

مقایسه روش‌های متفاوت انتگرال‌گیری در تعیین مدار ماهواره‌های نزدیک سطح

زمین

مهدی اسحاق* و مهدی نجفی علمداری**

*کالج سلطنتی سوئد، صندوق پستی SE 100-44 استکهلم، سوئد و دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری، صندوق پستی ۳۳۴-۱۸۷۳۵

**دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، صندوق پستی ۴۴۱۶-۱۵۸۷۵

(دریافت: ۸۲/۶/۹، پذیرش نهایی: ۸۵/۶/۲۸)

چکیده

موضوع اصلی این مقاله، مقایسه چند روش عددی حل معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره است. با توجه به این‌که معادله مسیر حرکت ماهواره معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، برای حل عددی مسیر بایستی شش مقدار اولیه به معادله دیفرانسیل معرفی کرد که این شش مقدار اولیه به ترتیب مؤلفه‌های بردار موقعیت و سرعت ماهواره در یک دستگاه مختی است. با مقایسه بردار موقعیت و سرعت به دست آمده از حل عددی مدار و مدار کپلری می‌توان خطای روش عددی حل مدار را در یک دستگاه مختصات ماهواره-مرکز نمایش داد. در این تحقیق، سه روش عددی حل مدار از قبیل رونگ-کوتا، روش رونگ-کوتا-نیسترم و روش پیشگو-اصلاحگر (آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون) برای حل عددی مدار یک ماهواره نزدیک سطح زمین مورد بررسی قرار می‌گیرد. محاسبات نشان می‌دهد با گام محاسباتی ۳۰ ثانیه به ترتیب روش رونگ-کوتا مرتبه ۴، روش پیشگو-اصلاحگر آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون مرتبه ۴ و روش رونگ-کوتا نیسترم مرتبه ۳ مناسب‌ترین‌اند.

واژه‌های کلیدی: حل عددی، پیشگو-اصلاحگر، اغتشاشات، معادلات دیفرانسیل، خطا

۱ مقدمه

غیرجاذبه‌ای را می‌توان جزو پیچیده‌ترین نیروها تلقی کرد چرا که میزان اثرات کاملاً وابسته به خصوصیات فیزیکی خود ماهواره است و مدل‌سازی آنها در هر ماهواره متفاوت است. معادله مسیر حرکت ماهواره یا همان معادله کپلر، معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم برداری است. همان‌طور که می‌دانیم برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم دو مقدار اولیه لازم است، یکی مقدار اولیه از تابع و مقدار اولیه از مشتق تابع، یعنی بردار موقعیت و مشتق بردار موقعیت یا بردار سرعت. از آنجا که معادله کپلر برداری و سه‌بعدی است پس به‌ازای هر بردار، سه مختص خواهیم داشت و در نهایت به‌منظور حل معادله کپلر شش مختص موقعیت و سرعت ماهواره در یک دستگاه مختی مورد نیاز است. حال این معادله دیفرانسیل مرتبه

تعیین مدار یک ماهواره مستلزم فراهم بودن دو دسته معلومات زیر است.

۱. همه نیروهای موثر در حرکت ماهواره و مدل‌های ریاضی آنها معلوم باشد.
۲. معادله ریاضی حرکت ماهواره کاملاً مشخص باشد.

در مدار ماهواره‌های نزدیک سطح زمین نیروهای جاذبه‌ای زمین تأثیر عمده دارند. از جمله اثر ضرایب ژئوپتانسیلی زمین، جزر و مد جسم زمین و اقیانوس‌ها، پتانسیل تغییر شکل زمین در اثر دوران، اثر جاذبه سایر سیاره‌ها و نسبیت عام را می‌توان نام برد. در مورد نیروهای غیر جاذبه‌ای می‌توان اصطکاک هوا، اثر تابش خورشید، اثر انعکاس‌های زمینی و اثرات گرمایی را ذکر کرد. از این دسته نیروهای غیرجاذبه‌ای می‌توان اصطکاک هوا را از همه مؤثرتر دانست. اثرات

دیفرانسیل، حل مدار وابسته به درجه و مرتبه ضرایب هارمونیک‌های کروی نیز دارد، محاسبات وی نشان می‌دهد که حل عددی معادله دیفرانسیل مدار ماهواره با روش رونگ-کوتا مرتبه ۴ تا درجه و مرتبه ۳۰ از هارمونیک‌های کروی کفایت می‌کند. اسحاق (2005) دو روش عددی حل مدار ماهواره با گام متغیر را عرضه کرد. اسحاق و نجفی (۲۰۰۳، ۲۰۰۵a، ۲۰۰۵b، ۲۰۰۵c) نیز روش‌های تعیین مدار ماهواره‌های نزدیک سطح زمین را بررسی کردند و اغتشاش‌های مداری ماهواره‌های نزدیک سطح زمین را نیز در مورد یک ماهواره نزدیک سطح زمین در دستگاه مختصات ماهواره-مرکز و همچنین روی المان‌های مداری ماهواره ارائه کردند.

در تحقیق حاضر، مقایسه‌ای بین سه روش متفاوت حل عددی معادله دیفرانسیل مدار ماهواره از قبیل رونگ-کوتا مرتبه ۴، رونگ-کوتا-نیستروم مرتبه ۳ و روش پیشگو-اصلاحگر آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون بررسی می‌شود. نحوه به کارگیری این روش‌ها در مسئله تعیین مدار ارائه می‌شود و در نهایت، آنها با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در بخش بعدی این مقاله، معادلات ریاضی نیروهای مغشوش کننده جاذبه‌ای و غیر جاذبه‌ای بررسی می‌شود. همچنین به طور مختصر روش حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا و نحوه به کارگیری این روش در حل مدار به سه روش ذکر شده روی ماهواره CHAMP ارائه می‌شود و در نهایت مدارهای حل شده در یک سیستم مختصات ماهواره-مرکز با هم مقایسه می‌شوند. دستگاه مختصات ماهواره-مرکز مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲ نیروهای اغتشاشی (perturbing forces) مدار

نیروهای مغشوش کننده مسیر حرکت ماهواره از مدار کپلری همگی نیروهای غیر مرکزی‌اند. این نیروها یا دارای منشأ جاذبی و یا غیر جاذبه‌ای هستند. نیروهای دارای

دوم یا معادله کپلر بایستی به دو دسته معادله سرعت و موقعیت تقسیم شود تا بتوان روش‌های عددی را برای حل آن به کار گرفت.

مسئله حل مدار ماهواره‌ها موضوع جدیدی در علوم ماهواره‌ای نیست و تحقیقات زیادی در این خصوص صورت گرفته است. سو (2000) از روش رونگ-کوتا مرتبه ۸ برای حل مدار ماهواره‌های GEO و MEO استفاده کرد. وی شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول به دست آمده از معادله کپلر را به طور جداگانه حل کرد. البته این مطلب خللی در محاسبات ایجاد نمی‌کند، چون ماهواره‌های مورد نظر ایشان ارتفاع زیادی داشتند و در گام‌های کوچک می‌توان مسیر را تقریباً خطی فرض کرد. ولف (2000) نیز روش رونگ-کوتا مرتبه ۶ را برای حل معادله مدار به کار گرفت و مقایسه‌ای بین نیروهای اغتشاشی وارد بر ماهواره‌های متفاوت به انجام رساند که همگی آنها دارای ارتفاعی بیش از ۸۰۰ کیلومتر بودند. سانتوس (1994) به منظور بهبود مدار ماهواره‌های GPS از روش اشتورمر-کول (Stormer-Cowell) مرتبه ۱۱ استفاده کرد. بافت (1985) نیز روش اشتورمر-کول مرتبه ۱۳ را برای حل مدار ماهواره GPS مورد استفاده قرار داد. البته لازم به ذکر است که این الگوریتم‌ها فقط مختصات ماهواره را محاسبه می‌کنند، یعنی فقط به منظور حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم طراحی شده‌اند و برای محاسبه بردار سرعت، بایستی از روش دیگری که این معادله دیفرانسیل را کاهش مرتبه می‌دهد استفاده کرد. در این خصوص معمولاً از روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون پیشگو-اصلاحگر استفاده می‌شود. ریم و شوتس (2001) برای حل مدار، روش فیلتر کالمن (Kalman filter) که آن‌هم نتیجه حل یک معادله دیفرانسیل است را به کار می‌گیرند. عمده هدف آنها محاسبه مدار ماهواره‌های ژئودینامیکی است. اسحاق (2003) در بررسی صورت گرفته روی یک ماهواره نزدیک زمین نشان داد که گام حل عددی معادله

پتانسیل گرانی زمین و انعکاس آن به ماهواره. تغییر پتانسیل گرانی زمین که موجب تغییر شکل پوسته زمین می‌شود (جزر و مد جسم زمین) باعث اغتشاش حرکت ماهواره می‌شود. اثر جزر و مد جسم زمین با دومین عدد لاو که نسبت پتانسیل تغییر شکل زمین به پتانسیل زمین جزر و مد است رابطه دارد. بعضی معتقدند که عدد لاو دارای دو بخش است یکی مستقل از بسامد پتانسیل جزر و مد و دیگری وابسته به آن. اگر کل عدد لاو را مستقل از بسامد فرض کنیم خواهیم داشت (ولف، ۲۰۰۰؛ مک کارتی، ۱۹۹۶)

$$\Delta \bar{C}_{nm} - i \Delta \bar{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2n+1} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j}{GM_{\oplus}} \left(\frac{R_e}{r_j} \right)^{n+1} \bar{p}_{nm}(\sin \varphi_j) e^{-im\lambda} \quad (2)$$

که در آن k_{nm} مقادیر اسمی عدد لاو با درجه و مرتبه مشخص، R_e شعاع استوایی زمین، GM_{\oplus} حاصل ضرب ثابت جاذبه در جرم زمین، GM_j حاصل ضرب ثابت جاذبه در جرم سیاره مورد نظر است، j تعداد سیارات، r_j فاصله زمین مرکزی سیارات، Φ_j, Λ_j مختصات زمین مرکزی سیارات است. چنانچه قسمت وابسته به بسامد عدد دوم لاو را در نظر بگیریم می‌توانیم تصحیحات مربوطه را در ضرایب هارمونیک‌های کروی میدان جاذبه زمین به شکل زیر به فرمول در آوریم (مک کارتی، ۱۹۹۶):

$$\Delta \bar{C}_{2m} - 2\Delta \bar{S}_{2m} = 1_m \sum_{f(2,m)} (A_m \delta K_f H_f) e^{i\theta f} \quad (m=1,2) \quad (3)$$

در جایی که

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = 4.4228 \times 10^{-8} m^{-1} \quad (4)$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{8\pi}} = (-1)^m (3.1274 \times 10^{-8}) m^{-1} \quad (5)$$

در این رابطه δK_f قسمت متغیر عدد لاو با بسامد است

منشأ جاذبه‌ای عبارت‌اند از: نیروهای حاصل از ضرایب هارمونیک ژئوپتانسیلی درجه ۲ (بیضویت زمین)، ضرایب ژئوپتانسیلی با درجه بالاتر از ۲، پتانسیل کشندی جسم زمین (body tide)، کشند اقیانوسی (ocean tide) پتانسیل ناشی از تغییر شکل دورانی زمین (rotational deformation) و نسیت عام (general relativity). از نیروهای دارای منشأ غیر جاذبه‌ای می‌توان به اصطکاک جو (air drag)، اثر تابش خورشید (solar radiation pressure)، اثر بازتاب نسبی (آلیدو) زمین و همچنین اثر حرارتی (thermal effect) نیز اشاره کرد. در زیر به معرفی معادلات ریاضی حاکم بر این نیروها می‌پردازیم.

۲-۱ نیروی ژئوپتانسیلی

معادله بسط پتانسیل زمین به هارمونیک‌های کروی به صورت زیر است (ونپچک و کراکوسکی، ۱۹۸۷، سانتوس، ۱۹۹۴، بافت، ۱۹۸۵).

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \quad (1)$$

در این رابطه $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ ضرایب هارمونیک نرمال شده میدان پتانسیل، \bar{P}_{nm} توابع لژاندر نوع اول و a, GM به ترتیب نیم قطر طول بیضوی رفرانس و حاصل ضرب ثابت جاذبه نیوتن در جرم زمین و (r, φ, λ) نیز مختصات کروی ماهواره و m, n درجه و مرتبه ضرایب هارمونیک است. ضریب هارمونیک مرتبه ۲ یعنی پتانسیل C_2 مشخصه بیضویت زمین است. ضرایب هارمونیک بالاتر از ۲ نیز در بسط فوق حضور دارند.

۲-۲ پتانسیل جزر و مد پوسته زمین

سیارات اطراف زمین دو اثر روی ماهواره دارند. یکی اثر جاذبه‌ای مستقیم روی ماهواره و دیگری اثر جاذبه‌ای در

(ریم و شوتس، ۲۰۰۱).

$$\Delta C_{20} = \frac{a_e^3}{6GM_e} (m_1^2 + m_2^2 - 2(1+m_3)^2) \Omega^2 K_2 \approx \frac{-a_e^3}{3GM_e} (1+2m_3) \Omega^2 K_2 \quad (8)$$

$$\Delta S_{21} = \frac{-a_e^3}{3GM_e} m_1 (1+m_3) \Omega^2 K_2 \approx \frac{-a_e^3}{3GM_e} m_1 \Omega^2 K_2 \quad (9)$$

$$\Delta C_{21} = \frac{-a_e^3}{3GM_e} (m_2(1+m_3)) \Omega^2 K_2 \approx \frac{-a_e^3}{3GM_e} \Omega^2 K_2 \quad (10)$$

$$\Delta C_{22} = \frac{a_e^3}{12GM_e} (m_2^2 - m_1^2) \Omega^2 K_2 \approx 0 \quad (11)$$

$$\Delta S_{22} = \frac{-a_e^3}{6GM_e} (m_2 m_1) \Omega^2 K_2 \approx 0 \quad (12)$$

که در این روابط

$$\omega_1 = m_1 \Omega, \omega_2 = m_2 \Omega, \omega_3 = (1+m_3) \Omega \quad (13)$$

$$\omega^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \quad (14)$$

$$m_1 = x_p \quad m_2 = -y_p \quad (15)$$

$$m_3 = \frac{d(UT - IAT)}{d(IAT)} \quad (16)$$

در این روابط Ω سرعت زاویه‌ای متوسط زمین، m_i موقعیت قطب و نرخ تغییرات سرعت دورانی زمین است.

۲-۵ اثر جاذبه سیارات

سیارات موجود در اطراف زمین به دلیل وارد ساختن جاذبه، ماهواره را به سمت خود می‌کشند رابطه زیر میزان تغییر شتاب ناشی از این اثر را نشان می‌دهد (ریم و شوتس، ۲۰۰۱؛ ولف، ۲۰۰۰؛ سیبر، ۲۰۰۳؛ سو، ۲۰۰۰؛ سانتوس، ۱۹۹۴).

$$\bar{a}_{tb} = \sum_i GM_i \left[\frac{\bar{r}_i}{\|\bar{r}_i\|^3} - \frac{\bar{\Delta}_i}{\|\bar{\Delta}_i\|^3} \right] \quad (17)$$

H_f دامنه بسامد جزر و مدی و یک ترکیب خطی از آرگومان‌های اساسی یا آرگومان‌های دوودسون (Doodson arguments) است.

۲-۳ جزر و مد اقیانوس‌ها

جزر و مد اقیانوس‌ها کاملاً مشابه جزر و مد پوسته زمین است با این تفاوت که آب به دلیل سیال و دینامیک بودنش دارای ممان لختی جنبشی می‌شود، به حرکت درمی‌آید و در بعضی مناطق اقیانوسی با انباشته شدن پوسته زمین آن مناطق بار ایجاد می‌کند. معمولاً برای بررسی اثر بار اقیانوسی از مدل‌های جزر و مد اقیانوسی استفاده می‌شود. اثر جزر و مد اقیانوسی روی ضرایب هارمونیک میدان جاذبه به صورت زیر است (مک کارتی، ۱۹۹۶؛ ولف، ۲۰۰۰؛ سو، ۲۰۰۰؛ اسحاق و نجفی، ۲۰۰۳)

$$\Delta \bar{C}_{nm} - i \Delta \bar{S}_{nm} = F_{nm} \sum_{s(n,m)} \sum_{+} (C_{snm}^{\pm} \mp S_{snm}^{\pm}) e^{\pm i \theta_f} \quad (6)$$

که در اینجا

$$F_{nm} = \frac{4\pi G \rho_w}{g} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}} \left(\frac{1+k'_n}{2n+1} \right) \quad (7)$$

در این روابط، G ، g ثابت جاذبه و شتاب گرانی، چگالی آب ρ_w اعداد بار k'_n آرگومان‌های مؤلفه‌های جزر و مدی و C_{snm}^{\pm} و S_{snm}^{\pm} ضرایب هارمونیک جزر و مدی و θ_f زمان خورشیدی گرینویچ است.

۲-۴ پتانسیل تغییر شکل زمین ناشی از تغییر محور دوران آن

دوران زمین علاوه بر ایجاد بیضویت در زمین، تغییرات دیگری در زمین نیز ایجاد می‌کند که وابسته به موقعیت قطب و تغییرات سرعت دورانی زمین است. روابط زیر این اثر را روی ضرایب هارمونیک میدان جاذبه نشان می‌دهند

می‌شود که مدار ماهواره به مدار دایره‌ای نزدیک شود و این نیرو رابطه مستقیم با سرعت ماهواره دارد. وقتی سرعت زیاد شود اصطکاک نیز افزایش پیدا خواهد کرد و بر عکس. همچنین این اثر رابطه معکوس با ارتفاع ماهواره دارد چنانچه ارتفاع کم شود چگالی افزایش می‌یابد و در نتیجه بر اصطکاک افزوده می‌شود. این اثر یکی از مهم‌ترین اثرات در تعیین مدار ماهواره‌های نزدیک سطح زمین است. رابطه زیر شتاب ناشی از این اثر را بیان می‌کند (سیبر، ۲۰۰۳؛ ولف، ۲۰۰۰؛ سو، ۲۰۰۰؛ ریم و شوتس، ۲۰۰۱؛ اسحاق و نجفی، ۲۰۰۳).

$$\bar{a}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2}\rho\left(C_d\frac{A}{m}\right)\bar{V}_r|\bar{V}_r \quad (19)$$

در این رابطه \bar{V}_r بردار سرعت ماهواره نسبت به جو m جرم ماهواره، C_d ضریب اصطکاک ماهواره، A سطح قائم بر مسیر حرکت ماهواره است، یعنی مساحت قسمتی از بدنه ماهواره که در تماس مستقیم با جو و عامل اصلی اصطکاک جو است.

۸-۲ اثر تابش خورشید

این اثر در ماهواره‌های دارای ارتفاع زیاد، اهمیت بسیاری دارد. این اثر در ماهواره‌های پایین‌تر کمتر است ولی قابل اغماض نیست. مهم‌ترین قسمت در محاسبه این اثر، محاسبه فاکتور خسوف است که موجب ناپیوستگی در این اثر می‌شود. رابطه زیر، شتاب ناشی از این اثر را نشان می‌دهد. (ریم و شوتس، ۲۰۰۱؛ ولف، ۲۰۰۰؛ سو، ۲۰۰۰)

$$\bar{a}_{\text{solar}} = -p(1+\eta)\frac{A}{m}\hat{v} \quad (20)$$

که P ممان ناشی از خورشید، η ضریب انعکاس ماهواره، A سطح قائم بر امتداد خورشید، v فاکتور خسوف که اگر ماهواره در تاریکی باشد برابر صفر اگر در روشنائی باشد برابر یک و اگر در نیم‌سایه باشد بین صفر و یک است.

در این رابطه، Γ_i بردار موقعیت سیاره، M_i جرم سیاره و Δ_i موقعیت نسبی سیاره نسبت به ماهواره است.

۶-۲ نسبیت عام

از آنجا که ماهواره‌های مورد نظر نزدیک سطح زمین‌اند بنابراین نسبیت عام روی آنها مؤثر است. رابطه زیر تغییر شتاب ماهواره را در ارتباط با نسبیت عام بیان می‌کند (مک کارتی، ۱۹۹۶).

$$\bar{a}_{\text{rel}} = \frac{GM_e}{C^2 r^3} \left\{ \left[(2\beta + 2\gamma) \frac{GM_e}{r} - \gamma(\ddot{\bar{r}} \cdot \ddot{\bar{r}}) \right] + (2 + 2\gamma)(\dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}) \ddot{\bar{r}} \right\} \quad (18)$$

در این رابطه C سرعت نور، $\ddot{\bar{r}}$ بردارهای موقعیت و سرعت ماهواره، GM_e حاصل ضرب ثابت جاذبه در جرم زمین و β, γ ضرایب میدان‌اند. مطابق نظریه نسبیت، جاذبه زمین در صفحه فضا-زمان ایجاد فرو رفتگی می‌کند که انحنا این فرو رفتگی فضا-زمان در قسمت‌های نزدیک جسم جاذب یا زمین بیشتر است این فرو رفتگی باعث می‌شود که راستای انتشار نیرو در دستگاه فضا-زمان، کاملاً مستقیم نباشد، بلکه مسیر منحنی شکلی را طی کند (در راستای خم ژئودزیک). از آنجا که همه معادلات دیفرانسیل ما در یک فضای لختی بدون انحنا صادق‌اند، بنابراین در نظر گرفتن این اثر برای ماهواره‌های نزدیک سطح زمین که در این انحنا فضا بیشتر قرار دارند الزامی است.

۷-۲ اصطکاک هوا

با توجه به بیضی بودن مسیر حرکت ماهواره می‌توان اظهار داشت که ارتفاع ماهواره در نقطه حضیض مدار، کمتر از ارتفاع آن در اوج خواهد بود. با توجه به این نکته که چگالی جو در ارتفاعات کمتر، بیشتر است، می‌توان گفت که در نقطه حضیض از سرعت ماهواره کاسته می‌شود و در اوج اندکی سرعت آن افزایش می‌یابد. این اثر باعث

۹-۲ اثر بازتاب‌های زمین

نور خورشید به زمین تابیده و پس از برخورد به آن باز می‌تابد این بازتاب به ماهواره برخورد می‌کند و حرکت آن مغشوش می‌شود، این اثر بسیار پیچیده است، رابطه زیر، شتاب ناشی از این اثر را در ماهواره نشان می‌دهد (ریم و شوتس، ۲۰۰۱).

$$\bar{a}_{\text{earth}} = (1 + \eta_c) A' \frac{A_c}{m_c} \sum_{j=1}^N [(\tau a E_s \cos \theta_s + e M_B) \hat{r}_j] \quad (21)$$

که η_c ضریب بازتاب ماهواره نسبت به بازتاب‌های زمینی، A' اثر مساحت تصویر شده روی زمین، A_c مساحت قائم ماهواره نسبت به بازتاب‌ها، m جرم ماهواره، C سرعت نور، τ ضریبی است که اگر مرکز هر سطح روی زمین در تاریکی باشد، صفر و اگر در روشنایی باشد برابر یک است، e و a ضرایب آلبدو (بازتاب نسبی) و قابلیت گسیلمندی هر سطح روی زمین است، E_s ممان تابشی خورشیدی، θ_s زاویه سمت‌الرأسی خورشید، M_B ضریب خارج بودن از زمین روشن، \hat{r} برداری که از مرکز سطح تا به ماهواره و N تعداد سطوح روی زمین است.

۱۰-۲ اثر حرارت

وقتی جسمی گرم می‌شود از خود پرتو گسیل می‌کند، این عمل موجب جابه‌جایی در حرکت ماهواره می‌شود این اثر بسیار پیچیده است چون وابستگی زیادی به خواص فیزیکی و جنس مواد به کار رفته در ساخت ماهواره دارد.

۳ معادله حرکت ماهواره

معادله حرکت ماهواره در غیاب نیروهای اغتشاشی یعنی تنها در اثر نیروی مرکزی، به صورت زیر است:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^3} \vec{r} \quad (22)$$

این معادله، معادله دیفرانسیلی از مرتبه دوم است که در آن

GM حاصل ضرب ثابت جاذبه در جرم زمین و I بردار موقعیت ماهواره است. معادله فوق در یک فضای لختی صادق است حل تحلیلی معادله دیفرانسیل فوق منجر به مدار معروف کپلری می‌شود (سیبر، ۲۰۰۳). مدار فوق را می‌توان از راه محاسبه‌های عددی به روش‌های انتگرال‌گیری نیز به دست آورد. البته ارزش و کاربرد روش‌های انتگرال‌گیری در محاسبه مدار ماهواره در حضور نیروهای اغتشاشی است.

روش‌های انتگرال‌گیری زیادی برای حل معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره وجود دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان از روش رونگ-کوتا نام برد. نیاز اولیه حل هر معادله دیفرانسیلی داشتن مقادیر اولیه است. مقادیر اولیه در حل معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره عبارت است از بردار موقعیت و بردار سرعت اولیه ماهواره (در دستگاه مختصات لختی انتخابی) در زمان اولیه (شروع). روش دیگری که معمولاً در محاسبه مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد مبتنی بر پیشگویی و اصلاحگری است. این روش‌ها مستقیماً به موقعیت چند نقطه آخر مسیر وابسته است. برای مثال، روش آدامز-بشفورتن یک پیشگو و روش آدامز-مولتون یک اصلاح‌گر است (بابلیان و مالک نژاد، ۱۹۹۵؛ سانتوس، ۱۹۹۴) که هر دو با هم به کار برده می‌شوند بدین ترتیب که با استفاده از چند نقطه آخر نقطه بعدی از راه پیشگو آدامز-بشفورتن پیش‌بینی و با موقعیت پیش‌بینی و نقاط قبلی روش اصلاح‌گر آدامز-مولتون تصحیح می‌شود. که معمولاً به روش تکرار این فرمول ضمنی محاسبه می‌شود. یکی دیگر از روش‌های انتگرال‌گیری از مسیر ماهواره، روش رونگ-کوتا-نیستروم (شیدفر، ۱۹۹۴) است که برای حل معادلات مرتبه دوم طراحی شده است. این روش قابل استفاده برای هر نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم مناسب است و موقعیت و سرعت ماهواره را به‌طور همزمان محاسبه می‌کند.

معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر را ارائه می‌کنیم.

۱-۲-۳ روش رونگ-کوتا

روش رونگ-کوتا یکی از ساده‌ترین روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است این روش روشی تک مرحله‌ای است، یعنی برای حل معادله دیفرانسیل فقط نیاز به یک نقطه برای انتگرال‌گیری داریم و نقاط دیگر نیز به همین ترتیب قابل محاسبه‌اند یعنی مقدار محاسبه شده در هر مرحله مقدار اولیه مرحله بعدی است. الگوریتم این روش به صورت زیر ارائه می‌شود (بابلیان و مالک نژاد، ۱۹۹۵).

$$y' = f(x, y) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned} \quad (25)$$

و با توجه به رابطه زیر، مقدار تابع در لحظه‌های بعدی محاسبه می‌شود.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (26)$$

باید توجه داشت که این الگوریتم فقط برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول منفرد کاربرد دارد و برای حل معادله مسیر بایستی به صورت دستگاهی شش معادله دیفرانسیل، به طور همزمان حل شود.

۲-۲-۳ روش رونگ-کوتا-نیستروم

این روش کاملاً مشابه روش رونگ-کوتا است ولی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دومی که به صورت زیرند به کار می‌رود (شیدفر، ۱۹۹۴)

$$y'' = f(x, y, y') \quad , \quad y'(x_0) = y'_0 \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad (27)$$

و ضرایب عبارت‌اند از:

روش‌های رونگ-کوتا، آدامز-بشفورت و آدامز-

مولتون برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مطرح شده‌اند اما معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که باید این معادله دیفرانسیل برداری مرتبه دوم به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل شود.

۱-۳ حل معادله حرکت ماهواره

همان‌طور که گفتیم معادله دیفرانسیل برداری حرکت ماهواره بایستی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل شود و این دستگاه معادلات دیفرانسیل بایستی به صورت عددی حل شود حال معادله برداری حرکت ماهواره را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x \\ \ddot{y} = -\frac{GM}{r^3}y \\ \ddot{z} = -\frac{GM}{r^3}z \end{cases} \quad (23)$$

هر کدام از این سه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را می‌توان به دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد بنابراین سه دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواهیم داشت. نتایج نشان می‌دهد که این سه دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بایستی به طور همزمان با هم حل شوند. بنابراین یک دستگاه با شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول باید حل شود. برای استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری از معادلات مرتبه دوم مثل روش رونگ-کوتا-نیستروم دستگاه معادلات با سه معادله مرتبه دوم بایستی تشکیل شود و سپس به صورت عددی حل شود.

۲-۳ معرفی روش‌های انتگرال‌گیری عددی

در این قسمت به معرفی روش‌های مرسوم حل معادلات دیفرانسیل به صورت عددی می‌پردازیم و نحوه حل

۴ حل عددی معادلات دیفرانسیل با مراتب بالاتر از مرتبه اول

به منظور حل عددی معادلات دیفرانسیل با مرتبه بالا، این معادلات را به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل نمایند و سپس این دستگاه معادلات دیفرانسیل را به صورت عددی حل می‌کنند. برای تبدیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه m داریم:

$$a \leq t \leq b \quad y = y(t), \quad (32)$$

$$y^{(m)}(t) = f(y, y', \dots, y^{(m-1)}, t), \quad (33)$$

با مقادیر اولیه

$$y'(t_0) = \alpha_2, \quad y(t_0) = \alpha_1, \\ \dots, \quad y^{(m-1)}(t_0) = \alpha_m$$

برای یک دستگاه معادلات مرتبه اول می‌توان نوشت (بابلیان و مالک نژاد، ۱۹۹۵).

$$y(t) = v_1(t), \quad y'(t) = v_2(t), \dots, \\ y^{(m-1)}(t) = v_m(t) \quad (34)$$

و دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = v_3 \\ \vdots \\ \frac{dv_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(y, y', \dots, y^{(m-1)}, t) \\ \quad \quad \quad = f(v_1, v_2, \dots, v_m, t) \end{array} \right. \quad (35)$$

به همراه مقادیر اولیه

$$v_1(t_0) = y(t_0) = \alpha_1 \\ v_2(t_0) = y'(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ v_m(t_0) = y^{(m-1)}(t_0) = \alpha_m \quad (36)$$

۱-۴ حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل

حل عددی سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بسیار

$$a_n = \frac{1}{2} hf(x_n, y_n, y') \\ a_n = \frac{1}{2} h(y'_n + \frac{1}{2} a_n) \\ b_n = \frac{1}{2} hf(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + a_n, y'_n + a_n) \\ c_n = \frac{1}{2} hf(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + a_n, y'_n + b_n) \quad (28) \\ \beta_n = h(y'_n + c_n) \\ d_n = hf(x_n + h, y_n + \beta_n, y'_n + 2c_n) \\ y_{n+1} = y_n + h(y'_n + \frac{1}{3}(a_n + b_n + c_n)) \\ y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{3}(a_n + 2b_n + 2c_n + d_n)$$

همان‌طور که گفتیم برای حل مدار بایستی سه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به‌طور همزمان حل شود.

۳-۲-۳ روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون پیشگو و اصلاح گر

روش آدامز- بشفورت جز روش‌های چندمرحله‌ای است که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر به کار برده می‌شود:

$$y'(t) = f(y, t) \quad (29) \\ y(t_0) = y_0$$

معادله پیشگو آدامز- بشفورت به صورت زیر است (سانتوس، ۱۹۹۴؛ بابلیان و مالک نژاد، ۱۹۹۵).

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^p f(t - (1+i)h, y_i) \quad (30)$$

برای تولید مقادیر آغازین برای به کارگیری این فرمول، معمولاً از روش رونگ- کوتا استفاده می‌شود.

فرمول اصلاح گر آدامز- مولتون به صورت زیر است (سانتوس، ۱۹۹۴؛ بابلیان و مالک نژاد، ۱۹۹۵).

$$y_n^c = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^c f(t - ih, y_{i+1}) \quad (31)$$

لازم به ذکر است که برای حل مدار، بایستی دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌طور همزمان با این روش حل شود.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} + \vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x + k_x \\ \ddot{y} = -\frac{GM}{r^3}y + k_y \\ \ddot{z} = -\frac{GM}{r^3}z + k_z \end{cases} \quad (40)$$

که در این رابطه k_i شتاب‌های مغشوش کننده است. این دستگاه معادله دیفرانسیل نیز بایستی به صورت عددی حل شود. این دستگاه معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به دستگاه معادلات زیر و شامل شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

$$\begin{cases} v_1 = \dot{x} \\ v_2 = \dot{y} \\ v_3 = \dot{z} \\ \dot{v}_1 = -\frac{GM}{r^3}x = f_4(x, y, z) \\ \dot{v}_2 = -\frac{GM}{r^3}y = f_5(x, y, z) \\ \dot{v}_3 = -\frac{GM}{r^3}z = f_6(x, y, z). \end{cases} \quad (41)$$

حال نحوه حل این دستگاه معادلات دیفرانسیل را به ترتیب، با روش‌های رونگ-کوتا، رونگ-کوتا-نیسترم، آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون در زیر ارائه می‌کنیم ابتدا روش رونگ-کوتا (اسحاق و نجفی، ۲۰۰۳).

$$\begin{aligned} k_{11} &= \dot{x}_n \Delta t_n \\ k_{12} &= \dot{y}_n \Delta t_n \\ k_{13} &= \dot{z}_n \Delta t_n \\ k_{14} &= f_4(x_n, y_n, z_n) \Delta t_n \\ k_{15} &= f_5(x_n, y_n, z_n) \Delta t_n \\ k_{16} &= f_6(x_n, y_n, z_n) \Delta t_n \\ k_{21} &= \left(x_n + \frac{k_{14}}{2}\right) \Delta t_n \\ k_{22} &= \left(y_n + \frac{k_{15}}{2}\right) \Delta t_n \\ k_{23} &= \left(z_n + \frac{k_{16}}{2}\right) \Delta t_n \\ k_{24} &= f_4\left(x_n + \frac{k_{14}}{2}, y_n + \frac{k_{15}}{2}, z_n + \frac{k_{16}}{2}\right) \Delta t_n \\ k_{25} &= f_5\left(x_n + \frac{k_{14}}{2}, y_n + \frac{k_{15}}{2}, z_n + \frac{k_{16}}{2}\right) \Delta t_n \\ k_{26} &= f_6\left(x_n + \frac{k_{14}}{2}, y_n + \frac{k_{15}}{2}, z_n + \frac{k_{16}}{2}\right) \Delta t_n \end{aligned}$$

ساده است و در خیلی از کتاب‌های محاسبات عددی وجود دارد. به منظور ارائه روش کار در اینجا برای مثال، روش رونگ-کوتا مرتبه ۴ را به کار می‌بریم. دو معادله دیفرانسیل زیر را به همراه مشتقات آنها در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} y_n &= y(t_n) & z_n &= z(t_n) \\ z' &= g(y, z, t) & y' &= f(y, z, t) \end{aligned} \quad (37)$$

ضرایب روش رونگ-کوتا مرتبه ۴ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, z_n, t_n) \Delta t_n \\ m_1 &= g(y_n, z_n, t_n) \Delta t_n \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t_n}{2}\right) \Delta t_n \\ m_2 &= g\left(y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{m_1}{2}, t_n + \frac{\Delta t_n}{2}\right) \Delta t_n \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t_n}{2}\right) \Delta t_n \\ m_3 &= g\left(y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{m_2}{2}, t_n + \frac{\Delta t_n}{2}\right) \Delta t_n \\ k_4 &= f(y_n + k_3, z_n + m_3, t_n + \Delta t_n) \Delta t_n \\ m_4 &= g(y_n + k_3, z_n + m_3, t_n + \Delta t_n) \Delta t_n \end{aligned} \quad (38)$$

و دو معادله دیفرانسیل با روابط بازگشتی زیر به طور عددی حل می‌شوند.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{aligned} \quad (39)$$

این روش به راحتی قابل تعمیم به روش‌های رونگ-کوتا-نیسترم و روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون است. در بخش بعدی به نحوه تشکیل دستگاه معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره و نحوه حل عددی آن با روش‌های ذکر شده می‌پردازیم.

۵ انتگرال‌گیری از معادله حرکت ماهواره

معادله حرکت ماهواره با در نظر گرفتن همه نیروهای وارده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 k24 &= f_4(x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2}) \\
 k25 &= f_5(x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2}) \\
 k26 &= f_6(x_{n+2}, y_{n+2}, z_{n+2}) \\
 k31 &= \dot{x}_{n+1} \\
 k32 &= \dot{y}_{n+1} \\
 k33 &= \dot{z}_{n+1} \\
 k34 &= f_4(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\
 k35 &= f_5(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\
 k36 &= f_6(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\
 k41 &= \dot{x}_n \\
 k42 &= \dot{y}_n \\
 k43 &= \dot{z}_n \\
 k44 &= f_4(x_n, y_n, z_n) \\
 k45 &= f_5(x_n, y_n, z_n) \\
 k46 &= f_6(x_n, y_n, z_n)
 \end{aligned}$$

(۴۴)

روابط بازگشتی به منظور محاسبه بردار موقعیت و سرعت در اپوک‌های بعدی عبارت‌اند از (اسحاق و نجفی، ۲۰۰۳).

$$\begin{aligned}
 x_{n+4}^{(0)} &= x_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k11 - 59k21 + 37k31 - 9k41) \\
 y_{n+4}^{(0)} &= y_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k12 - 59k22 + 37k32 - 9k42) \\
 z_{n+4}^{(0)} &= z_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k13 - 59k23 + 37k33 - 9k43) \\
 \dot{x}_{n+4}^{(0)} &= \dot{x}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k14 - 59k24 + 37k34 - 9k44) \\
 \dot{y}_{n+4}^{(0)} &= \dot{y}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k15 - 59k25 + 37k35 - 9k45) \\
 \dot{z}_{n+4}^{(0)} &= \dot{z}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (55k16 - 59k26 + 37k36 - 9k46) \\
 x_{n+4}^{(r+1)} &= x_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_1(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k11 - 5k21 - k31) \\
 y_{n+4}^{(r+1)} &= y_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_2(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k12 - 5k22 - k32) \\
 z_{n+4}^{(r+1)} &= z_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_3(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k13 - 5k23 - k33) \\
 \dot{x}_{n+4}^{(r+1)} &= \dot{x}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_4(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k14 - 5k24 - k34) \\
 \dot{y}_{n+4}^{(r+1)} &= \dot{y}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_5(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k15 - 5k25 - k35) \\
 \dot{z}_{n+4}^{(r+1)} &= \dot{z}_{n+3} + \frac{\Delta t_n}{24} (9f_6(x_{n+4}^{(r)}, y_{n+4}^{(r)}, z_{n+4}^{(r)}) + 19k16 - 5k26 - k36)
 \end{aligned}$$

روش رونگ-کوتا-نیسترم برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم طراحی شده است. بنابراین دستگاه

$$\begin{aligned}
 k31 &= (\dot{x}_n + \frac{k24}{2}) \Delta t_n \\
 k32 &= (\dot{y}_n + \frac{k25}{2}) \Delta t_n \\
 k33 &= (\dot{z}_n + \frac{k26}{2}) \Delta t_n \\
 k34 &= f_4(x_n + \frac{k21}{2}, y_n + \frac{k22}{2}, z_n + \frac{k23}{2}) \Delta t_n \\
 k35 &= f_5(x_n + \frac{k21}{2}, y_n + \frac{k22}{2}, z_n + \frac{k23}{2}) \Delta t_n \\
 k36 &= f_6(x_n + \frac{k21}{2}, y_n + \frac{k22}{2}, z_n + \frac{k23}{2}) \Delta t_n \\
 k41 &= (\dot{x}_n + k34) \Delta t_n \\
 k42 &= (\dot{y}_n + k35) \Delta t_n \\
 k43 &= (\dot{z}_n + k36) \Delta t_n \\
 k44 &= f_4(x_n + k31, y_n + k32, z_n + k33) \Delta t_n \\
 k45 &= f_5(x_n + k31, y_n + k32, z_n + k33) \Delta t_n \\
 k46 &= f_6(x_n + k31, y_n + k32, z_n + k33) \Delta t_n
 \end{aligned}$$

(۴۲)

و با رابطه بازگشتی زیر می‌توان مقادیر بردار موقعیت و سرعت را در لحظه بعدی به دست آورد.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6} (k11 + 2k21 + 2k31 + k41) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} (k12 + 2k22 + 2k32 + k42) \\
 z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6} (k13 + 2k23 + 2k33 + k43) \\
 \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \frac{1}{6} (k14 + 2k24 + 2k34 + k44) \\
 \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{6} (k15 + 2k25 + 2k35 + k45) \\
 \dot{z}_{n+1} &= \dot{z}_n + \frac{1}{6} (k16 + 2k26 + 2k36 + k46)
 \end{aligned}$$

(۴۳)

همچنین برای روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون داریم:

$$\begin{aligned}
 k11 &= \dot{x}_{n+3} \\
 k12 &= \dot{y}_{n+3} \\
 k13 &= \dot{z}_{n+3} \\
 k14 &= f_4(x_{n+3}, y_{n+3}, z_{n+3}) \\
 k15 &= f_5(x_{n+3}, y_{n+3}, z_{n+3}) \\
 k16 &= f_6(x_{n+3}, y_{n+3}, z_{n+3}) \\
 k21 &= \dot{x}_{n+2} \\
 k22 &= \dot{y}_{n+2} \\
 k23 &= \dot{z}_{n+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{n1} &= f_1(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + b_{n1}, \dot{y}_n + \\
 &\quad b_{n2}, \dot{z}_n + b_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 c_{n2} &= f_2(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + b_{n1}, \dot{y}_n + \\
 &\quad b_{n2}, \dot{z}_n + b_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 c_{n3} &= f_3(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + b_{n1}, \dot{y}_n + \\
 &\quad b_{n2}, \dot{z}_n + b_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \beta_{n1} &= (\dot{x}_n + c_{n1}) \Delta t_n \\
 \beta_{n2} &= (\dot{y}_n + c_{n2}) \Delta t_n \\
 \beta_{n3} &= (\dot{z}_n + c_{n3}) \Delta t_n \\
 d_{n1} &= f_1(x_n + \beta_{n1}, y_n + \beta_{n2}, z_n + \beta_{n3}, \dot{x}_n + \\
 &\quad 2c_{n1}, \dot{y}_n + 2c_{n2}, \dot{z}_n + 2c_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 d_{n2} &= f_2(x_n + \beta_{n1}, y_n + \beta_{n2}, z_n + \beta_{n3}, \dot{x}_n + \\
 &\quad 2c_{n1}, \dot{y}_n + 2c_{n2}, \dot{z}_n + 2c_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 d_{n3} &= f_3(x_n + \beta_{n1}, y_n + \beta_{n2}, z_n + \beta_{n3}, \dot{x}_n + \\
 &\quad 2c_{n1}, \dot{y}_n + 2c_{n2}, \dot{z}_n + 2c_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \frac{1}{3}(a_{n1} + 2b_{n1} + 2c_{n1} + d_{n1}) \\
 \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{1}{3}(a_{n2} + 2b_{n2} + 2c_{n2} + d_{n2}) \\
 \dot{z}_{n+1} &= \dot{z}_n + \frac{1}{3}(a_{n3} + 2b_{n3} + 2c_{n3} + d_{n3}).
 \end{aligned}
 \tag{۴۹}$$

که در روابط فوق

$$\begin{aligned}
 a_{n1} &= f_1(x_n, y_n, z_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n2} &= f_2(x_n, y_n, z_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n3} &= f_3(x_n, y_n, z_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n1} &= (\dot{x}_n + \frac{1}{2}a_{n1}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n2} &= (\dot{y}_n + \frac{1}{2}a_{n2}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n3} &= (\dot{z}_n + \frac{1}{2}a_{n3}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n1} &= f_1(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n2} &= f_2(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n3} &= f_3(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}) \frac{\Delta t_n}{2}
 \end{aligned}
 \tag{۵۰}$$

$$\begin{aligned}
 b_{n1} &= f_1(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n2} &= f_2(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n3} &= f_3(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2}
 \end{aligned}
 \tag{۵۱}$$

معادلات ما شامل سه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که بایستی به صورت عددی حل شود. یعنی:

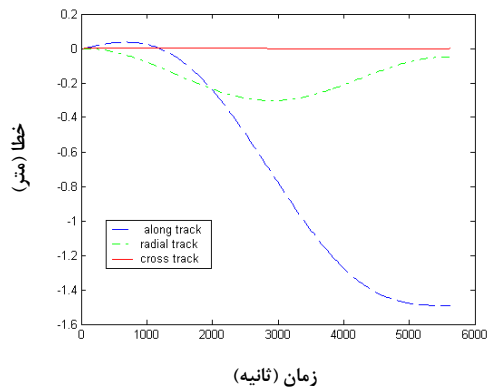
$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{GM}{r^3} x = f_1(x_n, y_n, z_n) \\ \ddot{y} = -\frac{GM}{r^3} y = f_2(x_n, y_n, z_n) \\ \ddot{z} = -\frac{GM}{r^3} z = f_3(x_n, y_n, z_n) \end{cases}
 \tag{۴۶}$$

چنانچه هر کدام از مؤلفه‌ها را تابعی از موقعیت و سرعت و زمان فرض کنیم، خواهیم داشت:

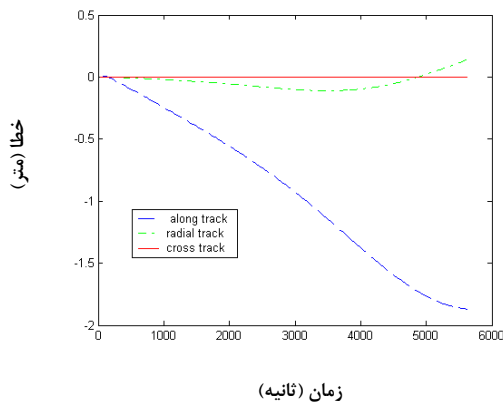
$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= f_1(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n) \\
 \ddot{y} &= f_2(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n) \\
 \ddot{z} &= f_3(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n)
 \end{aligned}
 \tag{۴۷}$$

ضرایب مربوط به روش رونگ-کوتا-نیسترم نیز به صورت زیر ارائه خواهد شد (اسحاق و نجفی، ۲۰۰۳).

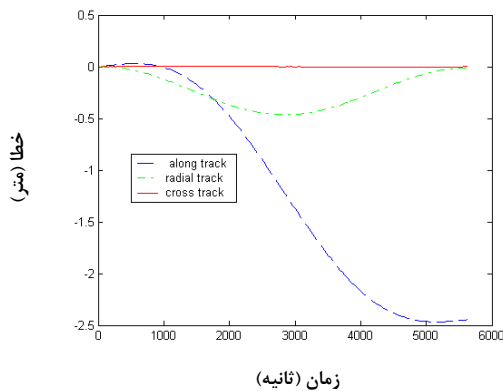
$$\begin{aligned}
 a_{n1} &= f_1(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n2} &= f_2(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 a_{n3} &= f_3(x_n, y_n, z_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \alpha_{n1} &= (\dot{x}_n + \frac{1}{2}a_{n1}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \alpha_{n2} &= (\dot{y}_n + \frac{1}{2}a_{n2}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 \alpha_{n3} &= (\dot{z}_n + \frac{1}{2}a_{n3}) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n1} &= f_1(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n2} &= f_2(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2} \\
 b_{n3} &= f_3(x_n + \alpha_{n1}, y_n + \alpha_{n2}, z_n + \alpha_{n3}, \dot{x}_n + a_{n1}, \dot{y}_n + a_{n2}, \dot{z}_n + \\
 &\quad a_{n3}, t_n + \frac{1}{2}\Delta t_n) \frac{\Delta t_n}{2}
 \end{aligned}$$



شکل ۱. اختلاف بین مدار نظری و مدار به دست آمده از روش رونگ-کوتا.



شکل ۲. اختلاف بین مدار نظری و مدار به دست آمده از روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون.



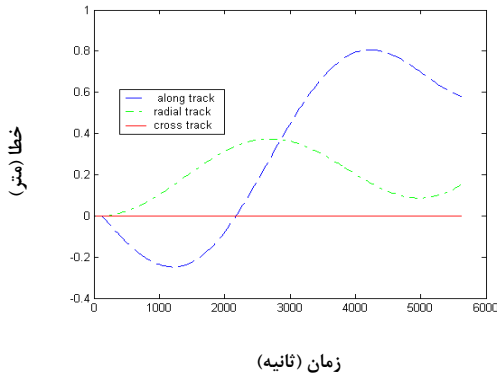
شکل ۳. اختلاف بین مدار نظری و مدار به دست آمده از روش رونگ-کوتا-نیستروم.

همان طور که ملاحظه می شود، مؤلفه قائم بر مسیر ماهواره در هر سه روش چندان تغییری نکرده است بلکه

۵-۱ انتگرال گیری از مسیر ماهواره در یک فضای لختی و نتایج عددی

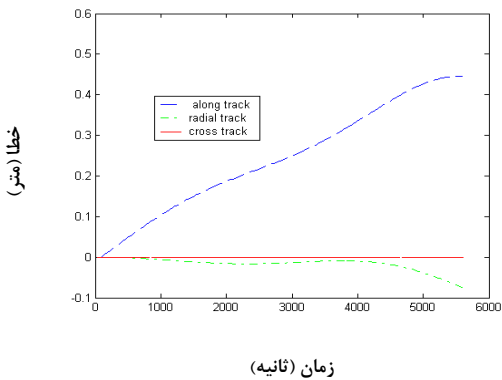
مدار به دست آمده در این فضا همان مدار کپلری است که در انتگرال گیری از معادله مسیر حرکت ماهواره هیچ گونه نیروی مغشوشی در نظر گرفته نشده است. برای بررسی دقت انتگرال گیری کافی است که این مدار انتگرال گیری شده را با مدار نظری مقایسه کنیم. بنابراین هر کدام از مدارهای انتگرال گیری شده را با روش های گفته شده و مدار نظری مقایسه می کنیم. به منظور عملی ساختن محاسبات عددی، ماهواره CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) انتخاب شده است. این ماهواره در تابستان سال ۲۰۰۰ میلادی در مداری تقریباً دایره ای و نزدیک قطب زمین با زاویه ۸۷/۳ درجه و با ارتفاع ۴۵۴ کیلومتر به فضا پرتاب شد. هدف اصلی این ماموریت بهبود اطلاعات مربوط به میدان گرانی زمین است. به این منظور این ماهواره مجهز به دستگاه هایی با فناوری بسیار پیشرفته، به همراه یک گیرنده GPS (کوانگ و همکاران، ۲۰۰۱) و سه شتاب سنج (توبول و همکاران، ۱۹۹۹). در مقایسه با ماهواره های دیگر، این ماهواره دارای مزیت های زیر است. (ریگبر و همکاران، ۲۰۰۲).

اولاً ماهواره به طور پیوسته با حداکثر ۱۲ ماهواره GPS ردیابی می شود. ثانیاً این ماهواره به خاطر ارتفاع کم آن، میدان جاذبه را بهتر می سنجد و ثالثاً اندازه گیری شتاب های غیر جاذبه ای در آن به جای استفاده از مدل های ریاضی چگالی جو و تابش خورشید به طور مستقیم صورت می گیرد. مقادیر اولیه به منظور عملی ساختن محاسبات به راحتی از راه سایت های اینترنتی مربوط به مؤسسه Gfz در شهر پوتسدام آلمان قابل دریافت است. لازم به ذکر است که همه نیروهای مزاحم با مدل های ریاضی در محاسبه مدار در نظر گرفته شده اند. اختلاف بین مدار نظری و مدار محاسبه شده در دستگاه مختصات ماهواره-مرکز به صورت زیر ارائه می شود.

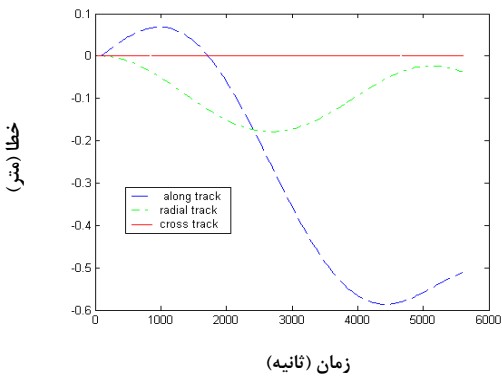


شکل ۶. اختلاف بین مدار به‌دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون و مدار به‌دست آمده از روش رونگ- کوتا- نیستروم.

همان‌طور که در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ ملاحظه می‌شود، نتایج روش آدامز- بشفورت و آدامز مولتون نزدیک به روش رونگ- کوتا است. حال پس از میانگین‌گیری از این سه مدار و مقایسه تک‌تک مدارها با این مدار داریم:

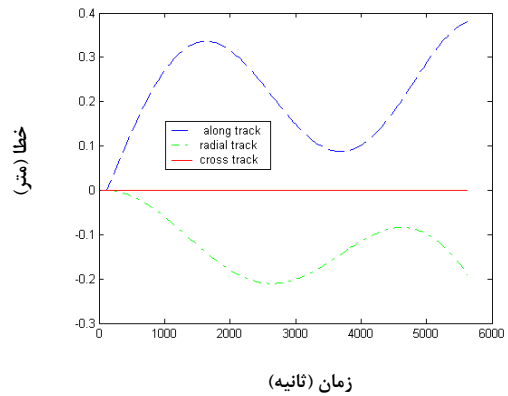


شکل ۷. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به‌دست آمده از روش رونگ- کوتا.

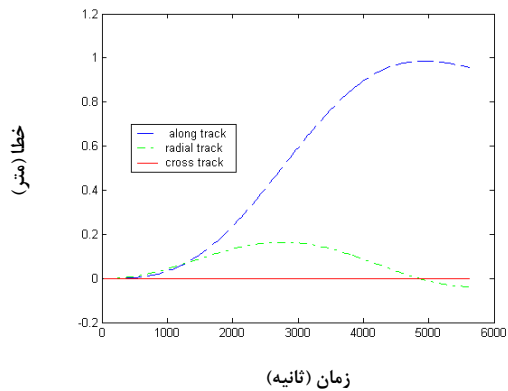


شکل ۸. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به‌دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون.

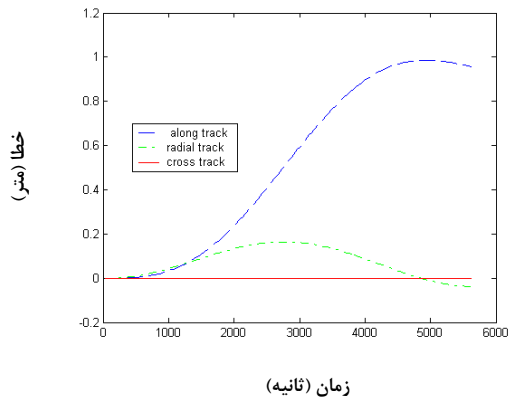
مؤلفه در امتداد حرکت ماهواره نقش تعیین‌کننده در بررسی دقت هر کدام از روش‌ها دارد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در روش رونگ- کوتا، مؤلفه در مسیر حرکت ماهواره حدود ۱/۶ متر و در جهت مخالف حرکت، انحراف پیدا کرده است، به‌طوری که ماهواره از مسیر نظری خود، ۱/۶ متر عقب‌تر قرار گرفته. خطا در این مؤلفه در روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون حدود ۲ متر رؤیت می‌شود و برای روش رونگ- کوتا- نیستروم حدود ۲/۵ متر. بنابراین در یک نگاه می‌توان گفت با توجه به مؤلفه در مسیر حرکت ماهواره، روش رونگ- کوتا بهتر از سایر روش‌ها عمل می‌کند. برای بررسی بیشتر، اختلاف بین این مدارهای انتگرال‌گیری شده بررسی می‌شود:



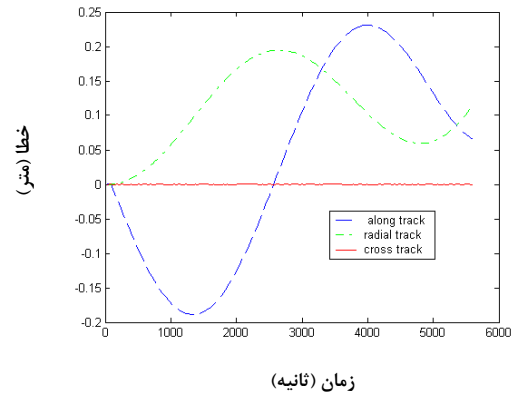
شکل ۴. اختلاف بین مدار به‌دست آمده از روش رونگ- کوتا و مدار به‌دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون.



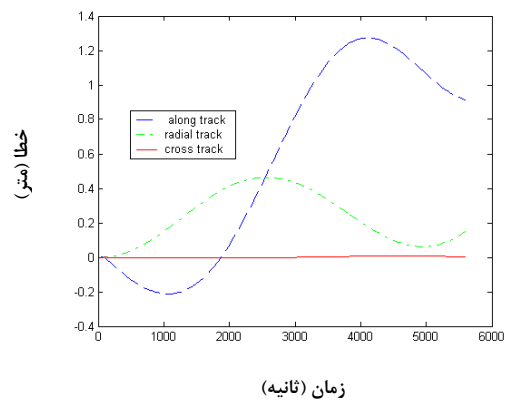
شکل ۵. اختلاف بین مدار به‌دست آمده از روش رونگ- کوتا و مدار به‌دست آمده از روش رونگ- کوتا- نیستروم.



شکل ۱۱. اختلاف بین مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا و مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا- نیستروم با در نظر گرفتن همه نیروها.



شکل ۹. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا- نیستروم.

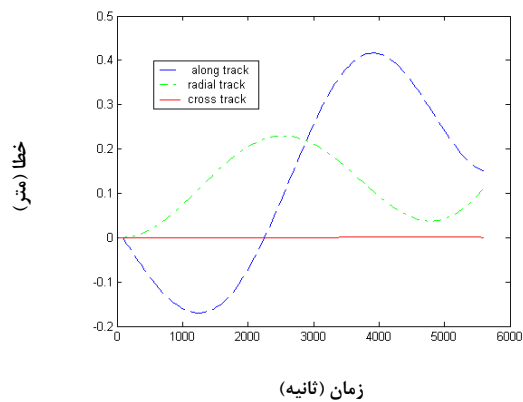


شکل ۱۲. اختلاف بین مدار به دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون و مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا- نیستروم با در نظر گرفتن همه نیروها.

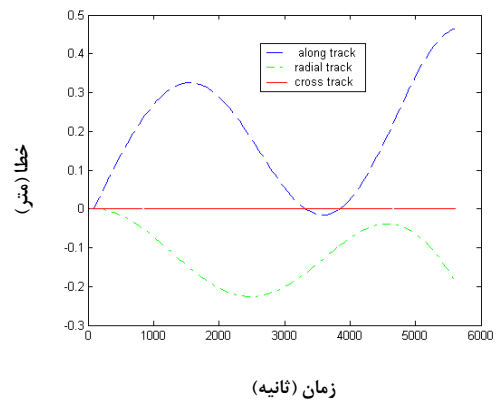
با توجه به شکل‌های فوق مشخص است که مدار به دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز مولتون به میانگین نزدیک است ولی مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا به مدار نظری نزدیک است.

با در نظر گرفتن همه نیروهای معشوش کننده و تشکیل معادلات دیفرانسیل ماهواره و انتگرال گیری از این دستگاه معادلات دیفرانسیل با روش‌های یاد شده نتایج زیر به دست می‌آید.

پس از میانگین گیری از این مدارها و مقایسه هر مدار با مدار میانگین خواهیم داشت:



شکل ۱۳. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا با در نظر گرفتن همه نیروها.



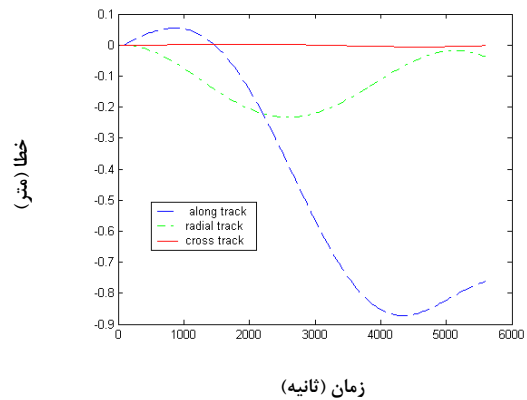
شکل ۱۰. اختلاف بین مدار به دست آمده از روش رونگ- کوتا و مدار به دست آمده از روش آدامز- بشفورت و آدامز- مولتون با در نظر گرفتن همه نیروها.

کمتر از سایر روش‌هاست. یعنی به عبارتی این روش در شکل بیضی مدار خطای کمتری نسبت به دو روش دیگر ایجاد می‌کند.

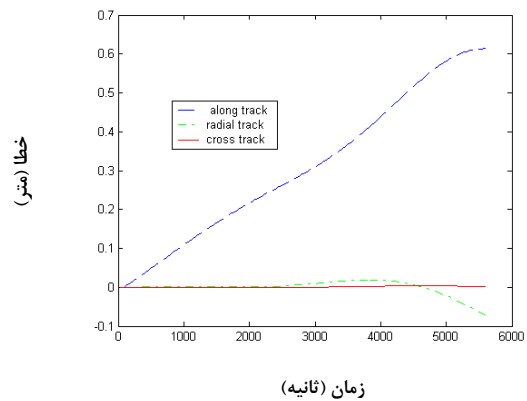
۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نیروهای مغشوش کننده زیادی به ماهواره وارد می‌شود که این نیروها به دو دسته جاذبه‌ای و غیرجاذبه‌ای تقسیم می‌شود با در نظر گرفتن شتاب‌های حاصله از این نیروها می‌توان معادله دیفرانسیل مسیر ماهواره را تشکیل داد.

برای حل این معادله دیفرانسیل روش‌های زیادی وجود دارد که به‌توان با آنها، دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت ماهواره را به‌طور همزمان حل کرد. از بین روش‌های عددی حل معادله دیفرانسیل، روش‌های رونگ-کوتا، آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون و روش رونگ-کوتا-نیستروم در نظر گرفته شد. از بین مدار کپلری به‌دست آمده از هر کدام از این روش‌ها، مدار به‌دست آمده از روش رونگ-کوتا به مدار نظری نزدیک‌تر است اما روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون در میان سایر روش‌ها به میانگین بین این سه مدار بسیار نزدیک‌تر از سایر مدارهاست. شاید بتوان گفت که این روش نقش یک میانگین را بین دو روش دیگر ایفا می‌کند. در دستگاه مختصات ماهواره-مرکز مؤلفه متأثر از خطای انتگرال‌گیری مؤلفه در طول مسیر حرکت ماهواره است. اختلاف بین مؤلفه در طول مسیر حرکت ماهواره بین مدار نظری و مدار انتگرال‌گیری شده از روش‌های رونگ-کوتا، آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون و رونگ-کوتا-نیستروم به ترتیب $1/6$ ، 2 و $2/5$ متر است در نتیجه می‌توان گفت که مدار به‌دست آمده از روش رونگ-کوتا به مدار نظری نزدیک‌تر است. تفاوت زیادی بین سایر مؤلفه‌های خطای انتگرال‌گیری در دستگاه مختصات ماهواره-مرکز، که بتواند نتیجه فوق را تحت تأثیر قرار دهد دیده



شکل ۱۴. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به‌دست آمده از روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون با در نظر گرفتن همه نیروها.



شکل ۱۵. اختلاف بین مدار میانگین و مدار به‌دست آمده از روش رونگ-کوتا-نیستروم با در نظر گرفتن همه نیروها.

با توجه به شکل‌های فوق واضح است که مدار به‌دست آمده از روش آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون به مدار میانگین نزدیک است. همچنین تفاوت حائز اهمیتی بین دو حالت انتگرال‌گیری با در نظر گرفتن همه نیروها یا بدون در نظر گرفتن آنها دیده نمی‌شود و خطای انتگرال‌گیری، مستقل از نیروهاست. در هر دو حالت در نظر گرفته شده. مدار محاسبه شده با روش پیشگو-اصلاح‌گر آدامز-بشفورت و آدامز-مولتون به مدار میانگین نزدیک‌تر است. و نکته دیگر که در این روش وجود دارد این است که مؤلفه شعاعی خطا در این روش

- Calgary, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, Calgary, Canada.
- Eshagh, M., 2003, Consideration of behavior of orbital elements with respect to different degree and order of geopotential models, submitted to Journal of Earth and Space Physics, Geophysics Institute of Tehran University, Tehran, Iran.
- Eshagh, M., 2005, Step variable numerical orbit integration of a low earth orbiting satellite, Journal of Earth and Space Physics, Geophysics Institute of Tehran University, Tehran, Iran, Vol: **31**, 1-12.
- Eshagh, M., and Najafi, Alamdari, M., 2003, Precise orbit determination of a low earth orbiting satellite, Msc thesis, K.N.Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
- Eshagh, M., and Najafi, Alamdari, M., 2005a, Investigation of orbital perturbations of a low earth orbiting (LEO) satellite, paper to be presented in NATM June 27-29, Institute of Navigation ION 61 st. Cambridge, Massachusetts, United States of America.
- Eshagh, M., and Najafi, Alamdari, M., 2005b, Numerical orbit integration of a low earth orbiting satellite, paper to be presented in European navigation conference, GNSS 2005, German Institute of Navigation, Munchen, Germany.
- Eshagh, M., and Najafi Alamdari, M., 2005c, Numerical integration and orbital perturbation of CHAMP satellite's orbit, paper to be presented in GNSS 2005, January, Institute of navigation, California, San Diego, United States of America.
- Kuang, D., Bar-Server, Y., Bertiger, W., Desai, S., Haines, B., Iijima, B., Kruizinga, G., Meehan, Th., and Romans, L., 2001, Precise orbit determination for CHAMP using GPS data from BlackJack Receiver, in 2001 ION National Technical Meeting Proceedings, Session E1: Scientific Application, Timing, and Frequency, Long Beach, California, January, 2001.
- McCarthy, D., 1996, "IERS Technical Note 21" US Naval observatory, central bureau of IERS-Observatoire.
- Reigber, C., Balmino, G., Schwintzer, P., Biancale, R., Bod, A., Lemoine, J. M., König, S. Loyer, H. Neumayer, J.C. Marty, F. Barthelmes, R., Perosant, F., Zhu, S. Y., 2002, A high-quality gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1S), Geophys. Res. Lett. Vol. 29, NO. 14.

نمی‌شود، اما می‌توان گفت که مؤلفه خطای قائم بر مسیر حرکت ماهواره در روش آدامز-بشفورت و آدامز مولتون نسبت به سایر مدارها کمتر است یعنی کمترین خطا را در میل مدار ایجاد می‌کند. وجود نیروهای مغشوش کننده، بر رفتار خطا و حتی تا حدودی در اندازه خطا تأثیر زیادی ندارد. نتایج یکسانی در مورد خطای انتگرال‌گیری در حالت حل مدار بدون در نظر گرفتن نیروها و با حل، در نظر گرفتن آنها قابل حصول است.

به منظور بهبود نتایج، روش‌های عددی با مراتب بالاتر، برای محاسبات دقیق‌تر پیشنهاد می‌شود. همه روش‌های محاسبات عددی وابسته به دقت و صحت مدل‌های ریاضی نیروهای مغشوش به کار گرفته شده‌اند بدیهی است که بایستی مدل‌های دقیق و صحیح در این مورد به کار برده شود. مدار به دست آمده از روش‌های عددی فقط یک مدار پیش‌بینی شده است و ممکن است آلوده به خطای محاسبات و یا خاصیت تجمعی خطاها در هر مرحله حل مدار باشد. بنابراین پیشنهاد می‌شود در مورد حل دقیق، مدار ماهواره با مشاهدات زمینی یا فرا زمینی تلفیق و سرشکن شود. چنانچه هدف تعیین موقعیت آنی ماهواره باشد، می‌توان روش انتگرال‌گیری مدار را با فیلتر کالمن به همراه مشاهدات زمینی یا فضایی سرشکن کرد و مدار را بهبود بخشید. برای بررسی بیشتر خطای ماهواره می‌توان با محاسبه میزان اریبی مدار انتگرال‌گیری شده، به همراه استفاده از قانون انتشار خطای اتفاقی، مدار را آنالیز و ریانس نیز کرد.

منابع

- Babolian, E., and Malek Nejad, K., 1995, Numerical computations, University of Elm va San'at publication, Tehran, Iran.
- Buffet, A., 1985, Short arc orbit improvement of GPS satellite, Msc Thesis, University of

- Su. H., 2000, Orbit determination of IGSO, GEO and MEO satellites, Ph.D thesis, Department of Geodesy, University of Bundeswehr, Munchen, Germany.
- Touboul, B. D., Willemenot, E., Foulon, B., and Josselin, V., 1999, Acceleometers for CHAMP, GRACE and GOCE space missions: Synergy and evolution, *Boll. Geof. Teor. Appl.*, **40**, 321-327.
- Vanicek, P., and Krakiwsky, E., 1987, *Geodesy the Concepts*, North-holand publishing company. Netherland.
- Wolf, R., 2000, Satellite orbit and ephemeris determination using inter satellite links, Ph.D thesis, Department of Geodesy, University of Bundeswehr, Munchen, Germany.
- Rim, H. J., and Schutz. B. E., 2001, Precision orbit determination (POD), Geoscience laser and altimeter satellite system, university of Texas, United States of America.
- Santos, M. C., 1994, On real time orbit improvement for GPS satellites, Ph.D thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Canada.
- Seeber, G., 2003, *Satellite Geodesy*, 2nd completely revised and extended edition, Walter de Gruyter. Berlin. New York.
- Shidfar, A., 1994, *Differential equations*, University of Elm va San'at publication, Tehran, Iran.