- Dey, A., & Morrison, H.F. (1979b). Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures. *Geophysics*, 44(4), 753-780.
- Edwards L.S. (1977). A modified pseudosection for resistivity and induced-polarization. *Geophysics*, 42, 1020-1036.
- Fallah Safari, M., & Ghanati, R. (2022). DC Electrical Resistance Tomography Inversion, *Journal of the Earth and Space Physics*, 47(4), 87-98.
- Ghanati, R., & Fallahsafari, M. (2022). Fréchet Derivatives calculation for electrical resistivity imaging using forward matrix method, *Iranian Journal of Geophysics*, 15(4), 153-163.
- Griffiths D.H., & and Barker R.D. (1993). Two-dimensional resistivity imaging and modelling in areas of complex geology. *Journal of Applied Geophysics*, 29, 211-226.
- Haberjam, G.M. (1967). Short note: On the application of the reciprocity theorem in resistivity prospecting. *Geophysics*, 32, 918.
- Jackson, D.D. (1972). Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophysical Journal International*, 28(2), 97-109.
- Kemna, A., Binley, A., Cassiani, G., Niederleithinger, E., Revil, A., Slater, L., Williams, K.H., Orozco, A. F., Haegel, F.H., Hoerd, A., & Kruschwitz, S. (2012). An overview of the spectral induced polarization method for near-surface applications. *Near Surface Geophysics*, 10(6), 453-468.
- LaBrecque, D.J., Mletto, M., Daily, W., Ramirez, A.L., & Owen, E. (1996). The effects of noise on Occam's inversion of resistivity tomography data. *Geophysics*, 61, 538.

واقعی وجود دارد. همچنین آگاهی از میزان سطح نوفه داده‌های مشاهده‌ای در حین حل مسئله وارون مانع از تشکیل بی‌هنجاری‌های کاذب یا از دست رفتن جزئیات مدل فرضی در مدل نهایی می‌شود. برای بررسی اثر تخمین نوفه در وارون‌سازی برداشت‌های واقعی، اندازه‌گیری‌های صحرایی بر روی تونل شهدای غزه مورد بررسی قرار گرفت. طبق بررسی صورت گرفته، مشخص شد که روش تخمین نوفه با کمک تئوری هم‌پاسخی برای آرایه و نر نتیجه مناسبی به همراه ندارد. این نتیجه را می‌توان به نحوه قرار گرفتن الکترودهای جریان و پتانسیل مربوط به برداشت مستقیم و معکوس در آرایه و نر نسبت داد. در این آرایه زمانی که جای الکترودهای منبع و گیرنده عوض می‌شود انتظار داریم که نسبت سیگنال به نوفه تغییر کند؛ چرا که با تغییر چینش در این آرایه، عمق نفوذ جریان در یک زمین ناهمگن تغییر کرده و همین تغییر سبب تغییر در ولتاژ دریافتی می‌شود. با توجه به توضیحات گفته شده و نتایج حاصل از مقاطع خروجی، اعمال نوفه تخمینی به روش خطای هم‌پاسخی به حل مسئله وارون

- Loke, M.H. (1994). The inversion of two-dimensional resistivity data. *Ph.D. thesis*, University of Birmingham.
- Loke, M.H., & Barker, R.D. (1994). Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudo-sections. 54th EAEG Meeting, Vienna, Austria.
- Loke, M.H., & Barker, R.D. (1995). Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudo-sections. *Geophysics*, 60, 1682-1690.
- Loke, M.H., Acworth, I., & Dahlin, T. (2003). A comparison of smooth and blocky inversion methods in 2D electrical imaging surveys. *Exploration Geophysics*, 34(3), 182-187.
- Loke, M.H., Chambers, J.E., Rucker, D.F., Kuras, O., & Wilkinson, P.B. (2013). Recent developments in the direct-current geoelectrical imaging method. *Journal of applied geophysics*, 95, 135-156.
- McGillivray, P.R. (1992). Forward modeling and inversion of DC resistivity and MMR data. *Ph.D. thesis*, University of British Columbia.
- Oldenburg, D. W., & Li, Y. (1994). Inversion of induced polarization data. *Geophysics*, 59(9), 1327-1341.
- Oldenburg, D.W., & Li, Y. (1999). Estimating depth of investigation in dc resistivity and IP surveys. *Geophysics*, 64(2), 403-416.
- Park, S.K., & Van, G.P. (1991). Inversion of pole-pole data for 3-D resistivity structure beneath arrays of electrodes. *Geophysics*, 56, 951-960.
- Sasaki, Y. (1992). Resolution of resistivity tomography inferred from the numerical simulation. *Geophysical Prospecting*, 40, 453-464.
- Schlumberger, C., & Schlumberger, M. (1929). Electrical Logs and correlations in Drill Holes. *Mining Metallurgy*, 10, 515-518.
- Seigel, H., Nabighian, M., Parasnis, D.S., & Vozoff, K. (2007). The early history of the induced polarization method. *The Leading Edge*, 26(3), 312-321.
- Smith, N.C., & Vozoff, K. (1984). Two-dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data: IEEE Trans. *Geosci. Remote Sensing*, 22, 21-28.
- Tripp, A.C., Hohmann, G.W., & Swift Jr., C.M. (1984). Two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 49, 1708-1717.
- Tso, C.-H.M., Kuras, O., Wilkinson, P.B., Uhlemann, S., Chambers, J.E., Meldrum, P.I., Graham, J., Sherlock, E.F., & Binley, A. (2017). Improved characterisation and modelling of measurement errors in electrical resistivity tomography (ERT) surveys. *Journal of Applied Geophysics*, 146, 103– 119.
- Wilkinson, P., Chambers, J., Uhlemann, S., Meldrum, P., Smith, A., Dixon, N., & Loke, M.H. (2016). Reconstruction of landslide movements by inversion of 4-D electrical resistivity tomography monitoring data. *Geophys. Res. Lett.* 43, 1166–1174
- Zhdanov, M., Endo, M., Cox, L., & Sunwall, D. (2018). Effective-medium inversion of induced polarization data for mineral exploration and mineral discrimination: Case study for the copper deposit in Mongolia. *Minerals*, 8(2), 68.
- Zhou, B., & Dahlin, T. (2003). Properties and effects of measurement errors on. *Near Surf. Geophysics*, 1(3), 105-117.

پیوست ۱

برای به دست آوردن ماتریس حساسیت یک بار دیگر روابط ذکر شده در حل پیشرو را تکرار می‌کنیم:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = -I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (1)$$

که در آن Φ معادل با پتانسیل حاصل از منبع نقطه‌ای در زمین است؛ \mathbf{r} بردار مکان در جهت‌های x ، y و z است؛ همچنین \mathbf{r}_s بردار مکان مربوط به منبع در جهت‌های مذکور است. I برابر با شدت جریان تزریقی به درون زمین می‌باشد. اگر بخواهیم توزیع رسانایی را در دو بعد بررسی کنیم، داریم:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \Phi(x, y, z)] = -I \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z - z_s) \quad (2)$$

برای اینکه جریان دو بعدی را با یک منبع سه بعدی بررسی کنیم، در جهت امتداد کشیدگی بی‌هنجاری (که تغییرات را در راستای آن ثابت در نظر می‌گیریم)، از فضای مکان به فضای فوریه می‌رویم؛ یعنی به جای y از k_y بهره می‌بریم؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \tilde{\Phi}(x, k_y, z) - k_y^2 \sigma(x, z) \nabla \tilde{\Phi}(x, k_y, z)] = \frac{-I}{2} \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) \quad (3)$$

k_y همان عدد موج در راستای y (جهت امتداد کشیدگی بی‌هنجاری) است؛ همچنین $\tilde{\Phi}$ برابر پتانسیل تبدیل شده در فضای فوریه می‌باشد. معادله ۳ یک معادله دیفرانسیل جزئی است که ما آن را به روش عددی تفاضل محدود با در نظر گرفتن شرایط مرزی ترکیبی، حل می‌کنیم؛ بنابراین می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{C} \tilde{\Phi}(x, k_y, z) = q \quad (4)$$

با جایگذاری $\tilde{\Phi}(x, k_y, z) = \tilde{\Phi}$ داریم:

$$\mathbf{C} \tilde{\Phi} = q \quad (5)$$

در این معادله ماتریس \mathbf{C} ، ماتریس جفت‌شدگی است که همان‌طور که در قسمت حل مسئله پیشرو گفته شد، بیانی از فیزیک مسئله (مثل گسسته‌سازی، شرایط مرزی و فاکتور هندسی) است. این ماتریس یک ماتریس تنگ است؛ یعنی بیشتر درایه‌های آن صفر است. پارامتر q نیز در رابطه داده شده، بردار مربوط به منبع است.

از حل معادله ۵ پتانسیل $\tilde{\Phi}$ را در فضای فوریه خواهیم داشت. برای داشتن مقادیر در راستای طول و عمق، کافی است که یک تبدیل فوریه معکوس گرفته شود. لازم به ذکر است برای داشتن تمام اطلاعات در جهت کشیدگی بی‌هنجاری (y) باید روی همه k_y ها انتگرال بگیریم. برای به دست آوردن ماتریس حساسیت به کمک روش پیشرو، لازم است از معادله ۵ نسبت به رسانایی مشتق بگیریم؛ یعنی

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \sigma} \tilde{\Phi} + \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma} = \frac{\partial q}{\partial \sigma} \quad (6)$$

از آنجا که مشتق بردار منبع نسبت به رسانایی یعنی عبارت $\frac{\partial q}{\partial \sigma}$ برابر صفر است؛ پس:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \sigma} \tilde{\Phi} + \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \sigma} = 0 \quad (7)$$

ادامه پیوست ۱

با تشکیل ماتریس C و به دست آوردن $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ به کمک آن و همچنین به دست آوردن Φ از حل معادله پیشرو، تنها $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$ نامشخص است؛ بنابراین پس از محاسبه آن از رابطه ۷ و سپس محاسبه تبدیل فوریه معکوس آن در k_y ‌های مختلف، مقادیر حساسیت مسئله حاصل می‌شوند.

حساسیت برای یک منبع نقطه‌ای ثابت برابر است با:

$$J_{lmn} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial \sigma_n} \quad (۸)$$

که در آن Φ_m ، پتانسیل مربوط به گره m و σ_n ، رسانایی مربوط به بلوک n می‌باشد. l ایندکس مکان منبع است، به طوری که J_{lmn} به عنوان حساسیت در گره m با توجه به تغییر رسانایی در سلول n و منبع واقع در گره l ، تعریف می‌شود. یک مزیت روش تفاضل محدود برای محاسبه ماتریس حساسیت این است که هر بار تنها با محاسبه یک ردیف یا یک ستون اجرا می‌شود، به طوری که کل ماتریس با استفاده از یک الگوریتم تکرار شونده به دست می‌آید. در نهایت ما یک الگوریتم حل عددی با استفاده از توزیع پتانسیل به دست آمده از مدل تفاضل محدود برای محاسبه درایه‌های ماتریس حساسیت را پیشنهاد و فرموله کردیم. توزیع حساسیت برای مدل سازی مقاومت ویژه الکتریکی دو و نیم بعدی برای همه آرایه‌های مختلف الکتریکی قابل محاسبه و استفاده است (برای جزئیات بیشتر به قناتی و فلاح صفری (۲۰۲۲) مراجعه شود).