



Modeling Financial Markets Using Combined Ornstein-uhlenbeck Process with Levy Noise

Mina Mohammadi 

MSc., Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: minamohammadi@sci.uut.ac.ir

Parisa Nabati 

*Corresponding Author, Assistant Prof., Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Urmia University of Technology, Urmia, Iran. E-mail: p.nabati@uut.ac.ir

Abstract

Objective: The main purpose of this paper is to investigate a developed stochastic algorithm for modeling financial markets using the Ornstein-uhlenbeck process combined with Levy noise. Using the closing prices of stock markets, it can be concluded that the stochastic model of the Ornstein-uhlenbeck process with time-dependent parameters significantly improves the performance of stock price forecasting.

Methods: At first, we study the stochastic differential equation that is composed of Ornstein-uhlenbeck independent processes. Since these processes are extracted by the gamma process, we call it the gamma Ornstein-uhlenbeck process, We used a stochastic differential equation under the combination of two independent processes and simulate the time series data. The parameter estimation is done using the maximum likelihood estimator.

Results: To illustrate the performance of the proposed model, we apply the desired stochastic differential equation for a set of financial time series from Tehran Oil Refining Company, Saipa Azin, and the Cement of Urmia stock exchanges. The simulated data mimics the original financial time series data. This is observed from the estimates of root mean square error criteria.

Conclusion: Numerical results show that the predicted volatility of these companies is close to the simulated ones. The advantage of this methodology is the fact that the estimates obtained are stable around the true value and also the low errors indicate that the estimation procedure is accurate, therefore producing a higher forecasting accuracy. Thus, the proposed estimation algorithm is suitable with large data sets and has good convergence properties.

Keywords: Financial markets, Levy process, Ornstein-uhlenbeck model, Stochastic volatility

Citation: Mohammadi, Mina and Nabati, Parisa (2021). Modeling Financial Markets Using Combined Ornstein-uhlenbeck Process with Levy Noise. *Financial Research Journal*, 23(3), 404-418. <https://doi.org/10.22059/FRJ.2021.314584.1007105> (in Persian)



مدل سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنیک ترکیبی با نویز لوی

مینا محمدی

کارشناس ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: minamohammadi@sci.uut.ac.ir

پریسا نباتی

* نویسنده مسئول، استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: p.nabati@uut.ac.ir

چکیده

هدف: پیش‌بینی بازارهای مالی همواره برای فعالان اقتصادی حائز اهمیت بوده است. هدف اصلی این مقاله، ارائه مدل توسعه‌یافته جدید برای مدل سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنیک ترکیبی با نویز لوی است. با استفاده از قیمت‌های بسته شده بازارهای سهام، می‌توان نتیجه گرفت که مدل تصادفی ارنشتاین اولنیک با پارامترهای وابسته به زمان، به‌طور شایان توجهی عملکرد پیش‌بینی قیمت سهام را بهبود می‌بخشد.

روش: ابتدا به بررسی معادله دیفرانسیل تصادفی که از فرایندهای مستقل ارنشتاین اولنیک تشکیل شده است، پرداخته شد. این فرایندها را از طریق فرایند گاما استخراج کردیم، از این رو، آن را فرایند ارنشتاین اولنیک گاما می‌نامیم که کلاسی از فرایندهای زمان پیوسته لوی است و رفتاری با حافظه بلندمدت دارد. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی صورت گرفته است.

یافته‌ها: برای نشان دادن کارایی مدل ارائه شده، برخی از بازارهای سهام ایران، مانند شرکت‌های سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران، به‌صورت عددی شبیه‌سازی شدند. پارامترهای فرایند ارنشتاین اولنیک با نویز گاما با استفاده از داده‌های واقعی برآورد شد.

نتیجه‌گیری: نتایج عددی نشان داد که نوسان پیش‌بینی‌شده این شرکت‌ها به نوسان شبیه‌سازی‌شده نزدیک است و در آن دینامیک نوسان از مدلی خودهم‌بسته پیروی می‌کند. مزیت روش یادشده این است که برآوردهای به‌دست‌آمده در اطراف مقدار واقعی پایدارند، از این رو الگوریتم تخمین برای مجموعه داده‌های بزرگ امکان‌پذیر بوده و از خصوصیت هم‌گرایی خوبی برخوردار است.

کلیدواژه‌ها: بازارهای مالی، فرایند لوی، مدل ارنشتاین اولنیک، نوسان‌های تصادفی

استناد: محمدی، مینا؛ نباتی، پریسا (۱۴۰۰). مدل سازی بازارهای مالی با استفاده از فرایند ارنشتاین اولنیک ترکیبی با نویز لوی. *تحقیقات مالی*، ۲۳(۳)، ۴۰۴-۴۱۸.

مقدمه

بازار مالی برای افراد، همیشه به عنوان ابزاری برای افزایش ثروت جذاب بوده و کسانی که پیش‌بینی‌های دقیقی می‌کنند از آن سود می‌برند. پیش‌بینی مدل‌های خطی برای محاسبه بسیار ساده است، با این حال، آنها تقریبی از روابط تحت اختیار در داده‌ها را نشان می‌دهند که به پیش‌بینی‌های ضعیف منجر می‌شود. یکی از مشهورترین فرایندهایی که اخیراً از آن در مدل‌های مالی بسیار استفاده شده، فرایند لوی^۱ است که نمونه‌های مستقل و مانایی دارد. مدل‌های تصادفی استخراج‌شده از فرایند لوی توسط بارندرف و شفارد ارائه شده است (بارندرف و شفارد^۲، ۲۰۰۰). در اینجا ما یک ترکیب از فرایند لوی و فرایند ارنشتاین اولنیک^۳ را ارائه می‌دهیم. فرایند ارنشتاین اولنیک، یک فرایند گاوس مارکف (فرایندی با مشخصات گاوسی و مارکوف) ایستا بوده و تنها فرایندی است که سه شرط فرایندهای گاوس مارکوف را در نظر می‌گیرد و تبدیلات خطی فضا و زمان را ممکن می‌سازد. در طول زمان این فرایند به میانگین طولانی مدت خود میل می‌کند، از این رو به این فرایندها، فرایند بازگشت به میانگین^۴ می‌گویند. هاروی^۵ (۱۹۹۸) و بریدیت و لیما^۶ (۱۹۹۸) مدل‌های زمان گسسته‌ای را در نظر گرفتند که در آن لگاریتم نوسان به عنوان یک فرایند انتگرالی کسری مدل‌سازی می‌شود. کمتی و رنالت^۷ (۱۹۹۸) توسط مدل‌های زمان پیوسته، نوسان تحت یک فرایند انتگرالی کسری براونی را مدل کردند. با این تفاسیر می‌توان برخی از خصوصیات سری زمانی مالی، مانند تغییرات نوسان و متغیرهای آن را وابسته به زمان در نظر گرفت. در حال حاضر، اعتقاد تونیوا^۸ (۲۰۱۵) بر این است که زمان و قیمت بورس کالا ممکن است وابسته به مدل تصادفی باشد، یعنی بین تعداد نقاط در فواصل زمانی پی در پی هم‌بستگی وجود داشته باشد. بنابراین ما یک معادله دیفرانسیل تصادفی^۹ پیوسته و غیرمنفی پیشنهاد می‌کنیم که در توصیف وابستگی‌ها بین دنباله‌ای از قیمت‌های سهام مفید است. با این حال، یکی از ویژگی‌های اصلی سری زمانی مالی این است که مدل‌های قطعی برای توصیف کامل، آماری از نوسان‌ها را ندارند (بروکمن و چودری^{۱۰}، ۱۹۹۷). بنابراین مدل‌های تصادفی مناسب برای توصیف سری زمانی مالی به کار گرفته می‌شود. همان طور که در دیدگاه بیزی توسط تیلور^{۱۱} (۱۹۹۲) بیان شده است، نوسان‌های بازده مشاهده شده می‌توانند از طریق یک مدل پنهان مارکوف بیان شوند و به موجب آن سری زمانی مالی، فرایند مشاهده شده و نوسان‌ها، حالت پنهان باشند. این نوع مدل‌ها حالت خاصی از مدل‌های نوسان‌های تصادفی^{۱۲} هستند. اشکال اصلی استفاده از مدل‌های نوسان تصادفی، جای‌گذاری داده‌ها با دقت بالا در فرایند تصادفی و مشخصات مدل است، زیرا

1. Levy Process
2. Barndorff-Nielsen & Shephard
3. Ornstein-Uhlenbeck Process
4. Mean Reverting
5. Harvey
6. Breidt & Lima
7. Comte & Renault
8. Tweneboah
9. Stochastic Differential Equation
10. Brockman & Chowdhury
11. Taylor
12. Stochastic Volatility

محاسبات آنها شامل ادغام عددی روی انتگرال‌هایی با بعد بالا است که اکثر آنها ساده نیستند (روبیو و جانسن^۱، ۲۰۱۳). در این مقاله، یک تکنیک برای پیش‌بینی سری زمانی مالی با استفاده از مدل تصادفی ارنشتاین اولنبرگ ارائه می‌دهیم. با استفاده از قیمت بسته شده بازارهای سهام که در آن، داده‌های واقعی بازار از سایت fipiran گرفته می‌شود، نتیجه می‌گیریم مدل تصادفی ارنشتاین اولنبرگ با پارامترهای وابسته به زمان، به‌طور شایان توجهی عملکرد پیش‌بینی قیمت سهام را بهبود می‌بخشد. ما از یک معادله دیفرانسیل تصادفی که ترکیبی از دو فرایند مستقل ارنشتاین اولنبرگ است، برای شبیه‌سازی داده‌های سری زمانی استفاده می‌کنیم. این مدل تصادفی رفتار فیزیکی داده‌ها را در نظر می‌گیرد. در نهایت، یک برآورد خوب برای قیمت‌های شبیه‌سازی شده شرکت‌های سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران به دست می‌آوریم. این مقاله بدین صورت سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم، پیشینه پژوهش ارائه شده است. در بخش سوم، روش‌شناسی پژوهش که قسمت اصلی مقاله است، بررسی می‌شود. مدل ارنشتاین اولنبرگ ترکیبی گاما و تخمین پارامترهای آن در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند. یافته‌های پژوهش شامل شبیه‌سازی و نتایج عددی مربوط به بازارهای بورس سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران در بخش چهارم مطرح می‌شود. در بخش انتهایی نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار این مقاله بیان می‌شود.

پیشینه پژوهش

وجود بازار سرمایه فعال و پویا، یکی از نشانه‌های توسعه‌یافتگی کشورها در سطح بین‌المللی در نظر گرفته می‌شود، زیرا در اغلب کشورهای توسعه یافته، بازار سرمایه یکی از بسترهای اقتصادی بسیار مهم برای سرمایه‌گذاری و تأمین مالی شرکت‌ها و بنگاه‌های اقتصادی به شمار می‌رود. به همین دلیل، پرداختن به مسائل مربوط به آن بسیار حائز اهمیت است (راعی، باجلان و عجم، ۱۴۰۰). در سال‌های اخیر علاقه به استفاده از مدل‌های ریاضی به‌منظور پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی، به‌طور چشمگیری افزایش یافته است. معادلات دیفرانسیل تصادفی جزء بهترین مدل‌ها برای مدل‌سازی بازارهای مالی است؛ زیرا به دلیل داشتن عامل تصادفی، می‌تواند تأثیر عوامل اقتصادی و سیاسی را در مدل لحاظ کند (فرنوش، نباتی و عزیز، ۱۳۹۵). از جمله معروف‌ترین این معادلات مدل‌های بازگشت به میانگین است که می‌توانند به‌عنوان خاصیتی تعریف شوند که همیشه به یک سطح معین ثابت یا متغیر زمانی خاص با واریانس محدود در اطراف آن برگردند. اولین توصیف فرایند بازگشت به میانگین را ارنشتاین و اولنبرگ ارائه شد. این فرایند با محور لوی به‌عنوان فرایند غیرگوسی اولین بار توسط بارندرف و شفارد (۲۰۰۰) مطرح شد تا نوسان‌های بازارهای مالی را توصیف کند. بعد از آنها تحقیقات گسترده‌تری در زمینه این معادلات و برآورد پارامترهای آنها توسط محققان صورت گرفت که از جمله آنها می‌توان به پژوهش‌های والدیوسو، شاتن و تورلینک^۲ (۲۰۰۹)، اسپیلوپولس^۳ (۲۰۰۹)، ماریانی، معصوم و تونبو^۴ (۲۰۱۸)،

1. Rubio & Johansen
 2. Valdivieso, Schoutens, & Tuerlinckx
 3. Spiliopoulos
 4. Mariani, Masum, & Tweneboah

رائو و تافر^۱ (۲۰۱۹) و سابینو و پترونی^۲ (۲۰۲۰) اشاره کرد. در دهه‌های اخیر، همسو با پژوهش‌های خارجی صورت گرفته، شاهد پژوهش‌های داخلی هرچند اندک در موضوع مدل‌سازی بازارهای مالی با استفاده از رویکرد تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده‌ایم که در ادامه به چند نمونه از آنها اشاره شده است. نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون به مدل‌سازی شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. رحمانی و جعفریان (۱۳۹۶) با معرفی توان هرست به عنوان شاخصی از حافظه بلندمدت در روند قیمت سهام، مدل بلک شولز کسری متکی به حرکت براونی کسری با پارامتر هرست را ارائه نمودند. راعی، باسزا و مهدی‌خواه (۱۳۹۹) با استفاده از مدل Mean-CVAR به بهینه‌سازی سبد سهام پرداختند. نتیجه جالب مقاله ایشان نشان داد با در نظر گرفتن ناهمسانی واریانس موجود در بازار ایران و وارد کردن این موضوع در مدل‌های بهینه‌سازی، عملکرد بهتری در بهینه‌سازی سبدهای سرمایه‌گذاری حاصل می‌شود. حسینی ابراهیم‌آباد، حیدری، جهانگیری و قائمی اصل (۱۳۹۸) با استفاده از رویکرد بیزی به شبیه‌سازی تصادفی مدل‌های گارچ با توزیع‌های چند متغیره چوله پرداختند. ایشان به این نتیجه رسیدند که شوک‌های وارد بر متغیرها، همبستگی بین آنها را تحت تأثیر قرار می‌دهند. مدل جدیدی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی با معرفی مدل تلاطم تصادفی هستون با در نظر گرفتن فرایند پرش توسط جنابی و دهمره قلعه‌نو (۱۳۹۸) ارائه شد. ایشان با اضافه کردن جمله پرش به مدل هستون به مدل‌سازی تغییرات ناگهانی در بازار مالی پرداختند. ولیدی، نجفی و ولیدی (۱۳۹۹) با استفاده از مدل بازگشت به میانگین چند دوره‌ای که مبنای الگوریتم‌های تبعیت از بازنده است از یک تکنیک یادگیری برای بهینه‌سازی پرتفو بهره بردند تا پرتفوی دوره آتی را مشخص کنند.

روش‌شناسی پژوهش

در این قسمت، مدل ارنشتاین اولنیک با نویز لوی را معرفی می‌کنیم. فرایندهای تصادفی و لوی نقش اساسی را در امور ریاضی مالی و همچنین سایر زمینه‌های علمی مانند فیزیک (آشفتگی)، مهندسی (ارتباطات از راه دور، سدها)، علوم آماری (بیمه ریسک) و امور دیگر ایفا می‌کنند.

تعریف ۱. یک فرایند تصادفی روی \mathbb{R}^n مانند $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ را فرایند لوی می‌گوییم که در شرایط زیر صدق کند (گریگوریو،^۳ ۲۰۰۲).

الف) برای هر انتخاب $0 < n < t_n < \dots < t_1 < t_0 \leq 0$ ، متغیرهای تصادفی زیر مستقل باشند؛ یعنی فرایند

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

ب) $X_0 = 0$.

پ) توزیع $X_{s+t} - X_s$ به s وابسته نباشد؛ یعنی فرایند دارای نموهای مانا باشد.

د) فرایند به‌طور تصادفی پیوسته باشد.

1. Rao & Tauffer
2. Sabino & Petroni
3. Grigoriu

ه) برای هر $\omega \in \Omega$ ، $X_t(\omega)$ برای $t \leq 0$ از راست پیوسته و برای $t > 0$ دارای حد چپ باشد.

تعریف ۲. توزیع متغیر تصادفی X را بی نهایت تقسیم‌پذیر گویند هرگاه برای هر $n = 1, 2, \dots$ متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل از هم $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ چنان موجود باشند که $X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)}$ هم توزیع با X باشد (گریگوریو، ۲۰۰۲).

قضیه زیر یک رابطه بین فرایندهای لوی و توزیع‌های بی نهایت تقسیم‌پذیر را بیان می‌کند.

قضیه ۱. فرض کنید $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند لوی باشد. در این صورت برای هر $t \geq 0$ فرایند $\{X_t\}_{t \geq 0}$ دارای توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر F است. برعکس، اگر F توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر باشد، آنگاه فرایند لوی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ موجود است؛ به طوری که توزیع X_1 توسط F داده شده است (گریگوریو، ۲۰۰۲).

فرض کنید $\phi_{X_t}(u) = \mathbb{E}(e^{-iuX_t}) = e^{i\psi(u)}$ یعنی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ باشد؛ در این صورت $\psi(u) = \log(\phi(u))$. در این صورت $\psi(u)$ در رابطه لوی - خینچین^۱ زیر صدق می‌کند:

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iuxI_{|x|<1}) \nu(dx) \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در آن $\gamma \notin \mathbb{R}$ ، $\sigma^2 \geq 0$ و اندازه روی $\mathbb{R} - \{0\}$ است، به طوری که

$$\int_{-\infty}^{\infty} \inf(1, x^2) \nu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty \quad (\text{رابطه ۲})$$

از تجزیه لوی ایتو مشاهده می‌کنیم که در حالت کلی هر فرایند لوی از سه قسمت مستقل از هم تابع قطعی، قسمت براونی و قسمت پرش محض تشکیل شده است. می‌گوییم که توزیع بی‌نهایت تقسیم‌پذیر متناظر دارای یک سه‌گانه لوی به صورت $(\gamma, \sigma^2, \nu(dx))$ است. اندازه ν را اندازه لوی X گویند. با مقدمات مطرح شده درباره فرایند لوی، فرایند ارنشتاین اولنبرگ با نویز لوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این فرایندها با محور لوی، به‌عنوان فرایندهای غیرگاوسی ارنشتاین اولنبرگ شناخته می‌شوند (بارندرف و شفارد، ۲۰۰۱).

تعریف ۳. یک فرایند تصادفی مانا و غیرمنفی با زمان پیوسته $\{S_t\}_{t \geq 0}$ فرایندی از نوع ارنشتاین اولنبرگ است، اگر از سمت راست پیوسته، در هر نقطه دارای حد چپ و در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق کند (اکسندال^۲، ۲۰۱۰).

$$dS_t = -\lambda S_t dt + dZ_t \cdot S_0 > 0, \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{رابطه ۳})$$

که در آن $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ فرایند لوی، λ پارامتر نرخ و عددی مثبت است.

فرایند $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ را فرایند استخراج شده توسط فرایند لوی یا محرک متناظر با S_t گوئیم. محرک Z یک فرایند لوی پرش محض است. بنابراین رابطه ۳ یک فرایند پرش است. فرایند لوی $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ دارای تغییرات متناهی روی بازه

1. Levy-Khintchine
2. Oksendal

متناهی است. همچنین برای هر تابع پیوسته و خوش تعریف f ، انتگرال $\int_0^t f(s) dZ_s$ موجود است. می‌توان نشان داد رابطه ۳ دارای جواب تحلیلی زیر است (اکسندال، ۲۰۱۰).

$$S_t = e^{-\lambda t} S_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dZ_s \quad \text{رابطه ۴}$$

در ادامه این بخش، قسمت اصلی مقاله را ارائه می‌دهیم. نمودار قیمت نشان می‌دهد که نوسان‌های داده‌ها در طول زمان ثابت نیستند. این موضوع نشان‌دهنده نوعی غیرایستایی در نوسان‌هاست و دوره‌های با نوسان بالا، تمایل به هم‌بستگی دارند. برای مدل‌سازی رابطه ۴، به منظور ارائه قابلیت‌های تحلیلی فراوان و اطمینان از ساختارهای هم‌بستگی برای فرایند S_t ، مجموع فرایندهای مستقل ارنشتاین اولنیک را در نظر می‌گیریم، یعنی

$$S_t = \sum_{i=1}^m w_i S_i e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{i=1}^m w_i e^{\lambda_i(t-s)} dZ_{\lambda_i s} \quad \text{رابطه ۵}$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad \text{که در آن}$$

هدف از این کار به دست آوردن فرم پارامتری توزیع حاشیه‌ای رابطه ۵ با دخیل بودن نویز لوی است. این کار با مشخص کردن توزیع فرایند لوی انجام می‌گیرد. مدلی که دارای دو جز از مدل ۵ است، در قالب رابطه ۶ تعریف شده است.

$$S_t = w_1 S_t^1 + w_2 S_t^2, w_1 + w_2 = 1 \quad \text{رابطه ۶}$$

که هر جزء فرایند، یک فرایند ارنشتاین اولنیک مستقل با پارامترهای نرخ λ_1 و λ_2 است. در نتیجه داریم:

$$S_t = w_1 S_t^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^t e^{\lambda_1 s} dZ_{\lambda_1 s} + w_2 S_t^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{\lambda_2 s} dZ_{\lambda_2 s} \quad \text{رابطه ۷}$$

با استفاده از تغییر متغیر می‌توانیم بنویسیم:

$$S_t = w_1 S_t^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^s dZ_s + w_2 S_t^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s dZ_s \quad \text{رابطه ۸}$$

$$\text{که در آن } S_t^1, S_t^2 > 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0, t \geq 0.$$

برای ادامه هر چه بیشتر ترکیب مدل ارنشتاین اولنیک، به تعریف خود تجزیه‌پذیری زیر نیاز داریم.

تعریف ۴. یک توزیع احتمال P روی \mathbb{R} را خود تجزیه‌پذیر^۱ یا متعلق به کلاس لوی L گوئیم، هرگاه برای هر $\lambda > 0$ توزیع احتمال P_λ روی \mathbb{R} وجود داشته باشد؛ به طوری که (کوفارو و سابینو^۲، ۲۰۱۷):

1. Self-decomposable
2. Cufaro-Petroni & Sabino

$$\phi(v) = \phi_\lambda(v)\phi(e^{-\lambda}v), v \in \mathbb{R} \quad \text{رابطه ۹}$$

که در آن ϕ و ϕ_λ به ترتیب توابع مشخصه مربوط به متغیرهای تصادفی متناظر با احتمالات P و P_λ است. یک متغیر تصادفی S با کلاس لوی L را خودتجزیه‌پذیر می‌گوییم.

قضیه ۲. فرض کنید $v(dx)$ اندازه لوی، یک اندازه تقسیم‌پذیر P روی \mathbb{R} باشد؛ آنگاه حالت‌های زیر معادل هستند (بارلو و همکاران^۱، ۱۹۹۲).

الف) P خود تجزیه‌پذیر است.

ب) توابع روی نیم‌خط مثبت توسط $v([-\infty, -e^s])$ و $v([e^s, \infty))$ هر دو محدب هستند.

پ) $v(dx)$ به فرم $v(dx) = u(x)dx$ است؛ به طوری که $|x|u(x)$ روی $(-\infty, 0)$ افزایشی و روی $(0, \infty)$ کاهشی است.

اگر $u(x)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه شرط لازم و کافی (ب) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$u(x) + x'u(x) \leq 0, \forall x \neq 0 \quad \text{رابطه ۱۰}$$

اگر چگالی لوی $u(x)$ دارای توزیع معلوم باشد، آنگاه رابطه ۱۰ برای تعیین خودتجزیه‌پذیری مفید است. حال به تعریف تابع $k(s)$ به صورت زیر می‌پردازیم:

$$k(s) = v([e^s, \infty)) = \int_{e^s}^{\infty} u(x)dx \quad \text{رابطه ۱۱}$$

از آنجایی که برای هر s ، $k(s)$ محدب است پس $k''(s) \geq 0$ در نتیجه حالت‌های زیر برقرار می‌شود:

$$\begin{aligned} -e^s u(e^s) - e^{2s} u'(e^s) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -u(e^s) - e^s u'(e^s) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow u(e^s) + e^s u'(e^s) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow u(x) + x u'(x) &\leq 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

قضیه زیر ارتباطی بین خود تجزیه‌پذیری و فرایندهای لوی فراهم می‌کند.

قضیه ۳. اگر S خود تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه فرایند تصادفی مانا S و فرایند لوی Z_t وجود دارد؛ به طوری که $S_t \stackrel{d}{=} S$ و

$$S_t = w_1 S_t^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^s dZ_s + w_2 S_t^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s dZ_s \quad \text{رابطه ۱۲}$$

برعکس، اگر S_t یک فرایند تصادفی مانا و Z_t فرایند لوی باشد؛ به طوری که S_t و Z_t در رابطه ۱۲ برای هر $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ صدق کند، آنگاه S خود تجزیه‌پذیر است؛ به طوری که \underline{d} به معنای برابری در توزیع است (جورک و وروات^۲، ۱۹۸۳).

مدل ترکیبی ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$

قانون مانایی مدل ارائه شده توسط توزیع $\Gamma(a, b)$ از رابطه ۱۲ را در نظر بگیرید، که مدل ترکیبی ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$ را توضیح می دهد. از آنجایی که فرایند استخراج شده لوی از مدل ارنشتاین اولنیک ترکیبی توسط توزیع $\Gamma(a, b)$ که یک توزیع پواسن ترکیبی است، به دست می آید، در هر بازه زمانی فشرده تعداد محدودی از زمان ها را پرش می کند. بنابراین فرایند ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$ ترکیبی، در هر بازه زمانی فشرده به تعداد متناهی بار دارای جهش است. جهت یادآوری، فرایند $\Gamma(a, b)$ به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۵. فرایند تصادفی $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ با پارامترهای a و b را فرایند گاما گویند، هرگاه در شرایط زیر صدق کند (اسپیلوپولس، ۲۰۰۹):

$$X_0 = 0 \text{ (الف)}$$

(ب) فرایند دارای نمو های مستقل باشد.

(پ) فرایند دارای نمو های مانا باشد.

(د) برای $s < t$ ، متغیر تصادفی $X_t - X_s$ دارای توزیع گاما $\Gamma(a(t-s), b)$ باشد. متغیر تصادفی X دارای توزیع گاما $\Gamma(a, b)$ ، با پارامترهای نرخ و مکان a و b است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \forall x > 0 \text{ (رابطه ۱۳)}$$

هدف ما تخمین پارامترهای a, b و λ_1 از رابطه ۱۲ با استفاده از مشاهدات سری زمانی مدنظر است. قبل از تخمین پارامترها، یک اندازه لوی را بیان می کنیم.

اگر F_Z اندازه لوی $Z(1)$ باشد، فرض می کنیم که یک ثابت مانند $M > 0$ وجود داشته باشد؛ به طوری که به ازای هر $|v| \leq M$ رابطه $\int_{|x|>0} e^{vx} F_Z(dx) < \infty$ برقرار باشد.

تخمین پارامترهای مکان a و نرخ b از مدل ترکیبی ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$

لم زیر گشتاور $Z(1)$ را با گشتاور توزیع مانا $\{S_t\}_{t \geq 0}$ مرتبط می کند.

لم ۱. فرض کنید $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ یک فرایند لوی و M یک ثابت بزرگ است که در رابطه فوق صدق می کند و $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ و $\text{var}(Z(1)) = \sigma^2 < \infty$ و $(Z(1)) = \mu < \infty$ ، آنگاه عبارتهای زیر برقرار می شود (اسپیلوپولس، ۲۰۰۹).

$$E(S_0) = \mu \text{ (الف)}$$

$$\text{var}(S_0) = \frac{\sigma^2}{2} \text{ (ب)}$$

از لم ۱، پارامترهای a و b مرتبط با μ و σ^2 به صورت زیر هستند:

$$a = \frac{2\mu^2}{\sigma^2} \text{ and } b = \frac{2\mu}{\sigma^2} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

تخمین پارامتر شدت

به منظور برآورد پارامتر شدت λ_1 ، کار را با تعریف تابع خودهم‌بستگی برای فرایند داده شده در رابطه ۸ شروع می‌کنیم که به صورت زیر است.

$$\rho(k) = w_1 e^{-\lambda_1 |k|} + w_2 e^{-\lambda_2 |k|} \quad \text{رابطه ۱۵}$$

از تابع خودهم‌بسته بیان شده در (رابطه ۱۵) می‌توانیم پارامتر λ_1 را تخمین بزنیم. فرض کنید در رابطه ۱۵ تساوی $\lambda_1 = \lambda_2$ برقرار باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\rho(k) = w_1 e^{-\lambda_1 |k|} + w_2 e^{-\lambda_2 |k|} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

$$\rho(k) = e^{-\lambda_1 |k|} (w_1 + w_2) \quad \text{رابطه ۱۷}$$

$$\text{بنابراین، } \lambda_1 = -\frac{\log \rho(k) - \log(w_1 + w_2)}{k} \text{ خواهد بود.}$$

بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $k = 1$. در نتیجه تخمین پارامتر λ_1 به صورت زیر است:

$$\hat{\lambda}_1 = -\log \rho(1) - \log(w_1 + w_2) \quad \text{رابطه ۱۸}$$

یافته‌های پژوهش

در این بخش، نحوه شبیه‌سازی چند سری زمانی مالی مربوط به بازارهای بورس ایران را با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده در بخش قبل، تحت مدل ارنشتاین اولنبرگ $\Gamma(a, b)$ بررسی می‌شود. قیمت‌های روزانه بازار بورس سهام را به عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی، $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ در نظر بگیرید؛ به طوری که متغیر تصادفی S_1 مقدار داده شده سری را برای دوره زمانی اول نشان می‌دهد، متغیر S_2 قیمت را برای دوره زمانی دوم مشخص می‌کند، S_n مقدار آن را برای دوره زمانی n ام بیان می‌کند. به طور کلی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی، S_t نمایه شده توسط t به عنوان یک فرایند تصادفی شناخته می‌شود. این فرایند خصوصیت‌های داده‌هایی را نشان می‌دهد که با گذشت زمان به صورت تصادفی اتفاق می‌افتد.

روش شبیه‌سازی

در این بخش، به روش شبیه‌سازی مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبرگ $\Gamma(a, b)$ می‌پردازیم که از یک فرایند لوی استخراج شده است. فرایند لوی استخراج شده برای مدل ترکیبی ارنشتاین اولنبرگ $\Gamma(a, b)$ ، یک فرایند پواسن ترکیبی است. در ادامه، شبیه‌سازی خود را بر اساس معادله دیفرانسیل تصادفی پیشنهادی زیر پایه‌گذاری خواهیم کرد:

$$S_t = w_1 S_t^1 e^{-\lambda_1 t} + w_1 e^{-\lambda_1 t} \int_0^{\lambda_1 t} e^s dZ_s + w_2 S_t^2 e^{-\lambda_2 t} + w_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^{\lambda_2 t} e^s dZ_s. S^1, S^2 > 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0, t \geq 0 \quad \text{رابطه ۱۹}$$

جواب معادله دیفرانسیل تصادفی از طریق فرایند لوی استخراج شده و با تقریب انتگرال‌های مربوطه شبیه‌سازی می‌شود.

شبیه‌سازی با استفاده از فرایند لوی استخراج شده

در ادامه، شبیه‌سازی مدل ترکیبی ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$ تشریح می‌شود. $\{S_t\}_{t \geq 0}$ در نقاط زمانی $n = 0, 1, 2, \dots$ و $t = n\Delta t$ به همراه فرایند لوی استخراج شده به صورت زیر است:
 گام اول) شبیه‌سازی فرایند پواسن $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ با پارامتر شدت λ
 گام دوم) محاسبه تعداد پرش‌ها در هر بازه فشرده.
 گام سوم) نمونه‌گیری از مسیرهای مدل ترکیبی ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$.

$$S_{n\Delta t} = w_1 S_{n\Delta t} e^{-\lambda_1 \Delta t} + w_1 \sum_{N_{(n-1)\Delta t}+1}^{N_{n\Delta t}} \exp(-U_n \lambda \Delta t) + w_2 S_{n\Delta t} e^{-\lambda_2 \Delta t} + w_2 \sum_{N_{(n-1)\Delta t}+1}^{N_{n\Delta t}} \exp(-U_n \lambda \Delta t) \quad \text{رابطه ۲۰}$$

تذکره ۱. قسمت نمایی و اعداد تصادفی یکنواخت مستقل U_n در مجموع، اجازه می‌دهد تا پرش‌ها در هر بازه زمانی اتفاق بیفتند. برنامه‌نویسی به زبان متلب برای شبیه‌سازی فرایند گفته شده در بالا به کار گرفته می‌شود. حال، مسیرهای مستقل از مدل خود را با استفاده از مراحل زمانی مختلف شبیه‌سازی می‌کنیم.

شبیه‌سازی با استفاده از داده‌های واقعی

در این بخش، رفتار سری زمانی مالی مربوط به چند بازار بورس ایران، به‌طور مختصر بررسی می‌شود. در این مطالعه، قیمت‌های بسته شده روزانه شاخص‌های سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران از سال ۱۳۹۴ تا ۱۳۹۸ در نظر گرفته شده است. از میان ارقام، مشاهده می‌کنیم که نوسان‌ها (یا تغییرپذیری) داده‌ها ثابت نیست و با گذشت زمان تغییر می‌کند. این نشانه‌ای از بی‌ثباتی احتمالی در نوسان‌هاست و دوره‌های نوسان بالا به هم‌بستگی میل می‌کنند. این هم‌بستگی خوشه‌بندی نوسان‌ها نامیده می‌شود. نکته مهمی که از نمودارها به دست می‌آید، پرش‌های قیمت است.

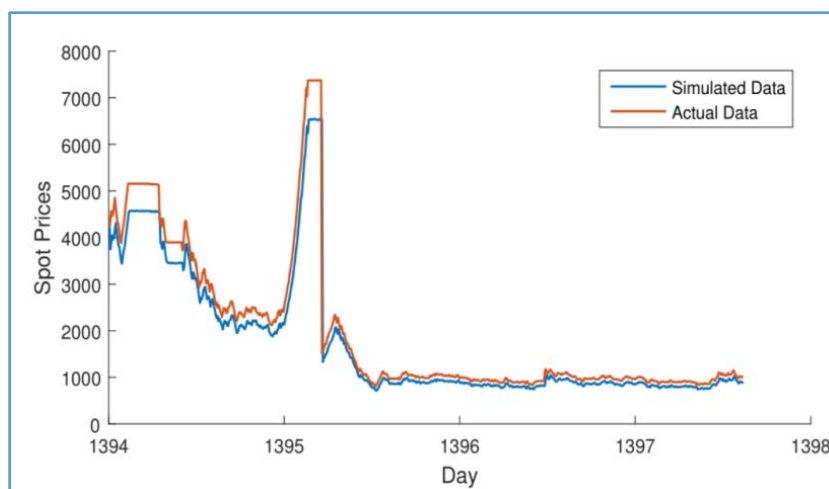
این پرش‌ها می‌توانند با استفاده از فرایند پواسن (همان‌طور که در شبیه‌سازی نیز آورده شده است) مدل شوند. در جدول ۱ نتایج عددی برای قیمت‌های بسته شده بورس‌های سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران تحت مدل ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$ درج شده است. برآورد پارامترهای λ_1 و λ_2 را با استفاده از معادلات داده شده به روش ماکزیمم درست‌نمایی در متلب به دست می‌آوریم تا متناسب با مدل ارنشتاین اولنیک $\Gamma(a, b)$ شود. با توجه به شکل‌های ۱، ۲ و ۳، داده‌های شبیه‌سازی شده با سری زمانی اصلی بسیار متناسب است. این موضوع در نتایج برآوردهای خطای میانگین مربعات در جدول ۱ نیز مشاهده می‌شود. برای بررسی تناسب مدل، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) را برای هر بورس کالا محاسبه کردیم. خطای میانگین مربعات اندازه‌گیری شده نشان می‌دهد که مدل ارائه شده به چه میزان با مجموعه داده‌های بازار متناسب است. در نقاط داده‌های سری‌های زمانی، واریانس موضعی سری زمانی، هنگامی بزرگ‌تر است که سطح سری بالاست. بنابراین مجموعه داده‌ها را با استفاده از لگاریتم داده‌های سری زمانی نرمال می‌کنیم. با انجام این تغییر مقیاس، می‌توان یک مدل متناسب شده را بعد از تحولات در نظر گرفت. دقت روش به کار رفته در مورد داده‌های پالایش نفت تهران نسبت به دو سری زمانی دیگر قابل توجه است.

جدول ۱. نتایج شبیه‌سازی برای شاخص‌های مختلف

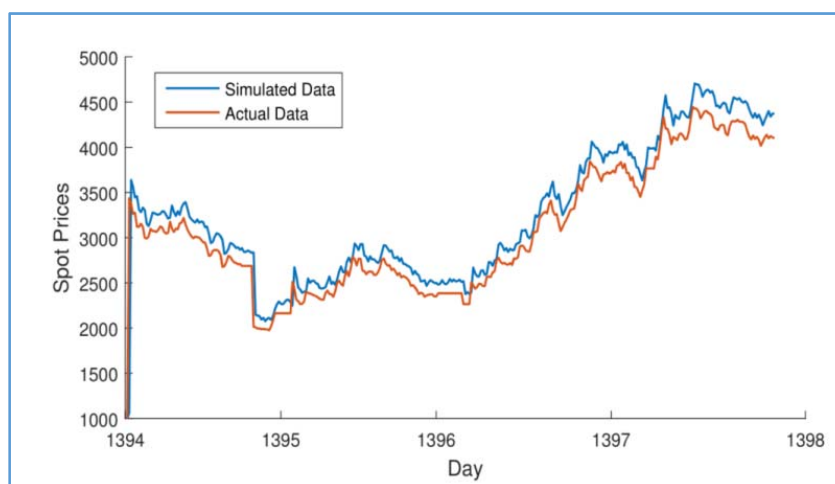
RMSE	w_1	λ_2	λ_1	بورس سهام
۵/۷۳۵۱	۰/۷۷۱۳	۰/۲۲۸۶	۱/۲۳۳۸	سیمان ارومیه
۱۰/۰۱۵	۰/۸۵۳۷	۰/۱۴۶۲	۲/۸۵۰۶	سایپا آذین
۰/۰۴۸۹	-۸۵۶/۲۱۶۷	۸۵۷/۲۱۶۷	۰/۰۴۰۹	پالایش نفت تهران



شکل ۱. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص سیمان ارومیه



شکل ۲. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص سایپا آذین



شکل ۳. مقایسه داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های واقعی ارزش روزانه شاخص پالایش نفت تهران

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، تکنیک جدیدی برای مدل‌سازی مجموعه‌ای از سری‌های زمانی مالی مانند بازارهای بورس سیمان ارومیه، سایپا آذین و پالایش نفت تهران مورد مطالعه قرار گرفت. بدین منظور، یک معادله دیفرانسیل تصادفی که به صورت ترکیب دو فرایند مستقل ارنشتاین اولنیک با محرک $\Gamma(a, b)$ بود، برای شبیه‌سازی داده‌های سری زمانی به کار گرفته شد. مزیت این روش این است که برآوردهای به‌دست‌آمده، در اطراف مقدار واقعی پایدارند. همچنین خطاهای کم نشان می‌دهد که روش تخمین دقیق است. این مدل تصادفی به‌خوبی رفتار فیزیکی داده‌ها را در نظر می‌گیرد. نتایج عددی و نمودارها نشان دادند که مدل ارائه شده متناسب با داده‌های واقعی بازار است و می‌توان از آن برای پیش‌بینی قیمت‌های

آتی سهام، برای تجزیه و تحلیل بازار، طراحی نمونه کارها در سایر رشته‌ها مانند ژئوفیزیک، پزشکی و علوم اجتماعی بهره برد. مدل‌های نوسان تصادفی، زمانی که واریانس فرایند تصادفی خود به صورت تصادفی توزیع شده است، بسیار کارآمد هستند و در شاخه‌ای از ریاضیات مالی برای ارزیابی اختیارات، بازده و قیمت‌های بسته شده بازار سهام استفاده می‌شوند. از این رو، در ادامه کار این مقاله، می‌توان برای پیش‌بینی نوسان‌ها، از مدل نوسان‌های تصادفی روی داده‌هایی که از مدل ارنشتاین اولنبرگ ترکیبی تبعیت می‌کنند، استفاده کرد. در نظر گرفتن مدل‌های رژیم سوئیچینگ، مدل‌هایی که نوسان یا نرخ بهره آنها از مدل‌های تصادفی چون CIR یا هال وایت پیروی می‌کنند نیز، می‌توانند در آینده بررسی شوند. همچنین، قیمت‌گذاری مشتقات (اختیار، انواع قراردادها و...) از مواردی است که برای مطالعه پیشنهاد می‌شود.

منابع

- جنابی، امید؛ دهمره قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری پرشی. *تحقیقات مالی*، ۳۱(۳)، ۳۹۲-۴۱۶.
- حسینی ابراهیم آباد، سید علی؛ حیدری، حسن؛ جهانگیری، خلیل؛ قائمی اصل، مهدی (۱۳۹۸). استفاده از رویکرد بیزی برای مطالعه همبستگی متغیر با زمان میان شاخص‌های منتخب بورس اوراق بهادار تهران. *تحقیقات مالی*، ۲۱(۱)، ۵۹-۷۸.
- راعی، رضا؛ باجلان، سعید؛ عجم، علیرضا (۱۴۰۰). بررسی کارایی مدل $1/N$ در انتخاب پرتفوی. *تحقیقات مالی*، ۳۳(۱)، ۱-۱۶.
- راعی، رضا؛ باسرخا، حامد؛ مهدیخواه، حسین (۱۳۹۹). بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش Mean-CVAr و رویکرد ناهم‌سانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن. *تحقیقات مالی*، ۲۲(۲)، ۱۴۹-۱۵۹.
- رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملات. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۲)، ۴۳-۶۲.
- فرنوش، رحمان؛ نباتی، پریسا؛ عزیزی، معصومه (۱۳۹۵). شبیه‌سازی و پیش‌بینی قیمت نفت اوپک با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی. *پژوهش‌های نوین در ریاضی*، ۲(۷)، ۲۱-۳۰.
- نیسی، عبدالساده؛ پیمانی، مسلم (۱۳۹۳). مدل سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. *پژوهشنامه اقتصادی*، ۱۴(۵۳)، ۱۴۳-۱۶۶.
- ولیدی، جواد؛ نجفی، امیرعباس؛ ولیدی، علیرضا (۱۳۹۹). انتخاب برخط سبد سرمایه‌گذاری به کمک الگوریتم‌های تبعیت از بازنده. *تحقیقات مالی*، ۲۲(۳)، ۴۰۸-۴۲۷.

References

- Barlev, S., Bshouty, D. & Letac, G. (1992). Natural exponential families and selfdecomposability, *Statistics and probability letters*, 13, 147-152.
- Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2000). Financial volatility, *Lévy processes and power variation*.

- Barndorff-Nielsen, O. & Shephard, N. (2001). Non-Gaussian Ornstein - Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society*, 63, 167-241.
- Breidt, C. & Lima, D. (1998). The detection and estimation of long memory in stochastic volatility models, *J. Econometrics*, 83, 325-348.
- Brockman, P. & Chowdhury, M. (1997). Deterministic versus stochastic volatility: implications for option pricing models. *Applied Financial Economics*, 7, 422-505.
- Comte, F. & Renault, E. (1998). Long memory in continuous time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4), 291-323.
- Cufaro-Petroni, N. & Sabino, P. (2017). Coupling Poisson processes by self-decomposability. *Mediterranean J Math*. 14(2):69.
- Franoosh, R., Nabati, P. & Azizi, M. (2016). Simulating and Forecasting OPEC Oil Price Using Stochastic Differential Equations, *Journal of new researches in mathematics*, 2(7), 21-30. (in Persian)
- Grigoriu, M. (2002). *Stochastic Calculus*, Springer.
- Harvey, A. C. (1998). Long-memory in stochastic volatility. *Butterworth - Heinemann*, 307-320.
- Hoseini Ebrahimabad, S. A., Heydari, H., Jahangiri, Kh., Ghaemi Asl, M. (2019). Using Bayesia Approach to Study the Time Varying Correlation among Selected Indices of Tehran Stock Exchange. *Financial Research Journal*, 21(1), 59-78. (in Persian)
- Jenabi, O. & Dahmarde Ghaleno, N. (2019). Subordinate Shares Pricing under Fractional-Jump Heston Model. *Financial Research Journal*, 21(3), 392- 416. (in Persian)
- Jurek, Z. J. & Vervaat, W. (1983). An integral representation for self decomposable Banach space valued random variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitsheorie and verwandte Gebiete*, 62, 247-262.
- Mariani, M., Masum, B. & Tweneo, O. (2018). Estimation of stochastic volatility by using Ornstein-Uhlenbeck type models. *Physica A: Statistical mechanics and its application*, 491, 167-176.
- Nisi, A. & Peymani, M. (2014). Modeling the index of Tehran Stock Exchange using Heston's stochastic differential equation. *Economic Research*, 14 (53), 166-143. (in Persian)
- Oksendal, B. (2010). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York.
- Raei, R., Bajalan, S. & Ajam, A. (2021). Investigating the Efficiency of the 1/N Model in Portfolio Selection. *Financial Research Journal*, 23(1), 1-16. (in Persian)
- Raei, R., Basakha, H. & Mahdikhah, H. (2020). Equity Portfolio Optimization Using Mean-CVaR Method Considering Symmetric and Asymmetric Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Financial Research Journal*, 22(2), 149-159. (in Persian)

- Rahmani, M., Jafarian, N. (2017). Survey on fractional Black-sholes with hurst exponent on European option with transaction cost. *Financial Engineering and Portfolio Management*, 8(32), 43-62. (in Persian)
- Rao, J. & Taufer, E. (2019), Semi-parametric estimation of the autoregressive parameter in non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck processes. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 1-23.
- Rubio, F. J. & Johansen, A. M. (2013). A simple approach to maximum intractable likelihood estimation. *Electronic Journal of Statistics*, 7, 1632-1654.
- Sabino, P. & Petroni, N. C. (2020). Gamma-related Ornstein–Uhlenbeck processes and their simulation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(6), 1108-1133.
- Spiliopoulos, K. (2009). Method of Moments Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Levy Process. *ANNALES de l'I.S.U.P.*, 53, 3-19.
- Taylor, S. (1992). Financial returns modeled by the product of two stochastic processes, A study of daily sugar prices, *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1, 203-226.
- Tweneboah, O. K. (2015). Stochastic differential equation applied to high frequency data arising in geophysics and other disciplines. *ETD Collection for University of Texas, El Paso Paper AA11600353*.
- Valdivieso, L., Schoutens, W., & Tuerlinckx, F. (2009). Maximum likelihood estimation in processes of Ornstein-Uhlenbeck type, *Stat Infer Stoch Process*, 12, 1-19.
- Validi, J., Najafi, A. A., & Validi, A. (2020). Online Portfolio Selection Based on Follow-the-Loser Algorithms. *Financial Research Journal*, 22(3), 408-427. (in Persian)