

مقایسه روش‌های کولوکیشن کمترین مربعات و انتگرال پواسن در انتقال فروسوی داده‌های گرانی هوابرد

مهدی گلی*

استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۵/۱۳، پذیرش نهایی: ۱۴۰۰/۱۰/۲۰)

چکیده

این مطالعه به مقایسه کارایی دو روش کولوکیشن کمترین مربعات و انتگرال پواسن در انتقال فروسوی داده‌های گرانی هوابرد با استفاده از داده‌های زمینی در منطقه کلرادو امریکا اختصاص دارد. روش کولوکیشن نیاز به داده‌های با خواص آماری مستقل از مکان و جهت دارد. لذا اثر طول موج‌های بلند با استفاده از مدل ژئوپتانسیل و اثر طول موج‌های کوتاه توپوگرافی از روی داده‌ها برداشته شد. حذف اثر طول موج‌های کوتاه مدل از مدل پتانسیل پوسته $dV_ELL_Earth2014_5480$ از درجه/مرتبۀ ۵۴۸۰/۵۴۸۰ انجام شد. نتایج عددی با داده‌های شبیه‌سازی شده در ارتفاع پرواز و سطح زمین نشان از برتری روش پواسن نسبت به کولوکیشن در انتقال فروسوی داده‌های هوایی دارد. اختلاف بین نتایج عددی روش‌های کولوکیشن و انتگرال پواسن برابر ۲ میلی‌گال است. این مقدار در سطح نویز داده‌ها است. همچنین انحراف‌معیار اختلاف بین نتایج هر دو روش با داده‌های زمینی حدود ۸ میلی‌گال است. همچنین هر دو روش وجود یک بایاس به اندازه ۲ میلی‌گال در داده‌های هوابرد را نشان می‌دهند. با توجه به وجود همین مقدار بایاس در داده‌های زمینی نمی‌توان این مقدار بایاس را برای داده‌های هوابرد کلرادو نسبت داد.

واژه‌های کلیدی: انتقال فروسو، کولوکیشن کمترین مربعات، انتگرال پواسن، گرانی‌سنجی هوابرد، کلرادو.

۱. مقدمه

روش معمول ارزیابی داده‌های هوابرد، استفاده از داده‌های زمینی موجود است. برای این منظور داده‌های هوایی با انتقال فروسو از ارتفاع پرواز به سطح زمین منتقل می‌شوند. البته امکان انتقال داده‌های زمینی به ارتفاع پرواز نیز وجود دارد اما معمولاً تراکم کم داده‌های زمینی اجازه انتقال دقیق آنها را فراهم نمی‌کند. علاوه بر ارزیابی داده‌های هوابرد، انتقال فروسو مرحله اصلی حل مسئله مقدار مرزی ژئودتیکی (استوکس یا مالدنسکی) است. همچنین در ژئوفیزیک اکتشافی، برای بارزسازی سیگنال گرانی به‌منظور کشف ساختارهای مدفون از انتقال فروسو داده‌های هوابرد استفاده می‌شود.

انتقال فروسو به‌عنوان یک مسئله معکوس یکی از مراحل کلیدی در مدل‌سازی میدان ثقل است. این مسئله در حالت پیوسته جواب ندارد (مارتینک، ۱۹۹۶). برای داده‌های واقعی (حالت گسسته) انتقال فروسو بسته به فواصل نمونه‌برداری و حضور فرکانس‌های بالا در داده‌ها، ممکن است به یک مسئله بدوضع تبدیل شود. حضور این فرکانس‌ها تابعی از تراکم داده‌ها، شدت توپوگرافی و

برداشت یکنواخت داده گرانی در کشورهای وسیع مانند ایران که بخش‌های زیادی از آن مشتمل بر کوهستان‌های صعب‌العبور و بیابان‌های خشک است با گرانی‌سنجی زمینی مستلزم زمان و هزینه بسیار زیاد است. برای مثال با گذشت بیش از ۱۵ سال از آغاز طرح شبکه چندمنظوره در سازمان نقشه برداری، علی‌رغم تلاش‌های بسیار و کیفیت بالای مشاهدات آن، هنوز تراکم این شبکه برای تعیین یک ژئوئید دقیق سانتی‌متری به‌عنوان مرجع ارتفاعات، کافی نیست (سعادت و همکاران، ۲۰۱۸؛ گلی، ۱۳۹۸). گرانی‌سنجی هوایی به‌عنوان یک راه‌حل اقتصادی و سریع می‌تواند برای پر کردن محل‌های خالی از داده‌های زمینی به‌کار گرفته شود. اما داده‌های گرانی هوابرد معمولاً آلوده به نویز، بایاس و خطای دوره‌ای و دریافت هستند (وانگ و همکاران، ۲۰۰۷). اگرچه در مراحل پیش پردازش داده‌ها این خطاها را تا حد امکان کم می‌شود. اما لازم است قبل از به‌کارگیری آنها در مدل‌سازی میدان ثقل زمین با یک داده‌های مستقل ارزیابی شوند.

کیلومتر مقایسه شد. آنها نشان داده‌اند که دقت هر دو روش در عدم حضور نویز در تعیین آنومالی ارتفاع یکسان است. با این وجود در حضور نویز، دقت روش کولوکیشن یک میلی‌متر بهتر است که به نظر می‌رسد این اختلاف قابل توجه نیست. ضمن این که این مطالعه صرفاً روی داده‌های شبیه‌سازی شده و در حالت ایده‌آل انجام شده است. ژائو و همکاران (۲۰۱۸) داده‌های گرانی هواپیما کشور تایوان را پس از انتقال فروسو به داده‌های زمینی مقایسه کردند و نشان دادند داده‌های منتقل شده بروش کولوکیشن به میزان ۲۰ درصد نزدیک‌تر به داده‌های زمینی هستند.

۲. کولوکیشن

کولوکیشن یک روش برآورد خطی بهینه برای تقریب داده‌ها بر اساس کوریانس بین آنهاست. رابطه اساسی این روش عبارت است از (سانسو، ۲۰۱۳):

$$x = C_{XS}(C_{SS} + C_{VV})^{-1}S, \quad (1)$$

در اینجا x بردار مجهولات، C_{XS} ماتریس حاوی کوریانس‌های مجهولات و مشاهدات، C_{SS} ماتریس حاوی کوریانس بین مشاهدات و C_{VV} یک ماتریس قطری است که عناصر قطر اصلی آن نویز مشاهدات است. همچنین بردار S بردار مشاهدات است. این روش توانایی انتقال فروسوی داده‌های گرانی پراکنده و با ارتفاعات مختلف را داراست. علاوه بر این کولوکیشن توانایی انتقال فراسو بین دو سطح سه‌بعدی را داراست. همچنین جواب کولوکیشن دارای ویژگی مینیمم نرم است (سانسو، ۲۰۱۳) که در مسئله انتقال فروسو یک ویژگی مطلوب محسوب می‌شود. هر تابع متقارن، معین-مثبت می‌تواند به‌عنوان تابع کوریانس انتخاب شود. با این وجود لازم است تابع کوریانس، ساختار ریاضی ساده‌ای داشته باشد. در مسئله انتقال فروسو باید از توابع کوریانس سه‌بعدی (شامل مؤلفه ارتفاعی) استفاده شود. برای این منظور می‌توان از تابع کوریانس شرنینگ-رپ (۱۹۷۴) و فرسبرگ (۱۹۸۷) استفاده کرد. تابع دوم تقریب صفحه‌ای تابع اول است که در همه مطالعات قبلی از آن استفاده شده است. در این

نویز اندازه‌گیری است (گلی و همکاران، ۲۰۱۸). علاوه بر این، درجه بدو وضعی با افزایش ارتفاع زیاد می‌شود. طبیعت گرانی‌سنجی هوایی، ارتفاع زیاد و حضور نویز اندازه‌گیری در داده‌هاست. این دو عامل به همراه تراکم بالای داده‌ها، باعث می‌شود انتقال فروسوی داده‌های هواپرد، همه شرایط یک مسئله ناپایدار را دارا باشد.

روش‌های مختلفی برای انتقال فروسو داده‌های گرانی در ژئوفیزیک و ژئودزی پیشنهاد شده است. پینینگتون و بولانگر (۲۰۱۷) یک مرور کاملی بر روش‌های انتقال فروسو میدان‌های پتانسیل بین سطوح نامنظم انجام دادند. انتخاب روش مناسب، وابسته به شرایط داده‌ها و کاربرد مورد نظر است. در کاربردهای ژئوفیزیکی اغلب از تبدیل سریع فوریه برای این منظور استفاده می‌شود (فدی و فلوریو ۲۰۰۲؛ کوپر، ۲۰۰۴). این روش نیاز به داده‌های منظم (گرید) دارد. در حالی که همواره داده‌ها به صورت پراکنده برداشت می‌شوند. علاوه بر این، این روش برای داده‌های متراکم ناپایدار است. برای انتقال فروسوی پایدار با تبدیل فوریه مطالعات گسترده‌ای انجام شده است. برای نمونه ببینید (ژو و همکاران، ۲۰۰۷؛ ژانگ و همکاران، ۲۰۱۶؛ ژانگ و همکاران ۲۰۱۸). روش فوریه برای انتقال فروسو در مطالعات ژئودتیکی کمتر مورد توجه است. به‌جای آن، اغلب از دو روش کولوکیشن کمترین مربعات (به اختصار در این مطالعه کولوکیشن) و انتگرال پواسن استفاده می‌شود. روش کولوکیشن در مطالعات (زیائوس و همکاران، ۲۰۰۵؛ وانگ و همکاران، ۲۰۰۷؛ بارزاقی و همکاران، ۲۰۰۹؛ سایو و وانگ، ۲۰۱۰؛ ژائو و همکاران، ۲۰۱۸) برای انتقال فروسوی داده‌های گرانی هواپرد مورد استفاده قرار گرفته است. روش پواسن نیز در مطالعات (اردلان، ۱۹۹۹؛ نواک و هک، ۲۰۰۲، البرتز و کلیس، ۲۰۰۴؛ وانگ و همکاران ۲۰۰۸؛ ژائو و همکاران، ۲۰۱۸) مورد استفاده قرار گرفته است.

در مطالعه آلبرتز و کلیس (۲۰۰۴) نتایج روش‌های انتگرال پواسن و کولوکیشن برای تعیین آنومالی ارتفاعی با آنومالی‌های شبیه‌سازی شده $5' \times 5'$ با ارتفاع پرواز ۴

کمک کند.

۳. انتگرال پواسن

در تقریب کروی، آنامولی جذبی در شعاع ژئوسنتریک r را می‌توان با انتقال فراسوی آنومالی‌ها روی کره‌ای به شعاع R به‌دست آورد (هافمن و موریتز، ۲۰۰۶):

$$\Delta g(r, \Omega) = \frac{R}{4\pi r} \int_{\sigma} \Delta g(R, \Omega') K(R, \psi, r) d\Omega', \quad (۳)$$

که در این رابطه $\Omega = (\theta, \lambda)$ ، موقعیت مسطحاتی نقطه در سیستم مختصات کروی، R شعاع متوسط زمین و $K(R, \psi, r)$ کرنل پواسن

$$K(R, \psi, r) = \frac{R(R^2 - r^2)}{L^3(R, \psi, r)}. \quad (۴)$$

است. در این رابطه $L = \sqrt{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi)}$ ، فاصله کروی بین نقطه انتگرال‌گیری است. لازم به‌ذکر است در تقریب کروی شعاع ژئوسنتریک r نیز برابر $R+H$ است که H ارتفاع ارتومتریک/ژئودتیک نقطه است.

فرم گسسته انتگرال (۳)، عبارت است از

$$\Delta g(r_i, \Omega_i) = \frac{R^2}{4\pi r_i} \sum_{j=1}^n \frac{R^2 - r_i^2}{L^3(R, \psi_{ij}, r_i)} \Delta g(R, \Omega_j) \sin \theta_j \Delta \theta \Delta \lambda \quad (۵)$$

است. در این رابطه $\Delta \theta$ و $\Delta \lambda$ فاصله داده‌ها در راستای عرض و طول کروی روی ژئوئید است. با استفاده از رابطه فوق، آنومالی‌های جذبی در سطح ژئوئید و زمین تشکیل دستگاه معادلات خطی به‌فرم

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (۶)$$

را می‌دهند که \mathbf{x} بردار مجهولات (آنومالی‌ها در سطح ژئوئید) و \mathbf{b} بردار مشاهدات (آنومالی‌ها در سطح زمین) است. ماتریس \mathbf{A} نیز ماتریس ضرایب است.

رابطه (۳) ارتباط بین آنومالی‌های نقطه‌ای در سطح زمین و ژئوئید را نشان می‌دهد. در مطالعات نشان داده شده است که استفاده از آنومالی‌های متوسط نتایج انتقال فرسوی را بهبود می‌بخشد. رابطه (۳)

$$\Delta g(r_i, \Omega_i) = \frac{R}{4\pi r_i} \sum_{j=1}^n \bar{K}(r_i, \psi_{ij}, R) \overline{\Delta g}(R, \Omega_j) \sin \theta_j \Delta \theta \Delta \lambda$$

کرنل متوسط پواسن در سلول C_j است:

مطالعه نیز از آن به‌عنوان تابع کوریانس استفاده می‌شود. فرم این تابع کوریانس برای دو نقطه P و Q عبارت است از (ژائو و همکاران، ۲۰۱۸):

$$C(x_p - x_Q, y_p - y_Q, z_p + z_Q) = C_h / \sum_{i=1}^3 \alpha_i \log(2D_i + 4h) \sum_{i=1}^3 \alpha_i \log(z_i + r_i), \quad (۲)$$

که در این رابطه C_h وریانس داده‌های گرانی، h ارتفاع متوسط داده‌های هوابرد، ضرایب α_i ، z_i و r_i عبارت است از: $z_i = z_p + z_Q + D$ ، $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -1$

دو پارامتر D و T با برازش تابع فوق به کوریانس‌های تجربی به‌دست می‌آیند. تابع کوریانس فوق ایزوتروپ و همگن است زیرا تنها تابع فاصله داده‌هاست. این فرض معادل یکسان بودن ویژگی‌های آماری داده‌ها با مکان است که عملاً برقرار نیست. مطالعاتی نظیر (دربهشتی، ۲۰۰۹؛ به‌نیان و مشهدی حسینعلی، ۱۳۹۸) در زمینه کولوکیشن با تابع کوریانس نایستا (Non-stationary) وجود دارد اما همه این مطالعات معطوف با تقریب دوبعدی هستند که کاربردی در انتقال فرسوی ندارند. ویلبرگ و همکاران (۲۰۱۹) با معرفی روش کولوکیشن باقی‌مانده، به‌جای ماتریس کوریانس همگن و ایزوتریک سیگنال، از ماتریس کوریانس خطا استفاده کردند. در این روش که از ماتریس کوریانس ضرایب مدل‌های ژئوپتانسیل استفاده می‌شود، حجم محاسباتی بسیار زیادی دارد.

برای نزدیک کردن داده‌ها به یک سیگنال ایستا باید سهم طول موج‌های بلند را از مدل‌های ژئوپتانسیل حذف کرد. همین‌طور باید اثر طول موج‌های کوتاه را که عمدتاً ناشی از توپوگرافی محلی است محاسبه و از روی داده کم کرد. بدین‌ترتیب می‌توان امیدوار بود داده‌ها به یک سیگنال ایستا با میانگین صفر که مورد نیاز کولوکیشن است نزدیک شود. علاوه‌بر این برای مناطق بزرگ می‌توان از توابع کوریانس محلی مختلف در بلوک‌های کوچک‌تر استفاده کرد که این امر می‌تواند به بهبود نتایج کولوکیشن

انتقال فروسوی داده‌های گرانی با تراکم کمتر از یک کیلومتر مسئله‌ای ناپایدار است.

۴. محاسبات عددی

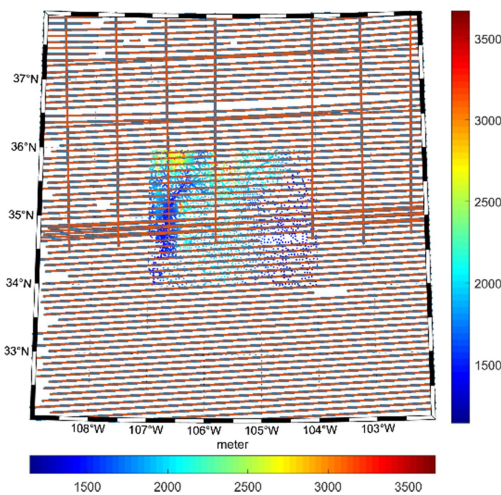
۴-۱. داده‌ها

محاسبات عددی این مطالعه در منطقه کلرادوی و بخشی از نیومکزیکو محدود به $(33^\circ < \varphi < 38^\circ)$ ؛ $(-10.2^\circ < \lambda < -10.9^\circ)$ انجام شده است. در این منطقه ۵۲۴۳۸۱ داده هوابرد در ۱۰۶ خط پروازی در اختیار است. نرخ نمونه‌برداری در راستای هر خط پرواز ۱ هرترز (حدود ۱۲۸ متر) و فاصله عرضی خطوط حدود ۱۰ کیلومتر است. منطقه آزمون نهایی نیز با توجه به شعاع انتگرال‌گیری در روش پواسن به $(34^\circ < \varphi < 36^\circ)$ ؛ $(-10.4^\circ < \lambda < -10.7^\circ)$ محدود شده است که شامل ۵۴۹۴ نقطه گرانی زمینی است. تغییرات ارتفاع در این منطقه کوهستانی بر اساس داده‌های زمینی به ترتیب ۱۱۴۱ و ۳۶۷۱ متر است. ارتفاع هر خط پرواز تقریباً ثابت ولی ارتفاع خطوط متغیر است. کمترین و بیشترین ارتفاع خطوط پرواز به ترتیب حدود ۵۲۰۸ و ۷۹۰۵ متر است. کوهستانی بودن منطقه و تغییر ارتفاع خطوط پرواز دو عامل اصلی در ناپایداری انتقال فروسو در این منطقه است. شکل ۱ وضعیت داده‌های زمینی و خطوط گرانی هوابرد را نشان می‌دهد. در این شکل خطوط قهوه‌ای داده‌های هوابرد را نشان می‌دهد.

$$\bar{K}(r_i, \psi, R) = \int_{C_j} K(r_i, \psi, R) d\Omega'. \quad (7)$$

گلی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند که در تقریب صفحه‌ای انتگرال پواسن (رابطه ۵)، انتگرال فوق دارای جواب تحلیلی است که در این مطالعه از آن استفاده می‌شود. در این مطالعه از تقریب صفحه‌ای انتگرال پواسن استفاده شده است. در مطالعه (مارتینک، ۱۹۹۶؛ ونیچک و همکاران، ۱۹۹۶) از تقریب صفحه‌ای و در مطالعه (مارتینک و گرافارند، ۱۹۹۷؛ اردلان، ۲۰۰۰) از تقریب بیضوی انتگرال پواسن استفاده شده است. گلی و نجفی‌علمداری (۲۰۱۱) از مقایسه سه تقریب صفحه‌ای، کروی و بیضوی انتگرال پواسن نشان دادند که اختلاف آنها کمتر از چند صد میکروگال است. دلیل این امر این است که کرنل پواسن با افزایش فاصله به شدت میرا می‌شود.

انتگرال پواسن همانند روش کولوکیشن توانایی انتقال فروسوی داده‌ها با پراکندگی نامنظم را دارا است. سهولت محاسباتی داده‌های گرید شده بیشتر است و انتقال فروسوی داده‌های گرید شده نیز با دقت بالاتری انجام می‌شود (گلی و همکاران، ۲۰۱۹). از نظر محاسباتی تفاوت قابل توجهی بین دو روش کولوکیشن و پواسن نیست زیرا در هر دو روش یک دستگاه معادلات خطی با اندازه مشاهدات باید حل شود. اما یکی از مهم‌ترین معایب انتگرال پواسن ناپایداری آن برای داده‌های با تراکم بالا است. گلی و همکاران (۲۰۱۸) نشان دادند که



شکل ۱. توزیع داده‌های زمینی و هوابرد در منطقه آزمون.

(PGM2017) تا درجه/مرتبه ۲۱۹۰/۲۱۹۰ در دسترس است. در محاسبه ضرایب این مدل از داده‌های هوابرد استفاده نشده است. متأسفانه اطلاعات بیشتری از این مدل در دسترس نیست. از این مدل به‌عنوان تقریب اولیه میدان ثقل در مطالعات قبلی نظیر (وانگ و همکاران، ۲۰۲۰) استفاده شده است. محاسبات عددی ما نشان می‌دهد که این مدل نسبت به سایر مدل‌ها نظیر EGM2008 در این منطقه به میدان ثقل واقعی نزدیک‌تر است.

برای بررسی دقت هر دو روش، ابتدا نوسان جاذبه مربوط به طول موج‌های ۳۶۰ تا ۲۱۹۰ در سطح پرواز و در نقاط زمینی در محل داده‌های حقیقی با استفاده از مدل refB محاسبه شد. برای نزدیک‌شدن داده‌های هوابرد به داده‌های واقعی، دو سطح نویز تصادفی ۱ و ۲ میلی‌گال به آنها اضافه شد. جدول ۱ پارامترهای آماری داده‌های شبیه‌سازی را با نویز ۱ میلی‌گال نشان می‌دهد.

در روش کالوکیشن ابتدا تابع کوریانس محلی محاسبه، سپس تابع پارامترهای تابع کوریانس مدل با فیت کردن به تابع کوریانس محلی به دست آمد. ماتریس کوریانس خوش حالت و معکوس آن بدون مشکلات عددی محاسبه شد. در روش کولوکیشن به‌طور مستقیم نوسانات جاذبی زمینی از نوسانات جاذبی هوابرد محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است در صورتی که نویز داده‌ها به شکل یک ماتریس قطری C_{vv} اعمال نشود، عدد شرط C_{SS} بسیار بزرگ و نتایج غیرقابل قبول خواهد شد. اعمال نویز داده‌ها به عناصر قطر اصلی نقش پارامتر پایداری را بازی می‌کند. در روش پواسن نوسانات جاذبی زمینی به‌طور مستقیم از داده‌های هوایی قابل محاسبه نیستند.

داده‌های گرانی هوابرد آلوده به انواع خطاهای اتفاقی، سیستماتیک و شیفت هستند. بر اساس کاتالوگ داده‌ها خطاهای سیستماتیک نظیر اثر اتووش و حرکات قائم از روی داده‌های خام برداشته شده است. همین‌طور خطای اتفاقی با سه بار فیلترینگ گوسین و خطای دریافت با مقایسه با ایستگاه ثقل مطلق در مرحله پیش پردازش حذف شده‌اند. شیفت احتمالی داده‌ها از مقایسه با مدل EGM2008 حذف شده است. بنابر کاتالوگ داده‌ها دقت قابل‌انتظار برای داده‌های هوابرد حدود یک میلی‌گال است. اما در مطالعه وانگ و همکاران (۲۰۲۰) نویز داده‌ها بین ۲-۳ میلی‌گال در نظر گرفته شده است.

با توجه به ارتفاع پرواز و میرایی میدان ثقل در ارتفاعات بالا، عملاً تراکم زیاد داده‌ها باعث بهبود بازایی فرکانس‌های بالای میدان نخواهد شد. زیرا این فرکانس‌ها در داده‌ها حضور ندارند. در عوض تراکم بالای داده‌ها باعث حجم زیاد محاسبات و ناپایداری بیشتر انتقال فرسوی می‌شود. از این رو بهتر است تراکم آنها با میانگین‌گیری کم شود. بنابراین در طول هر مسیر پرواز، نرخ داده‌ها از ۱ هرتز به $\frac{1}{2}$ هرتز (فاصله تقریبی ۲ کیلومتر) با درون‌یابی تقلیل یافت. پس از درون‌یابی تعداد داده‌های هوابرد به ۲۶۱۶۳ نقطه تقلیل پیدا کرد.

۴-۲. داده‌های شبیه‌سازی شده

قبل از کار روی داده‌های واقعی، برای بررسی کارایی دو روش ابتدا از داده‌های شبیه‌سازی شده استفاده می‌کنیم. در منطقه تست مدل ژئوپتانسیل تجربی refB حاصل از مدل ژئوئید جاذبی (XGeoid17B) و مدل ژئوپتانسیل

جدول ۱. پارامترهای آماری داده‌های شبیه‌سازی شده.

کمیت	کمینه	بیشینه	متوسط	انحراف معیار
داده‌های هوابرد				
Height (m)	۵۲۲۱/۷۶۵	۷۸۷۵/۶۲۱	۶۶۹۶/۶۵	۶۷۶/۱۲۸
δg (mGal)	-۴۶/۱۵۴	۷۰/۹۷۷	-۰/۰۲۸	۱۲/۹۷۱
داده‌های زمینی				
Height (m)	۱۱۴۱/۲	۳۶۷۱/۳	۱۸۷۰/۴۰۲	۳۲۱/۳۲۶
δg (mGal)	-۷۲/۹۵	۱۰۰/۶۲۳	-۷/۷۷۱	۲۷/۲۷

لذا ابتدا نوسانات جاذبی بروی ژئوئید منتقل و سپس با انتقال فروسو در نقاط زمینی محاسبه شد. همانند روش کولوکیشن، انتقال فروسو بروی پواسن نیز یک مسئله بدوضع است. برای غلبه بر ناپایداری دستگاه معادلات خطی با روش تکراری (پایگ و ساندرز، ۱۹۸۲) حل شده است. برای جلوگیری از تشدید نويز در جواب، از روش اصل اختلاف برای تعیین تکرار بهینه استفاده شد. در این روش، تکرارها تا زمانی ادامه پیدا می‌کنند که متوسط نرم باقی‌مانده‌ها از سطح نويز مشاهدات بیشتر باشد (گلی و همکاران، ۲۰۱۸). جدول ۲ پارامترهای آماری خطای دو روش را نشان می‌دهد. دقت انتگرال پواسن حدود ۳۰٪ بهتر از روش کولوکیشن است. این نتیجه برخلاف نتایج مطالعه ژائو و همکاران (۲۰۱۸) است. به نظر می‌رسد دلیل عمده در نتایج ضعیف روش پواسن در مطالعه آنها، استفاده از مدل نقطه‌ای گسسته سازی انتگرال پواسن باشد. با توجه به تغییرات شدید کرنل پواسن در فواصل کروی کوچک، استفاده از کرنل نقطه‌ای خطای محاسبات را افزایش می‌دهد (گلی و همکاران، ۲۰۱۱). با افزایش سطح نويز میانگین خطاها در هر دو روش افزایش می‌یابد. این مقدار در روش کولوکیشن به حدود ۱ میلی‌گال هم می‌رسد.

۳-۴. نتایج عددی داده‌های واقعی

برای انتقال فروسوی داده‌های هوابرد بروی کولوکیشن، باید آنها را تا حد امکان به یک سیگنال ایستا نزدیک کرد. برای این منظور لازم است اثر طول موج‌های بلند از روی داده‌ها حذف شود. برای حذف طول موج‌های بلند از مدل $refB$ تا درجه/مرتبه ۳۶۰ استفاده شد. از آنجا که انتقال داده‌های هوابرد از محل اندازه‌گیری به سطح زمین خارج از اجرام توپوگرافی است، نیازی به حذف اثر توپوگرافی به‌منظور هارمونیک کردن فضا نیست. با این وجود حذف اثر توپوگرافی باعث نزدیک شدن بیشتر

داده‌ها به یک سیگنال ایستا می‌شود. علاوه بر این در روش پواسن داده‌ها باید ابتدا بروی ژئوئید منتقل شوند که نیاز است اثر توپوگرافی قبلاً از روی داده‌ها حذف شود. با توجه برای حذف اثر طول موج‌های بلند، لازم است تنها طول موج‌های بزرگ‌تر از ۳۶۰ یعنی اثر توپوگرافی باقی‌مانده (RTM) از روی داده‌ها برداشته شود. روش معمول برای محاسبه RTM محاسبه اثر اجرام بین یک توپوگرافی رفرانس (طول موج‌های بلند توپوگرافی) و توپوگرافی واقعی، با انتگرال نیوتن است. استفاده از این روش برای محاسبه RTM دارای ابهاماتی در مورد نحوه تعریف طول موج‌های بلند توپوگرافی، تصحیح هارمونیک و روش مدل‌سازی آن است (هیرت و همکاران، ۲۰۱۹). در این مطالعه برای محاسبه اثر RTM از مدل پتانسیل پوسته $dV_ELL_Earth2014_5480$ (رکسر و همکاران، ۲۰۱۷) برای این منظور استفاده شده است. این مدل، حاوی ضرایب هارمونیک‌های کروی پتانسیل توپوگرافی زمین تا درجه/مرتبه ۵۴۸۰/۵۴۸۰ (تقریباً معادل ۲ دقیقه کمانی) است. اگرچه این مدل حاوی طول موج‌های بلند توپوگرافی نیست، اما نتایج عددی ما نشان می‌دهد که این مدل به خوبی طول موج‌های مربوط به طول موج‌های ۳۶۱ تا ۵۴۸۰ توپوگرافی را مدل می‌کند. زیرا پس از حذف اثر RTM انحراف معیار داده‌های هوایی و زمینی در حدود ۵۰ درصد کم می‌شود. البته همچنان نمی‌توان ادعا کرد که داده‌های باقی‌مانده ایستا هستند. یک روش برای کنترل ایستا بودن داده‌ها این است که تغییرات مکانی پارامترهای تابع کوریانس شامل ضریب C_0 (کوریانس در فاصله صفر) و طول همبستگی (فاصله‌ای که در آن کوریانس نصف C_0 می‌شود) را به‌دست آورد. از آنجا که منطقه محاسباتی این مطالعه کوچک است از کنترل ایستایی داده‌های باقی‌مانده صرف‌نظر شده است. جدول (۲) اطلاعات آماری نوسان جاذبی در نقاط هوابرد و آنومالی‌های جاذبه و زمینی را در اختیار قرار می‌دهد.

جدول ۲. خطای پارامترهای آماری داده‌های شبیه‌سازی شده. واحد: میلی‌گال.

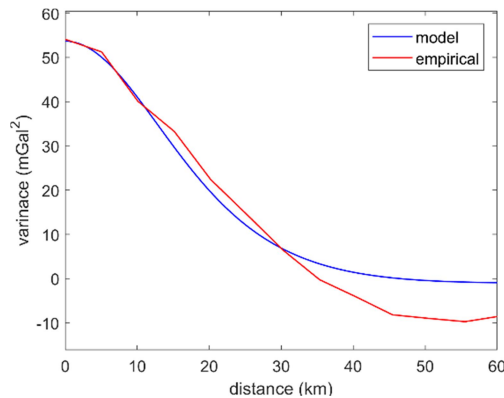
روش	نوفه	کمینه	بیشینه	متوسط	انحراف معیار
کولوکیشن	۱/۰	-۱۳/۷۲	۱۶/۳۶	۰/۳۶	۳/۸۸
	۲/۰	-۲۲/۰۰	۲۴/۳۰	۰/۸۳	۵/۴۲
پواسن	۱/۰	-۹/۵۵	۱۰/۳۵	۰/۲۴	۲/۹۶
	۲/۰	-۱۵/۷۳	۱۸/۰۴	۰/۴۰	۵/۴۲

جدول ۳. پارامترهای آماری آنومالی جاذبی زمینی و نوسان جاذبی هوابرد. واحد: میلی‌گال.

کمیت	کمینه	بیشینه	متوسط	انحراف معیار
داده‌های هوابرد				
δg	-۶۶/۱۲۳	۱۲۲/۵۱۰	۵/۲۶۸	۲۵/۵۷۶
$\delta g - \delta g_{360}$	-۴۵/۵۸۵	۶۹/۵۳۴	۰/۳۵۸	۱۲/۹۱۵
$\delta g - \delta g_{360} - RTM$	-۳۴/۰۵۴	۲۶/۳۸۷	۰/۴۹۵	۶/۳۲۵
داده‌های زمینی				
δg	-۷۷/۵۴۳	۱۷۸/۴۸۰	-۱۰/۰۲۹	۳۵/۱۵۷
$\delta g - \delta g_{360}$	-۷۶/۹۶۳	۱۵۳/۵۶۳	-۱۱/۱۹۳	۳۵/۱۵۷
$\delta g - \delta g_{360} - RTM$	-۶۶/۴۲۶	۵۷/۳۳۰	-۶/۴۷۰	۱۴/۳۸۷

در داده‌های گرانی زمینی کلرادو، ارتفاع ارتومتریک نقاط در دسترس است. در حالی که در داده‌های هوابرد ارتفاعات ژئودتیک معلوم است. برای سازگار کردن این سیستم، ارتفاع ژئودتیک داده‌های زمینی با معرفی ارتفاع ژئوئید از مدل refB محاسبه می‌شود. بدین ترتیب در روش انتگرال پواسن، نوسان جاذبه در سطح ارتفاع پرواز بروی بیضوی مرجع منتقل می‌شود. سپس نوسانات جاذبی در سطح بیضوی مرجع با انتقال فرسو و با معلوم بودن ارتفاع ژئودتیک در سطح زمین محاسبه می‌شود. لازم به ذکر است که برای انتقال مشاهدات به سطح بیضوی مرجع باید از انتگرال پواسن بیضوی استفاده کنیم (اردلان،

۱۹۹۹). اما در این مطالعه از تقریب صفحه‌ای این انتگرال استفاده شد. محاسبه کوریانس بین مشاهدات و مشاهدات و مجهولات نیازمند به آگاهی از رابطه تحلیلی تابع کوریانس است. در تابع کوریانس (۲) دو ضریب D و T با استفاده از برازش به کوریانس‌های تجربی به دست می‌آیند. شکل ۲ تابع کوریانس تجربی و تحلیلی را نشان می‌دهد. ضرایب D و T به ترتیب برابر $۳۲/۸$ و $۰/۱$ کیلومتر به دست آمده است. همچنین کوریانس داده‌ها برابر $C_0 = ۵۴/۱۹ \text{ mGal}^2$ است. با توجه به کوچک بودن منطقه آزمون، همه محاسبات تنها با یک تابع کوریانس انجام می‌شود.

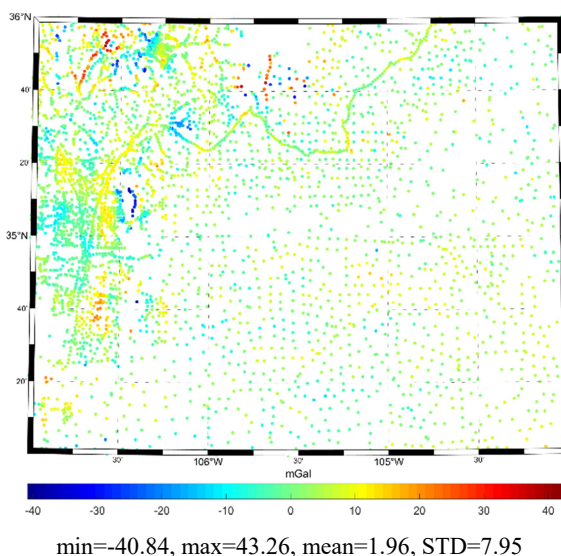


شکل ۲. تابع کوریانس تجربی و مدل.

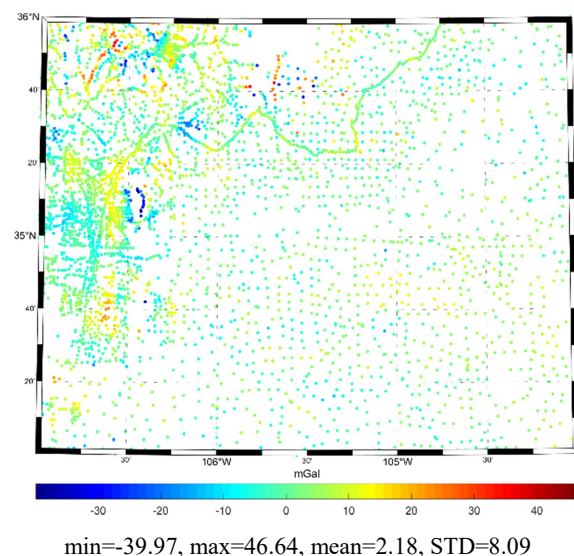
بخش دیگر آن مربوط به بایاس داده‌های زمینی است. بر اساس مطالعه صالح و همکاران (۲۰۱۳)، بایاس داده‌های گرانی در بخش هایی از کلرادو به بیش از ۲ میلی گال هم می‌رسد.

علی‌رغم عملکرد بهتر روش پواسن در داده‌های شبیه‌سازی شده، عملکرد دو روش در بازسازی داده‌های زمینی واقعی یکسان است. هرچند مقدار میانگین اختلافات کولوکیشن کمی بزرگ‌تر از میانگین روش پواسن است. اما اختلاف نتایج دو روش با داده‌های زمینی در انحراف معیار و مقادیر اکسترمم خطاها تقریباً یکسان است. البته یکسان بودن اختلاف نتایج دو روش در بازتولید داده‌های زمینی به مفهوم یکسان بودن نتایج عددی آنها نیست. شکل ۴ اختلاف بین جواب کولوکیشن و پواسن را نشان می‌دهد. انحراف معیار دو روش حدود ۲ میلی گال است که مقدار قابل توجهی است. اختلاف بین نتایج دو روش کولوکیشن و پواسن در سطح نویز داده‌ها است. همچنین به نظر می‌رسد برای انتخاب روش بهتر نیاز به داده‌های زمینی با کیفیت بیشتر است.

پس از محاسبه تابع کوریانس، ماتریس کوریانس بین مشاهدات محاسبه شد. با توجه به مطالعه (وانگ و همکاران، ۲۰۲۰) مقدار نویز داده‌های گرانی هوابرد کلرادو ۲/۰ میلی گال معرفی شد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد کولوکیشن توانایی انتقال فرسوسو بین دو سطح نامنظم دارد. لذا می‌توان به‌طور مستقیم نوسانات جاذبی باقی‌مانده در موقعیت نقاط زمینی محاسبه کرد. در روش پواسن نیز ابتدا نوسانات جاذبی هوابرد به یک گرید $3^{\circ} \times 3^{\circ}$ روی ژئوئید منتقل، سپس با انتقال فراسو در نقاط زمینی محاسبه شد. شکل ۳ اختلافات بین نوسانات جاذبی باقی‌مانده زمینی و محاسبه شده با دو روش فوق را نشان می‌دهد. انحراف معیار اختلافات در حدود ۸ میلی گال است که با توجه به نتایج داده‌های شبیه‌سازی شده نتیجه قابل قبولی است. زیرا داده‌های زمینی نیز خود دارای نویز هستند. بر اساس برآورد صالح و همکاران (۲۰۱۳) دقت داده‌های زمینی کلرادو حدود ۲/۲ میلی گال است. میانگین اختلافات داده‌های زمینی و داده‌های محاسبه شده در حدود ۲ میلی گال در روش پواسن و کولوکیشن است. بخشی از این اختلاف ناشی از خطای انتقال فرسوسو و

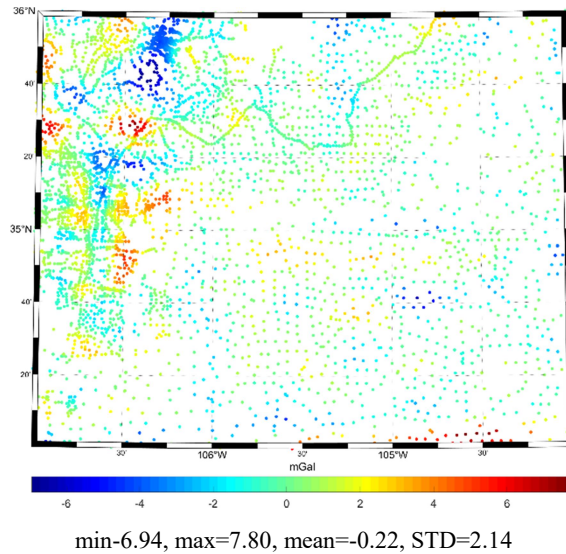


(ب)



(الف)

شکل ۳. اختلاف نوسان جاذبی زمینی و نوسانات جاذبی محاسبه شده از داده‌های هوابرد. الف) روش کولوکیشن، ب) روش پواسن. واحد میلی گال.



شکل ۴. اختلاف نتایج کولوکیشن و انتگرال پواسن. واحد میلی‌گال.

۵. نتیجه‌گیری

روش کولوکیشن به محدوده کمتری از داده‌ها نیاز دارد. در مقابل روش پواسن به پیش فرض تصادفی بودن داده‌های گرانی وابسته نیست و این بزرگ‌ترین مزیت آن نسبت به کولوکیشن است. در روش کولوکیشن لازم است تا حد امکان خواص آماری داده‌ها مستقل از مکان و جهت باشد. چنانچه این شرایط برای روش کولوکیشن برقرار باشد دقت آن به روش انتگرال پواسن نزدیک خواهد شد.

مراجع

به‌نیان، ب. و مشهدی حسینعلی، م.، ۱۳۹۸، استفاده از مدل کوواریانس ناهمسانگرد به منظور محاسبه تغییر شکل پوسته با استفاده از کولوکیشن کمترین مربعات، مطالعه موردی: شبه‌جزیره کنای. نشریه علمی علوم و فنون نقشه برداری، ۶(۴)، ۱۴۳-۱۵۹.

گلی، م.، ۱۳۹۸، بررسی تراکم ایستگاه‌های شبکه چندمنظوره ژئودزی سازمان نقشه‌برداری در تعیین ژئوئید: مطالعه موردی منطقه شمال-غرب کشور. نشریه علمی پژوهشی علوم و فنون نقشه‌برداری، ۸(۴)، ۳۹-۳۱.

در این مطالعه، صحت‌سنجی داده‌های هوابرد منطقه کلرادو با دو روش کولوکیشن و انتگرال پواسن با داده‌های گرانی زمینی انجام شد. نتایج اولیه هر دو روش وجود یک بایاس به میزان ۲ میلی‌گال را در داده‌های هوایی تأیید می‌کنند. اما با توجه به نویز و بایاس داده‌های زمینی نمی‌توان با قطعیت در این خصوص نظر داد. به‌عبارت دیگر با داده‌های زمینی موجود نمی‌توان بایاس داده‌های هوابرد در این منطقه را تخمین زد. انحراف معیار اختلاف دو روش کولوکیشن و پواسن در سطح نویز داده‌های هوابرد (حدود ۲ میلی‌گال) است. اما دقت آنها در بازسازی مشاهدات زمینی یکسان است. روش کولوکیشن توانایی انتقال یک‌باره داده‌ها از هر سطح نامنظم به هر سطح نامنظم دیگر را دارد. در این مطالعه در روش کولوکیشن ۳۰ دقیقه اثر لبه در نظر گرفته شد. اما در روش انتگرال پواسن، انتقال از سطح نامنظم به سطح نامنظم دیگر به‌طور مستقیم میسر نیست. لذا محاسبات در دو مرحله (انتقال فرسوی و انتقال فراسوی) انجام می‌شود. شعاع انتگرال‌گیری در هر مرحله ۳۰ دقیقه انتخاب شد. برای به‌عبارت دیگر

Ardalan, A. A., 1999, High Resolution Regional Geoid Computation in the World Geodetic Datum 2000, based on collocation of

linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity, Ph.D. thesis, University of Stuttgart.

- Alberts, B. and Klees, R., 2004, A comparison of methods for the inversion of airborne gravity data. *Journal of Geodesy*, 78, 1, 55–65.
- Barzaghi, R., Borghi, B., Keller, K., Forsberg, R., Giori, I., Lorreti, F., Olsen, A.V. and Srensen, L., 2009, Airborne gravity tests in the Italian area to improve the geoid model of Italy, *Geophysical Prospecting*, 57(4), 625–632.
- Cooper, G., 2004, The stable downward continuation of potential field data. *Exploration Geophysics*, 35, 4, 260–265.
- Darbeheshi, N., 2009, Modification of the Least-Squares Collocation Method for Non-Stationary Gravity Field Modelling. Curtin University of Technology. PhD thesis.
- Fedi, M. and Florio, G., 2002, A stable downward continuation by using the ISVD method. *Geophysical Journal International*, 151, 1, 146–156.
- Forsberg, R., 1987, A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 92(B2), 1305–1310.
- Goli, M., Foroughi, I. and Novak, P., 2018, On estimation of stopping criteria for iterative solutions of gravity downward continuation. *Canadian Journal of Earth Sciences*.
- Goli, M., Foroughi, I. and Novák, P., 2019, The effect of the noise, spatial distribution, and interpolation of ground gravity data on uncertainties of estimated geoidal heights. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 63(1), 35–54.
- Goli, M. and Najafi-Alamdari, M., 2011, Planar, spherical and ellipsoidal approximations of Poisson's integral in near zone, *Journal of Geodetic Science*, 17–24.
- Goli, M., Najafi-Alamdari, M. and Vaníček, P., 2011, Numerical behaviour of the downward continuation of gravity anomalies. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 55, 191–202.
- Hirt, C., Bucha, B., Yang, M. and Kuhn, M., 2019, A numerical study of residual terrain modelling (RTM) techniques and the harmonic correction using ultra-high-degree spectral gravity modelling. *Journal of Geodesy*, 93(9), 1469–1486.
- Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H., 2006, *Physical geodesy*. Springer Science and Business Media.
- Hsiao, Y. S. and Hwang, C., 2010, Topography-assisted downward continuation of airborne gravity: An application for geoid determination in Taiwan. *Terrestrial, Atmospheric and Oceanic Sciences*, 21, 627–637.
- Hwang, C., Hsiao, Y.-S., Shih, H.-C., Yang, M., Chen, K.-H., Forsberg, R. and Olesen, A. V., 2007, Geodetic and geophysical results from a Taiwan airborne gravity survey: Data reduction and accuracy assessment. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 112(B4).
- Martinec, Z., 1996, Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains. *Journal of Geodesy*, 70, 805–828.
- Martinec, Z. and Grafarend, E. W., 1997, Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution. *Journal of Geodesy*, 71, 562–570.
- Novák, P. and Heck, B., 2002, Downward continuation and geoid determination based on band-limited airborne gravity data. *Journal of Geodesy*, 76, 269–278.
- Pilkington, M. and Boulanger, O., 2017, Potential field continuation between arbitrary surfaces—Comparing methods. *Geophysics*, 82(3), J9–J25.
- Rexer, M., Hirt, C. and Pail, R., 2017, High-resolution global forward modelling: a degree-5480 global ellipsoidal topographic potential model. EGU General Assembly Conference Vienna, Austria.
- Saleh, J., Li, X., Wang, Y. M., Roman, D. R. and Smith, D. A., 2013, Error analysis of the NGS 'surface gravity database. *Journal of Geodesy*, 87(3), 203–221.
- Saadat, A., Safari, A. and Needell, D., 2018, IRG2016: RBF-based regional geoid model of Iran. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 1–28.
- Sansò, F., 2013, The local modelling of the gravity field by collocation. In: Sansò F, Sideris MG (eds) *Geoid determination: theory and methods*. Springer, Heidelberg.
- Tscherning, C. C. and Rapp, R. H., 1974, Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. Report 208, department of geodetic sciences, Ohio State University.
- Tziavos, I. N., Andritsanos, V. D., Forsberg, R. and Olesen, A. V., 2005, Numerical investigation of downward continuation methods for airborne gravity data, in *Gravity, Geoid and Space Missions*, C. Jekeli, L. Bastos, and J. Fernandes (eds.); 119–124.
- Wang, Y. M., Roman, D. R. and Saleh, J., 2008, Analytical Downward and Upward Continuation Based on the Method of Domain Decomposition and Local Functions, in *VI Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy* (P. Xu, J. Liu, and A. Dermanis (eds.)); 356–360.
- Wang, Y. M., Li, X., Ahlgren, K. and Krčmaric, J., 2020, Colorado geoid modeling at the US National Geodetic Survey. *Journal of*

- Geodesy, 94,10, 106.
- Willberg, M., Zingerle, P. and Pail, R., 2019, Residual least-squares collocation: use of covariance matrices from high-resolution global geopotential models. *Journal of Geodesy*, 93(9), 1739-1757.
- Xu, S., Yang, J., Yang, C., Xiao, P., Chen, S. and Guo, Z., 2007, The iteration method for downward continuation of a potential field from a horizontal plane. *Geophysical Prospecting*, 55, 6, 883–889.
- Vaniček, P., Sun, W., Ong, P., Martinec, Z., Najafi, M., Vajda, P. and Ter Horst, B., 1996, Downward continuation of Helmert's gravity. *Journal of Geodesy*, 71, 21–34.
- Zhang, C., Lü, Q., Yan, J. and Qi, G., 2018, Numerical Solutions of the Mean-Value Theorem: New Methods for Downward Continuation of Potential Fields. *Geophysical Research Letters*, 45, 8, 3461–3470.
- Zhao, Q., Xu, X., Forsberg, R. and Strykowski, G., 2018, Improvement of Downward Continuation Values of Airborne Gravity Data in Taiwan. In *Remote Sensing* 10, 12.

Comparison of least squares collocation and Poisson's integral methods in downward continuation of airborne gravity data

Goli, M.*

Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

(Received: 4 August 2021, Accepted: 10 Jan 2022)

Summary

Terrestrial gravimetry in large countries such as Iran with mountainous areas is time consuming and costly. Airborne gravimetry can be used to fill the data gravity gaps. Airborne gravity data are contaminated with different kinds of systematic and random errors that should be evaluated before use. In this study, the downward continued airborne gravity data is compared with existing terrestrial gravity data for detecting probable biases and measurement error. For this purpose, the efficiencies of the two least squares collocation and Poisson's integral methods are compared.

Collocation is an optimal linear prediction method in which the base functions are directly related to the covariance functions. The covariance function can be derived from empirical covariance fitting. This method can be utilized for downward continuation (DWC) of gravity data with arbitrary distribution. Often the homogeneous and isotropic covariance functions are used in collocation. However, in reality the statistical parameters of gravity data change with location and azimuth. This is the main drawback of collocation with stationary covariance function. Based on the Dirichlet's boundary values problem for harmonic functions, the downward continuation of airborne gravity data from the flight altitude to the geoid/ellipsoid surface is given by inverse of Poisson's integral. Similar to collocation, this method can be utilized for DWC of gravity data with arbitrary distribution. Poisson's integral as inverse problem is unstable in continuous form. However, for discrete data, the instability depends of the amplitude of high frequency components in the gravity observation such as error measurements.

Numerical computations for this study were performed in the Colorado region and northern parts of New Mexico that is bounded by $-109^\circ < \lambda < -102^\circ$; $33^\circ < \varphi < 38^\circ$. In this region, 524,381 airborne data are available in 106 flight lines. The along track sampling is 1 Hz (about 128 meters) and the cross distance between lines is about 10 km. To reduce the edge effect, the final test area is reduced to $-107^\circ < \lambda < -104^\circ$; $34^\circ < \varphi < 36^\circ$ which includes 5494 ground gravity points. To improve the efficiency of the computations, the sampling interval is decreased to $\frac{1}{20}$ Hz (about 2 km).

We first demonstrate the applications of the DWC methods using simulated gravity data. Short wavelength of gravity disturbance related to degree 360-2190, was generated using experimental global gravity model 'refB' at the two true positions of airborne and ground data. Two (white) noise 1 and 2 mGal was added to airborne data. Using these simulated observations, the two aforementioned methods were employed to determine the terrestrial disturbances. The comparison of computed and simulated terrestrial disturbances show that the accuracy of the Poisson method for both noise levels is about 30% better than the collocation.

For real data, the residual gravity data is computed by subtracting the long wavelengths up to degree 360 and corresponding residual topographical effect (RTM) from the real gravity observation. RTM is derived from the harmonic model (dV_ELL_Earth2014_5480) of spherical harmonic degrees between 360-5480. This model provides spherical harmonics of gravitational potential of upper crust. According to previous studies, the level noise of airborne gravity of Colorado is about 2.0 mGal. By introducing this noise into collocation, the problem becomes stable. In Poisson method, the iterative 'lsqr' method is used to solve the system of linear equations. To achieve stable solution, the iterations was terminate using discrepancy principal rule.

The residual anomaly gravity at Earth's surface can be computed directly using collocation. But in the Poisson method, computation is performed in two steps: 1 the airborne gravity disturbances are downward continued to a $3' \times 3'$ grid on the reference ellipsoid, 2- the terrestrial gravity disturbance is computed by upward continuation from ellipsoid disturbances. Despite of simulated data, the accuracy of the two methods is the same in terms of standard deviation of the differences. The mean and the standard values of difference is about 2mGal and 8mGal, respectively. According to a study by Saleh et al. (2013), the bias of in parts of Colorado reaches more than 2mGal. Therefore, due to the bias of terrestrial data, the estimated bias in airborne data cannot be confirmed.

Keywords: downward continuation, least squares collocation, Poisson's integral, airborne gravimetry, Colorado.

* Corresponding author:

goli@shahroodut.ac.ir