روشی بهینه برای تحلیل دینامیکی سد قوسی ـ سنگ پی با ترکیب اجزای محدود و المانهای مرزی

احمد آفتابی ثانی[1] و وحید لطفی[2*]

[1]دانشجوی دکتری سازه - دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

[2]استاد دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(تاریخ دریافت ۸۵/۲/۲ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۱/۲۸ ، تاریخ تصویب ۸۶/۳/۱۹)

چکیده

در این مقاله، با به کارگیری روش اجزای مرزی سه‌بعدی که توانایی مدل سازی هر نوع هندسه دلخواه دره سد قوسی را داراست، ماتریس امپدانس سنگ پی که شامل اثرات جرم، سختی و میرایی آن می‌باشد به دست می‌آید. در ادامه با بهره گیری از شیوه زیرسازه، ماتریس مزبور در معادله حاکم بر رفتار دینامیکی سد قوسی وارد می‌گردد. بدین ترتیب، نارسایی مهم موجود در روشهای مشابه پیشین که همانا فرض منشوری بودن دره سد می باشد، از میان برداشته شده و راهکاری برای تحلیل دقیق سد قوسی ـ سنگ پی با هندسه دلخواه در دسترس قرار می‌گیرد. این نوشتار با ارائه راهکاری در جهت بالا بردن کارایی روش و کاهش زمان چشمگیر محاسبه ماتریس امپدانس ادامه یافته و با تحلیل نمونه‌هایی عددی، مقایسه با نتایج پیشینیان و نشان دادن درستی روش پیشنهادی پایان می‌یابد.

واژه های کلیدی: سد قوسی - اندرکنش سد ـ سنگ پی - روش اجزای مرزی - تحلیل حوزه فرکانس

مقدمه

در پاره‌ای موارد، وارد ساختن اثرات ناشی از وجود محیط های پیرامون سازه در روند تحلیل، سبب می‌گردد که پاسخ های سازه و به ویژه رفتار لرزه‌ای آن دستخوش تغییرات شایانی شود. در این حالت، باید سازه را با در نظر گرفتن اندرکنش های موجود بین آن و محیطهای مزبور مورد تحلیل قرار داد که بررسی جداگانه این دو بخش کار چندان درستی نبوده و نتایج مناسبی نیز بدست نمی‌دهد. در این میان، سدهای بتنی که در مجاورت دو محدودهٔ متفاوت سنگ پی و آب درون مخزن می باشند، یکی از بهترین و کامل ترین مجموعه‌های اندرکنشی را تشکیل می‌دهند. باید این نکته را اضافه نمود که تاکنون پژوهش های فراوانی در زمینه تحلیل دینامیکی سدهای بتنی با لحاظ نمودن اثرات اندرکنش مخزن و سنگ پی به انجام رسیده که مجموعه آنها، نشان دهنده اهمیت اثرات مزبور و لزوم وارد ساختن آنها در فرآیند تحلیل سازه و یافتن پاسخ های لرزه‌ای آن می باشد [۱-۳].

شایان توجه است که یکی از روش های مناسب برخورد با مسائل اندرکنشی، بکارگیری فن زیر سازه است [۴]. در این شیوه، اثرات هر یک از محیط های موجود بر دیگری، با استفاده از نیروهایی که تابع مشخصات هندسی و مکانیکی آن محیط می باشد، اعمال گردد. این نیروها، به طور معمول با تغییرمکان های مشترک محدوده‌های مجاور در ارتباط بوده و حلقه اصلی این ارتباط، ماتریسی است که در اینجا، ماتریس امپدانس نامیده می‌شود و برای محدودهٔ سنگ پی پیرامون سد قوسی بدست می‌آید. این ماتریس که تابع فرکانس بوده و به ویژگیهای هندسی و مکانیکی دره سد وابسته می‌باشد، از این پس با $[S_f(\omega)]$ به نمایش درآمده و در حالت کلی، مختلط، متقارن و ناتُنُک است.

باید دانست محدوده سنگ پی با استفاده از سه ویژگی مهم خود، یعنی سختی، جرم و میرایی، بر رفتار سازه مجاور خود تأثیر می‌گذارد. در این میان، دو مشخصه جرم و میرایی تنها در تحلیلهای دینامیکی وارد شده و امکان انتشار امواج در محدوده مزبور را فراهم می‌سازند. آشکار است که چشم‌پوشی از این دو مشخصه سبب می‌گردد که تحلیل آن به شکلی ساده‌تر انجام شود. این فرض، اساس شکل‌گیری نخستین کارهای پژوهشی مربوط به تحلیل اندرکنشی سد و سنگ پی که به سالهای پایانی دهه هفتاد میلادی برمی‌گردد، می باشد. در این کارها، اثرات اندرکنشی سنگ پی، با حل دقیق و غیر عددی معادلات استاتیکی حاکم بر پی و وارد ساختن نیروهای ناشی از آن، در مدل اجزای محدود سد وزنی لحاظ

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۴۵۴۳۰۱۷ ، فاکس : ۶۶۴۱۴۲۱۳ ، Email: vahlotfi@aut.ac.ir

می‌گردید. در این دسته از روشها، هندسه بسیار ساده سنگ پی، این امکان را فراهم می‌آورد که با اندکی ساده‌سازی، بتوان از پاسخ های دقیق محیط کشسان همگن نیمه بینهایت، برای تحلیل مجموعه استفاده نمود.

در ادامه تلاش هایی برای وارد ساختن اثر انعطاف‌پذیری سنگ پی در تحلیل سدهای قوسی به انجام رسید. در این حالت به دلیل عدم امکان بهره‌جویی از پاسخ های دقیق و غیرعددی برای تحلیل سنگ پی که از هندسه پیچیده آن ناشی می‌شود، استفاده از روش های عددی مانند اجزای محدود و المان های مرزی اجتناب ناپذیر می باشد. به عنوان نمونه، در یکی از پژوهش های انجام شده، محدوده پیرامون دره سد قوسی تا فاصله معقولی از محل قرارگیری سد، به وسیله اجزای حجمی سه بعدی مدل سازی گردید و ماتریس سختی متراکم شده مجموعه که تنها شامل درجه‌های آزادی محل اتصال سد وسنگ پی می‌شد، به دست آمد[۵]. سپس به کمک این ماتریس، شکلهای مود مجموعه و در پایان، پاسخ دینامیکی سد با در نظر گرفتن اثر انعطاف‌پذیری سنگ پی تعیین گردید.

در کنار وارد شدن روشهای عددی در تحلیل سنگ پی و در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری آن، پژوهش هایی نیز در زمینه لحاظ کردن اثرات ناشی از جرم و میرایی و در واقع، تحلیل دینامیکی محدوده مزبور به انجام رسید [۶]. خاطر نشان گردد با این کار، ماتریس امپدانس دینامیکی سنگ پی که افزون بر ویژگی سختی، مشخصه‌های جرم و میرایی محدوده پی را نیز در خود جای می‌دهد، به دست می‌آید که در مقایسه با ماتریس سختی متراکم شده سنگ پی، از دقت بیشتری برخوردار است. اما از سوی دیگر، مدل سازی محدوده مزبور که در اغلب موارد، محیطی نیمه بینهایت و در بخش هایی بدون مرز می‌باشد، دشواری هایی به همراه دارد که در مدل های پیِ بدون جرم، به چشم نمی‌خورند. به عنوان نمونه در صورت استفاده از روش اجزای محدود، باید مدلِ مربوط به محیط نیمه بی نهایت را در فاصله مناسبی از محل قرارگیری سد قطع نمود و در آنجا از شرط های مرزی تقریبی بهره جست که این امر خود سبب نادقیق شدن پاسخ ها می‌گردد.

در ادامه برای رفع نارسایی مربوط به بسته بودن محدوده نیمه بیکران سنگ پی که در بیشتر مدل های عددی با به کارگیری مرزهای جاذب موج و یا اجزای نیمه بینهایت، تاحدودی برطرف می‌گردید، راهکارهای دیگری نیز ارائه شد. در این میان، روش اجزای مرزی به عنوان یکی از بهترین شیوه‌های برخورد با این مسئله و در حالت کلی تحلیل محیط های نیمه بینهایت، مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت [۷]. این شیوه عددی که در شمار روش های باقیمانده وزندار به حساب می‌آید، توانایی حل معادلات الاستودینامیک سه بعدی در محیط های نیم فضا، با هر هندسه دلخواه برای مرز فوقانی را داراست. باید اضافه نمود که این راهکار توانمند، بدون به کارگیری هرگونه مرز مجازی و تنها با شبکه‌بندی مرز فوقانی محیط و بدلیل ارضای خودکار شرط تشعشع در رابطه سازی و معادلات بنیادی خود، به تحلیل دینامیکی محدوده مورد نظر پرداخته و پاسخ بسیار مناسبی در دسترس قرار می‌دهد.

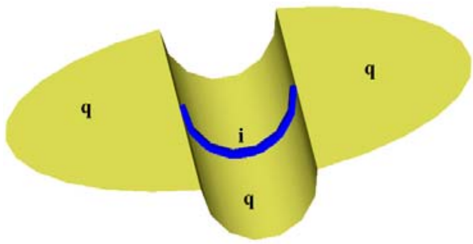
در این مقاله با توجه به مطالب بیان شده و بر پایه روش اجزای مرزی، راهکاری برای محاسبه ماتریس امپدانس دینامیکی سنگ پی که می‌تواند در تحلیل مجموعه سد قوسی ـ سنگ پی و یا هر مجموعه سه بعدی اندرکنشی خاک و سازه دیگر به کار رود، ارائه می‌گردد. در ادامه، نخست روند برپایی ماتریس مزبور و رابطه‌های بکار رفته در آن که بر اساس معادلات بنیادی اجزای مرزی استخراج شده‌اند، به صورت گام به گام تشریح می‌گردد. با این کار می‌توان به محاسبه ماتریس امپدانس سنگ پی، برای مجموعه‌ای از فرکانس های مورد نظر که در این جا شامل ۲۴۰ فرکانس صفر تا ۱۹/۱ هرتز با گام هایی مساوی است، پرداخت که کاری بس زمان بر و وقت‌گیر می‌باشد. پس از این مرحله چگونگی وارد ساختن ماتریس مزبور در فرآیند تحلیل دینامیکی سد قوسی که در این جا به روش مستقیم و در حوزه فرکانس صورت می‌پذیرد، ارائه شده و بدین ترتیب شیوه پیشنهادی برای تحلیل اندرکنشی سد ـ سنگ پی کامل می‌گردد.

باید دانست هر چند که راهکار ارائه شده، توانایی مدل سازی هر نوع هندسه دلخواه دره سد را داشته و از دقت بسیار خوبی نیز برخوردار است، اما زمانِ قابل‌توجه مورد نیاز برای برپایی ماتریس $[S_f(\omega)]$، نارسایی مهمی می‌باشد که در بخش بعدی مقاله راه‌حلی برای آن پیشنهاد می‌شود. این کار با حفظ دقت پاسخ های بدست آمده، زمان اجرای برنامه را کاهش چشمگیری داده و راه را برای استفاده عملی از روش پیشنهادی هموار می‌سازد. این نوشتار با ارائه پاره‌ای از نتایج حاصل از تحلیل دینامیکی

مجموعه سد قوسی با مخزن خالی و سنگ پی متصل به آن پایان می‌یابد.

ماتریس امپدانس پی

ماتریس امپدانس سنگ پی که نقش پیوند میان تغییر مکان های به وجود آمده در پی بر اثر نیروهای وارد به آن را داراست، در حالت استاتیکی، چیزی جز ماتریس سختی متراکم شده پی برای درجات آزادی مرز مشترک سازه و پی نمی‌باشد. در حالت دینامیکی، ماتریس مزبور ترکیبی از ویژگی های سختی، جرم و میرایی محدوده سنگ پی است. بنابراین، به نظر می‌رسد که یکی از بهترین روش ها برای محاسبه آن، استفاده از مفهوم ماتریس های مشخصه موجود در تحلیل سازه‌ها باشد. یادآوری می‌گردد، برای این منظور کافی است با اعمال تغییرمکان یکه در تنها یکی از درجات آزادی مرز مشترک و مقید نگاه داشتن سایر آنها، نیروهای به وجود آمده در درجات آزادی مزبور را محاسبه نمود که این نیروها خود ستون مربوط به آن درجه آزادی (با تغییرمکان واحد) را در ماتریس امپدانس پی تشکیل می‌دهند. آشکار می‌باشد که با تکرار این روند برای تمامی درجه‌های آزادی مرز مشترک، می‌توان یکایک ستون های ماتریس مزبور را بدست آورد و آن را به طور کامل برپا نمود. خاطر نشان می‌سازد، فرآیند باز و بسته نمودن درجات آزادی تغییرمکانی، تنها به مرز مشترک سد و سنگ پی (ناحیه i) مربوط شده و شرط مرزی سایر گره‌های مرز فوقانی سنگ پی که در مجاورت فضای آزاد می باشد (ناحیه q)، همانا ترکشن (مؤلفه‌های تنش در جهت محورهای مختصات) برابر صفر است. دو ناحیه مزبور در شکل (۱) قابل مشاهده می باشد.



شکل ۱: محدوده شبکه‌بندی شده سنگ پی.

تاکنون مشخص گردید که برای یافتن هر یک از ستون های ماتریس امپدانس، باید معادله دیفرانسیل حاکم بر محیط سنگ پی را با شرایط مرزی بیان شده در مرزهای i و q، حل نمود. روشن است، به دلیل هندسه بسیار پیچیده مرزهای مسئله، امکان حل دقیق و غیر عددی آن فراهم نبوده و به کارگیری یکی از روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل، اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. در این نوشتار، راهکار مورد استفاده، روش اجزای مرزی خواهد بود که در بخش آتی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اجزای مرزی سه‌بعدی

فن اجزای مرزی همانند سایر روش های موسوم به باقی مانده وزن دار با انتگرال گیری از حاصل ضرب معادله دیفرانسیل در یک تابع وزنی و کمینه کردن آن تابعی به دست می‌دهد که با دقت خوبی، همان پاسخ معادله دیفرانسیل است. در این میان همانند راهکار اجزای محدود، کار انتگرال گیری به صورت عددی و بر روی بخش هایی به نام جزء یا المان انجام می‌پذیرد اما بر خلاف آن، این اجزاء تنها بر روی مرزهای حوزه مورد نظر واقع بوده و نیازی به شبکه‌بندی محدوده درون آن نمی‌باشد. زیرا روش اجزای مرزی، با بهره‌جویی از قضیه معروف گرین، انتگرال های درون حوزه را به انتگرال هایی مرزی تبدیل می‌کند که آنها را نیز به شکلی عددی محاسبه می‌نماید. تفاوت دیگر این شیوه با فن اجزای محدود را می‌توان در انتخاب تابع وزن آن دانست که بر خلاف توابع چندجمله‌ای و سادهٔ روش مزبور، توابعی پیچیده و بعضاً بد رفتار می باشند.

این توابع که به حل اساسی یا تابع گرین موسوم می‌باشند، با حل همان معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله، اما در محیطی بیکران و با طرف راستی، برابر تابع دلتای دیراک بدست می‌آیند. در مسائل کشسان دینامیکی، چنین پاسخی را می‌توان با قرار دادن یک بار متمرکز واحد $1e^{i\omega t}$ در نقطه‌ای مانند ξ و محاسبه مقادیر تغییرمکان در نقطه‌ای مانند X تعیین نمود. این کار که با حل غیر عددی معادلات ناویر در یک محیط همگن بدون مرز و به کمک روش هایی مانند تجزیه هلمولتز صورت می‌پذیرد، تابع تغییرمکان را به شکل زیر در دسترس قرار می‌دهد:

$$u_{ij}^{*}=\frac{1}{4\pi\rho c_s^2}[\psi\,\delta_{ij}-\chi\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}] \qquad (۱)$$

$$i,j=1,2,3$$

در این رابطه، u_{ij}^{*} مؤلفه جهت x_j تابع تغییرمکان (حل اساسی) در نقطه X، به خاطر اعمال بار یکه در نقطه ξ و در جهت x_i می‌باشد که فاصله دو نقطه مزبور نیز برابر

r است. ویژگی های مکانیکی محیط را چگالی و سرعت امواج طولی و برشی آن که به ترتیب با ρ ، c_p و c_s نشان داده شده‌اند، بیان می‌دارند. عامل دیگر به کار رفته در رابطه (۱)، δ_{ij} یا همان دلتای کرونکر می‌باشد که در صورت برابری i و j ، مساوی یک و در غیر این صورت، برابر صفر خواهد بود. دو تابع ψ و χ نیز مطابق معادلات زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned}\psi &= \left(\frac{1}{k_s^2 r^2}+\frac{1}{k_s r}+1\right)\frac{e^{-k_s r}}{r} \\ &\quad -\frac{c_s^2}{c_p^2}\left(\frac{1}{k_p^2 r^2}+\frac{1}{k_p r}\right)\frac{e^{-k_p r}}{r} \\ \chi &= \left(\frac{3}{k_s^2 r^2}+\frac{3}{k_s r}+1\right)\frac{e^{-k_s r}}{r} \\ &\quad -\frac{c_s^2}{c_p^2}\left(\frac{3}{k_p^2 r^2}+\frac{3}{k_p r}+1\right)\frac{e^{-k_p r}}{r}\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن، k_s و k_p مفهومی مشابه عدد موج داشته، به صورت $k_l = i\omega / c_l$ تعریف و حل اساسی تابع فرکانس را می‌سازند. خاطر نشان می گردد پاسخ عمومی معادله حاکم بر مسئله، جملاتی نمایی با توان مثبتِ $k_s r$ و $k_p r$ نیز دارد که در این جا، برای ارضای شرط تشعشع حذف گردیده‌اند. یادآوری می شود جمله کلی $e^{k_l r}$ نشان دهنده امواجی است که از دوردست و به سمت منبع موج در حرکت می باشد و حذف آن سبب برقراری خودکار شرط تشعشع و در نتیجه عدم نیاز به استفاده از مرزهای مجازی در مسئله می‌شود.

ناگفته نماند مقادیر ترکشن (مؤلفه‌های تنش در جهت محورهای مختصات) نیز با قرار دادن تابع بدست آمده برای تغییرمکان در روابط تنش ـ تغییرمکان موجود در تئوری الاستیسیته بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}p_{ij}^* &= \frac{1}{4\pi}[(\frac{d\psi}{dr}-\frac{\chi}{r})(\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{ij}+n_i\frac{\partial r}{\partial x_j}) \\ &\quad -2\frac{\chi}{r}(n_j\frac{\partial r}{\partial x_i}-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}) \\ &\quad -2\frac{d\chi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}+(\frac{c_p^2}{c_s^2}-2) \\ &\quad \times(\frac{d\psi}{dr}-\frac{d\chi}{dr}-2\frac{\chi}{r})n_j\frac{\partial r}{\partial x_i}] \\ &\qquad i,j=1,2,3\end{aligned} \tag{۳}$$

در این رابطه همان عوامل موجود در معادله (۱)، به همراه n_i که i امین مؤلفه بردار یکه عمود بر مرز در نقطه X است قابل مشاهده می‌باشد. خاطر نشان می گردد با مشخص بودن دو عامل u_{ij}^* و p_{ij}^* تغییرمکان هر نقطه دلخواه از محدوده مورد نظر مسئله مانند k را می‌توان به کمک انتگرال مرزی زیر محاسبه نمود:

$$c_{ij}^k u_j^k = \int_\Gamma u_{ij}^* p_j \, d\Gamma - \int_\Gamma p_{ij}^* u_j \, d\Gamma \tag{۴}$$

در خصوص عامل c_{ij}^k که به هندسه مرز و شکسته یا هموار بودن آن در نقطه k وابسته است و با بهره‌جویی از مفهوم حرکت جسم صلب به دست می‌آید در بخش های آتی بحث می گردد. اما همان گونه که از رابطه کنونی بر می‌آید برای محاسبه تغییرمکان در نقطه مورد نظر باید مقادیر تغییرمکان و ترکشن در تمامی نقاط مرزی معلوم باشد و این در حالی است که این مقادیر، تنها در پاره‌ای از نقاط و آن هم به کمک شرایط مرزی موجود در مسئله، قابل دستیابی می باشند. بنابراین، برای تعیین آن ها و به اصطلاح، تکمیل شرایط مرزی باید نخست معادله (۴) را برای تمامی نقاط مرزی برپا نمود و با حل توأم آنها، مقادیر u_j^k و p_j^k را برای هر نقطه k متعلق به مرز بدست آورد.

باید دانست در اغلب مسائلی که به کمک روش اجزای مرزی حل می‌شوند، هدف تنها محاسبه مقادیر مرزی تغییرمکان و تنش بوده و نیازی به محاسبه آنها در نقاط درون حوزه نمی‌باشد. بنابراین، تکمیل شرایط مرزی که نخستین گام یافتن پاسخ به حساب می‌آید، گام پایانی این گونه مسائل و از جمله مسئله مورد بحث خواهد بود. اما روشن است که محاسبه انتگرال های رابطه (۴) به صورت دقیق و غیرعددی بسیار دشوار و حتی ناممکن بوده و این امر، استفاده از یک راهکار عددی، به همراه شبکه‌بندی مرز حوزه و تقسیم آن به پاره‌ای جزء محدود را گریزناپذیر می‌نماید. این کار که همانند شیوه اجزای محدود، با بهره‌جویی از مفهوم توابع درون یاب و جای گزینی یک تابع پیوسته، با مقادیر گسسته آن در نقاطی بنام گره صورت می‌پذیرد، معادله (۴) را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌نماید:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \tag{۵}$$

در این رابطه، $[H]$ و $[G]$، به ترتیب ماتریس های تابع فرکانس شبه‌سختی و شبه‌نرمی محیط می باشند که درایه‌های آنها، با انتگرال گیری از حاصل ضرب توابع درون یاب در حل های اساسی ترکشن و تغییرمکان به دست می‌آید. بردارهای $\{U\}$و $\{P\}$نیز به

ترتیب، مقادیر گرهی تغییر مکان و ترکشن نقاط مرزی را در خود جای داده‌اند که تنها پاره‌ای از درایه‌های آنها مجهول می‌باشد. آشکار است، با اعمال اندکی تغییر در چیدمان معادلات (۵) و انتقال ماتریس ضرایب ومقادیر مجهول به یک طرف و سایر عوامل به سوی دیگر، می‌توان دستگاهی جبری برپا نمود که پاسخ آن، همان مقادیر تغییرمکان و ترکشن گره‌های مرزی خواهد بود. این جاب جایی معادلات که تنها به شرایط مرزی موجود در مسئله بستگی دارد، بحث اصلی در بخش بعد می‌باشد.

حل دستگاه معادلات

در این قسمت، روند برپایی و حل دستگاه معادلات (۵)، برای محیط سنگ پیِ به نمایش درآمده درشکل (۱) مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، شکل مزبور که شامل دو ناحیه i و q بوده و سطح خارجی دره سد قوسی را نشان می‌دهد، به کمک اجزای هم عامل هشت گرهی، شبکه‌بندی می‌گردد. با این کار رابطه (۵) را می‌توان به صورت تفکیک شده زیر نشان داد:

$$\sum_{i+q}[H^e]\{U^e\}=\sum_{i+q}[G^e]\{P^e\} \qquad (۶)$$

دو ماتریس موجود در رابطه بالا، همان ماتریس های بنیادین روش اجزای مرزی‌اند که رونویس e آنها، نشان دهنده سهم مربوط به جزء e ام می‌باشد. برای محاسبه این دو عامل، باید بار واحد را در هر سه جهت x، y و z و هم چنین، در تمامی گره‌های مدل (مانند k) قرار داد و هر بار، ماتریسی ۲۴×۳ بدست آورد و آن را در سه سطر مربوط به گره k ام جای داد. یادآوری می شود، رابطه کلی محاسبه ماتریس های مشخصه المان هشت‌گرهی e ام با توابع درون یاب $[N^e]$، به خاطر قرارگیری بار واحد در گره k ام به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}[H^{e,k}]&=\int_{\Gamma^e}[N^e]_{24\times3}[p^*|_{\xi=k}]_{3\times3}\,d\Gamma^e\\ [G^{e,k}]&=\int_{\Gamma^e}[N^e]_{24\times3}[u^*|_{\xi=k}]_{3\times3}\,d\Gamma^e\end{aligned} \qquad (۷)$$

پس از $N\times NE$ بار محاسبه انتگرالهای موجود در رابطه (۷) برای یک مدل N گرهی با NE المان، اینک نوبت به اعمال شرایط مرزی مسئله می‌رسد. خاطر نشان می گردد، این شرایط مرزی، برای به دست آوردن ستون m ام ماتریس امپدانس و با توجه به نواحی دوگانه شکل (۱)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\{U_i\}&=\{\overset{1}{0}\;\overset{2}{0}\cdots\overset{m-1}{0}\;\overset{m}{1}\;\overset{m+1}{0}\cdots\overset{3N_i-1}{0}\;\overset{3N_i}{0}\}^T\\ \{P_q\}&=\{0\}_{3N_q\times1}\end{aligned} \qquad (۸)$$

در این روابط، N_i و N_q، به ترتیب شمار گره‌های موجود در هر یک از نواحی i و q بوده، رابطه $N_i+N_q=N$ برای آنها برقرار می‌باشد. آشکار است، دو بردار دیگر $\{P_i\}$ و $\{U_q\}$ مجهول بوده و باید با حل معادله (۶) محاسبه گردند که در این میان، تنها بردار نخست که دربردارنده ترکشن های گرهی مرز مشترک سد و سنگ پی است، مهم بوده و در برپایی ماتریس امپدانس بکار می‌آید. در ادامه، باید شرایط مرزی موجود در رابطه (۸) را به گونه‌ای در معادله (۶) وارد نمود. برای این منظور، نخست با توجه به چگونگی اتصال المان ها، فرآیند سوار شدن ماتریس های مشخصه آنها، همانند روش اجزای محدود انجام پذیرفته و بدین ترتیب طرف راست رابطه (۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i+q}[G^e]\{P^e\}=[G_i]\{P_i\}+\sum_{q}[G^e]\{P^e\} \qquad (۹)$$

که در آن، ماتریس $[G_i]$ تنها شامل اجزایی می‌گردد که در ناحیه i قرار دارند. جمله آخر نیز بدلیل صفر بودن بردار $\{P_q\}$، برابر صفر گشته و در نتیجه، نیازی به محاسبه $[G^e]$ مربوط به المان های موجود در ناحیه q نمی‌باشد.

خاطر نشان می گردد، یافتن مستقیم درایه‌های قطری ماتریس های $[H]$ و $[G]$، به دلیل مبهم و تکین شدن حل اساسی در $r=0$ دشوار بوده و باید برای به دست آوردن آنها، چاره‌ای اندیشید. در این میان، طبیعتِ ساده تکینگی[1] موجود در حل اساسی مربوط به تغییرمکان، محاسبه درایه‌های قطری $[G]$ را با بهره‌جویی از ترفندهای ریاضی ممکن می‌سازد. اما این روش را در مورد تابع ترکشن رابطه (۳) نمی‌توان بکار برد و از این رو، درایه های قطری ماتریس $[H]$ با بهره‌جویی از یک مفهوم تحلیلی که همانا، عدم ایجاد نیرو در یک محدوده بسته ایستا، به خاطر حرکت جسم صلب است، محاسبه می گردند [۱].

برای این منظور، تابع ترکشن مسئله که ماهیتی دینامیکی دارد، به دو بخش استاتیکی (قسمت اول) و مابه‌التفاوت بخشهای استاتیکی و دینامیکی (قسمت دوم) تقسیم می شود. با این کار، رفع تکینگی مربوط به بخش دوم، همانند روش بکار رفته در مورد تابع تغییرمکان و ماتریس $[G]$، به سادگی و به کمک مفاهیم ریاضی

امکان‌پذیر می گردد. بدین ترتیب، بخشی از هر درایه قطری $[H]$ که در حالت کلی مختلط بوده و به ویژگی های جرم، میرایی و سختی مصالح محیط وابسته است، در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، بخش باقیمانده درایه‌های قطری ماتریس مزبور که به دلیل ارتباط با قسمت استاتیکیِ تابع ترکشن، حقیقی بوده و تنها تابع هندسه مرزهای محیط و ضریب پواسون مصالح آن می‌باشد، به دست می‌آید.

برای یافتن بخش استاتیکی درایه‌های قطری $[H]$، محدوده نشان داده شده در شکل (۱)، با استفاده از تعدادی المان مشابه، به صورت بسته در آمده و حرکت جسم صلب بدان اعمال می‌گردد. این حرکت که در هر یک از جهات سه‌گانه x، y و z و با یکسان پنداشتن مؤلفه‌های متناظر بردار تغییرمکان در رابطه (۶) اعمال می‌شود، به دلیل بهره‌جویی از تابع ترکشن استاتیکی، نیرویی ایجاد نکرده و سبب صفر شدن بردار ترکشن و طرف راست معادله (۶) می‌گردد. این امر تنها زمانی ممکن است که بخش استاتیکی ماتریس $[H]$ وارون‌ناپذیر بوده و حاصل ضرب آن در بردار تغییرمکانِ بیانگر حرکت جسم صلب، برابر صفر شود. به سخن دیگر، تنها زمانی شرط بدیهی و مهم حرکت جسم صلب در حالت ایستا برقرار می‌گردد که مجموع درایه‌های متناظر هر سطر بخش استاتیکی ماتریس$[H]$ که چیزی جز درایه‌های بردار حاصل ضرب مزبور نیست، برابر صفر باشد.

بنابراین، باید درایه قطری هر سطر آن ماتریس، برابر قرینه مجموع سایر درایه‌های متناظر آن شود و بدین ترتیب، بخش باقیمانده درایه‌های قطری ماتریس $[H]$ نیز به دست می‌آید. ناگفته نماند، بستن مدل نشان داده شده در شکل (۱)، تنها برای استفاده از ترفند فوق بوده و پس از یافتن درایه‌های قطری $[H]$، المان های به کار رفته برای بستن مدل و درایه‌های محاسبه شده مربوط به آنها حذف گردیده و حل مسئله، به کمک مدل باز ادامه می‌یابد. یادآوری می گردد، بهره‌جویی از مدل های بسته برای تحلیل دینامیکی محدوده سنگ پی، به دلیل برخورد امواج به مرز تحتانی و برگشت آنها، سبب ایجاد آشفتگی در پاسخ ها و نادرستی آن ها می‌شود.

پس از محاسبه درایه‌های قطری $[H]$ و سوار نمودن ماتریس $[H^e]$ مربوط به المان های دو ناحیه i و q، ماتریس شبه سختی کل مدل به دست آمده و ستون های آن، بر اساس درجات آزادی تغییر مکانی موجود در دو ناحیه مزبور، به دو دسته تقسیم می‌شوند:

$$[H_i \quad H_q]\begin{Bmatrix} U_i \\ U_q \end{Bmatrix} = [G_i]\{P_i\} \qquad (۱۰)$$

در معادله کنونی، بردارهای $\{P_i\}$ و $\{U_q\}$ مجهول می باشند که انتقال آنها به یک طرف و بردن بردار معلومِ $\{U_i\}$ به سویی دیگر، رابطه را به صورت زیر در می‌آورد:

$$[-G_i \quad H_q]\begin{Bmatrix} P_i \\ U_q \end{Bmatrix} = -[H_i]\{U_i\} \qquad (۱۱)$$

خاطر نشان می شود، هنگام محاسبه ستون m ام ماتریس امپدانس، تنها m امین درایه بردار $\{U_i\}$ برابر یک و سایر درایه‌های آن برابر صفر می‌باشد. بنابراین، حاصل ضرب $[H_i]$ در چنین برداری، همان m امین ستون ماتریس $[H_i]$ خواهد بود. حال اگر رابطه (۱۱)، برای هر $3N_i$ حالت مختلف $\{U_i\}$ و به سخن دیگر، برای محاسبه تمامی ستون های ماتریس امپدانس برپا شود، طرف راست آن، همان ماتریس $[H_i]$ خواهد بود. در این صورت، بردار مجهول معادله نیز به ماتریسی $3N \times 3N_i$ تبدیل می‌شود که $3N_i$ سطر اول آن (ماتریس $[F]$ در رابطه زیر)، مقادیر ترکشن های گرهی مرز مشترک سد و سنگ پی، برای حالات گوناگون اعمال تغییرمکان یکه‌اند:

$$[-G_i \quad H_q]\begin{bmatrix} F \\ U'_q \end{bmatrix} = -[H_i] \qquad (۱۲)$$

از آن جا که حل های اساسی به کار رفته در فرآیند محاسبه ماتریس های $[G]$ و $[H]$ رابطه کنونی، تابع فرکانس می‌باشند، باید دستگاه معادلات (۱۲) را به ازای هر یک از مقادیر ω یک بار برپا و حل نمود. این کار که افزون بر نیمی از زمان تحلیل در هر فرکانس را به خود اختصاص می‌دهد، دلیل اصلی زمان بر بودن روش است که در جای خود، بدان پرداخته می‌گردد. به هر حال، پس از حل دستگاه معادلات (۱۲) و به دست آوردن ماتریس ترکشن های گرهی $[F]$، باید آن را به ماتریس نیروهای گرهی تبدیل نمود. برای این منظور، می‌توان از ماتریس نگاشت $[B]$ که نقش پیوند میان ترکشن ها و نیروهای گرهی را به عهده دارد، بهره جست. این ماتریس توسط رابطه زیر و برای تمامی اجزای موجود در مرز مشترک i محاسبه گشته و سپس، همانند ماتریس های سختی المان ها، سوار می‌شود:

$$[B^e] = \int_{\Gamma^e} [N]^T [N] d\Gamma^e \qquad e \in i \tag{۱۳}$$

در این رابطه، $[B^e]$ ماتریس نگاشت المان eامِ ناحیه i و $[N]$، ماتریس توابع درون یاب آن می‌باشد. آشکار است، پس از سوار کردن $[B^e]$ ها، ماتریس $[B]$ حاصل همانند ماتریس $[F]$، $3N_i$ سطر و $3N_i$ ستون دارد و حاصل ضرب آن در $[F]$، چیزی جز ماتریس امپدانس پی نخواهد بود:

$$[\hat{S}_f] = [B][F] \tag{۱۴}$$

ناگفته نماند، بر اساس قضیه تقابل کار تحلیل سازه‌ها و مشابه سایر ماتریس های مشخصه، ماتریس امپدانس سنگ پی نیز باید متقارن باشد. اما در اینجا، به دلیل حجم بالای محاسبات و وجود خطاهای عددی، حاصل رابطه (۱۴) این گونه نبوده و تفاوت اندکی، میان درایه‌های غیرقطری متناظر آن به چشم می‌خورد که می‌توان آن را، با به کارگیری مفهوم کمینه مربعات و به کمک رابطه زیر از بین برد:

$$[S_f(\omega)] = \frac{1}{2}\left([\hat{S}_f] + [\hat{S}_f]^T\right) \tag{۱۵}$$

رابطه کنونی، همان رابطه نهایی برای محاسبه ماتریس امپدانس دینامیکی سنگ پی است که در بخش آتی، به چگونگی وارد ساختن آن در روند تحلیل سازه و در واقع، تحلیل اندرکنشی سد قوسی ـ سنگ پی پرداخته می شود.

وارد ساختن $[S_f(\omega)]$ در تحلیل سازه

اینک پس از محاسبه ماتریس امپدانس سنگ پی، باید آن را در فرآیند تحلیل سازه، وارد نمود. برای این منظور، نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر مدل اجزای محدود سد قوسی در حوزه فرکانس، در نظر گرفته می‌شود:

$$\left(-\omega^2[M] + (1+2\beta i)[K]\right)\{D\} = -[M][J]\{a_g\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R_i^s \end{Bmatrix} \tag{۱۶}$$

که در آن، $[M]$ و $[K]$، به ترتیب ماتریس های مشخصه جرم و سختی مربوط به تمامی درجات آزادی سازه و از جمله گره‌های تکیه‌گاهی و β ضریب میرایی هیسترسیک مصالح سد قوسی می باشد. بردار $\{D\}$ که تنها مجهول مسئله می‌باشد، تغییرمکانهای گرهی سازه را در خود جای داده است. هم چنین، به دلیل تحلیل مسئله در حوزه فرکانس، توابع تغییر مکان های گرهی و تحریک تکیه‌گاهی موجود در طرف راست رابطه (۱۶)، به ترتیب برابر $\{a_g(t)\} = \{a_g(\omega)\}e^{i\omega t}$ و $\{D(t)\} = \{D(\omega)\}e^{i\omega t}$ منظور شده‌اند که ω و i، به ترتیب فرکانس تحریک و عامل موهومی می‌باشند. افزون بر این ها، بارهای وارد به سازه که شامل نیروی ناشی از تحریک تکیه‌گاهی با شتاب معلوم $\{a_g\} = \{a_g^x \;\; a_g^y \;\; a_g^z\}^T$ و سایر بارهای خارجی و از جمله، نیروهای ناشی از در نظر گرفتن اثر اندرکنش خاک و سازه می باشند، طرف راست معادله (۱۶) را تشکیل می‌دهند. خاطر نشان می‌کند، تحریک تکیه‌گاهی به کمک ماتریس مستطیلی $[J]$ که به ازای هر گره سازه، شامل یک ماتریس یکه ۳×۳ می‌شود، به بارهای معادل گرهی تبدیل می‌گردد.

اینک در صورتی که تنها بار خارجی وارد به سد قوسی، نیروهای ناشی از اثر اندرکنش سد با مخزن خالی و سنگ پی باشد، بردار نیرویی $\{R\}$ به قرار زیر در می‌آید:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_i^s \end{Bmatrix} \quad i \in \text{مرز مشترک سازه و سنگ پی} \tag{۱۷}$$

در این رابطه، $\{R_i^s\}$ نشان دهنده نیروهای وارد به سازه در مرز مشترک سازه و سنگ پی می باشد. باید افزود، در این جا و تا پایان حل مسئله، شماره‌گذاری گره‌ها و درجات آزادی سازه، به گونه‌ای انجام می‌شود که گره‌های موجود در مرز مشترک سازه و سنگ پی، پس از سایر گره‌ها قرار گیرند. بدین ترتیب، رابطه (۱۷) بیانگر صفر بودن بارهای خارجی در تمامی گره‌های سازه، بجز در محل اتصال آن با سنگ پی خواهد بود. آشکار است، این نیروها باید با نیروهای وارد از طرف سازه به سنگ پی که با $\{R_i^f\}$ به نمایش در می‌آیند در حال تعادل باشند:

$$\{R_i^f\} + \{R_i^s\} = \{0\} \tag{۱۸}$$

خاطر نشان می‌نماید، نیروهای موجود در سنگ پی نیز همانند نیروهای متعلق به سازه، با تغییرمکانهای متناظر خود در ارتباط بوده و این ارتباط را، چیزی جز ماتریس امپدانس پی برقرار نمی‌سازد. به سخن دیگر، در صورتی که تغییر مکان های گره‌های موجود در مرز مشترک سازه و سنگ پی با $\{D_i^f\}$ نشان داده شوند، می‌توان رابطه زیر را برای هر یک از مقادیر ω برپا نمود:

$$[S_f(\omega)]\{D_i^f\} = \{R_i^f\} \qquad i \in \text{مرز مشترک سد و سنگ پی} \tag{۱۹}$$

عدم لغزش میان سد قوسی و سنگ پی آن، یکی دیگر از فرضهای به کار رفته در مسئله است که سبب

برابری $\{D_i^f\}$ با بخش متناظر خود در بردار تغییر مکان های سازه می‌گردد. بنابراین، با جای گذاری رابطه‌های (۱۷) تا (۱۹) در معادله حاکم بر سازه یا همان رابطه (۱۶)، می‌توان به برابری زیر رسید:

$$\left(-\omega^2[M]+(1+2\beta i)[K]\right)\{D\}= -[M][J]\{a_g\}+\begin{Bmatrix}0\\ -[S_f(\omega)]\{D_i\}\end{Bmatrix} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه، $\{D_i\}$ تغییر مکان های مربوط به گره‌های ناحیه i را در خود جای داده و در واقع، با توجه به ترتیب بیان شده برای شماره‌گذاری گره‌های سد، چیزی جز بخش پایینی بردار $\{D\}$ نمی‌باشد. در نتیجه، رابطه نهایی تحلیل دینامیکی سازه با در نظر گرفتن اثرات اندرکنشی سنگ پی را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\left(-\omega^2[M]+(1+2\beta i)[K]+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S_f(\omega)\end{bmatrix}\right)\times\{D\} = -[M][J]\{a_g\} \qquad (۲۱)$$

معادله (۲۱) را می‌توان در حالت چشم‌پوشی از اثرات اندرکنشی و یا همان صلب پنداشتن سنگ پی نیز به کار برد. در این حالت، تنها کافی است که به جای ماتریس امپدانس، از ماتریسی با درایه‌های قطری بسیار بزرگ استفاده گردد تا این کار، سبب صفر شدن تغییرمکانهای گره‌های موجود در مرز مشترک سازه و سنگ پی یا همان $\{D_i\}$ شود. در هر صورت، باید برای هر مقدار معلوم ω، دستگاه معادلات مزبور را به کمک یکی از روشهای حل معادلات خطی، یک بار حل نمود و تغییرمکانهای سد که در حالت کلی مختلط می باشند را به دست آورد.

کاهش زمان محاسبه $[S_f(\omega)]$

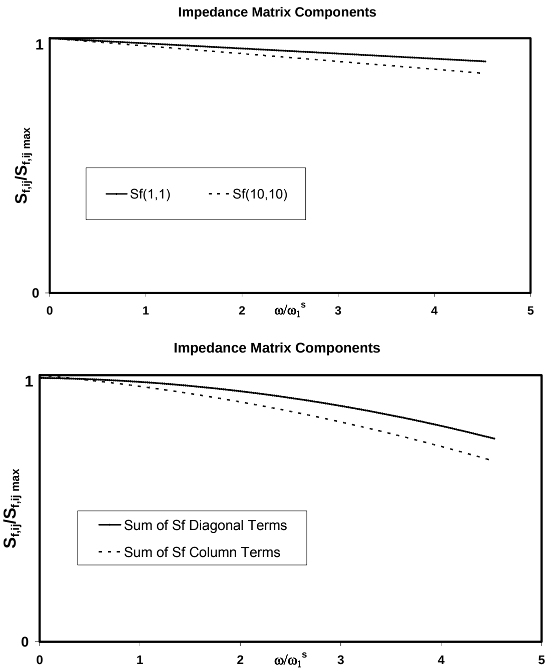
یادآوری می‌گردد، در بسیاری از مسائل، زمان مورد نیاز برای تحلیل به کمک روش اجزای مرزی، بسیار بیشتر از زمان لازم برای همان تحلیل با بهره‌جویی از فن اجزای محدود است. ناگفته نماند، هر چند که در پاره‌ای موارد و از جمله برای تحلیل محیط های نیمه بی نهایت، امکان حل دقیق مسئله به روش اجزای محدود فراهم نبوده و به کارگیری شیوه اجزای مرزی امری گریزناپذیر می‌باشد، اما زمان بر بودن این شیوه همواره به عنوان یکی از کاستی های مهم آن به شمار آمده و استفاده از آن را، همانند فن اجزای محدود فراگیر ننموده است.

در نگاه نخست چنین به نظر می‌رسد که کاهش چشم گیر تعداد المان ها، گره‌ها و در پی آنها، درجات آزادی مدل اجزای مرزی یک سازه (به ویژه در مورد محیط های سه‌بعدی) در مقایسه با مدل پُرگره و حجیم جزء محدود آن که افزون بر مرزهای محیط، باید محدوده داخلی آن را نیز شبکه‌بندی نماید، سبب می‌شود که روش اجزای مرزی، سریعتر از شیوه اجزای محدود به جواب برسد. اما از سوی دیگر، پیچیده بودن توابع موسوم به حل اساسی و دشواری روند برآورد آنها نسبت به توابع درون یابِ چندجمله‌ای و از آن مهم تر، نامتقارن و ناتُنُک بودن ماتریس های مشخصه در روش اجزای مرزی در مقایسه با ماتریس های متقارن و تُنُک موجود در فن اجزای محدود، زمان مورد نیاز برای تحلیل مدلهای جزء مرزی را به شدت افزایش می‌دهد. خاطر نشان می گردد، یافتن پاسخ های یک دستگاه معادلات خطی تُنُک و متقارن با بهره‌جویی از شیوه‌های بهینه و کارآیی مانند روش خط آسمان[۲]، ده‌ها بار سریعتر از حل همان مسئله با شیوه‌های معمول است که بدون استفاده از ویژگی تقارن و تُنُکی ماتریس ضرائب، عملیات ریاضی را بر روی تمامی درایه‌های هرچند صفر و تکراری آن نیز به انجام می‌رسانند.

با توجه به مطالب بیان شده، زمان لازم برای تحلیل به روش اجزای مرزی، همواره یکی از نکات و موارد مهم وابسته به آن تلقی شده و به عنوان مشکلی فراروی تحلیلگران و پژوهشگرانی که از روش مزبور بهره جسته‌اند، قرار داشته است. در این میان، عده‌ای بدون توجه به این نارسایی و در واقع با مهم نپنداشتن آن، مسائل خود را به کمک شیوه مزبور حل کرده و در گزارش خود نیز، اشاره‌ای بدان ننموده‌اند [۸]. اما عده‌ای دیگر که به دنبال ارائه روشهایی بهینه، کم‌هزینه و کارا بوده‌اند، راهکارهایی برای غلبه بر این نارسایی پیشنهاد کرده و بدین ترتیب، از زمان مورد نیاز برای حل مسئله به شیوه اجزای مرزی کاسته‌اند [۹]. اما مهم ترین کاستی روش پیشنهادی در مرجع [۹] همانا فرض منشوری بودن دره سد است که از طبیعت اجزای مرزی مورد استفاده در آن ناشی می‌گردد. نوشتار پیش‌رو با به کارگیری اجزای مرزی سه‌بعدی، بر مشکل مزبور چیره گشته و بر اساس ایده به کار رفته در مرجع اخیر، سعی نموده است که تا حد امکان، زمان لازم برای محاسبه ماتریس امپدانس سنگ پی را کوتاه نماید.

لذا برای این منظور، نخست با استفاده از راهکار ارائه شده در بخش دوم نوشتار، برنامه‌ای رایانه‌ای که توانایی محاسبه ماتریس امپدانس مدل های سه‌بعدی

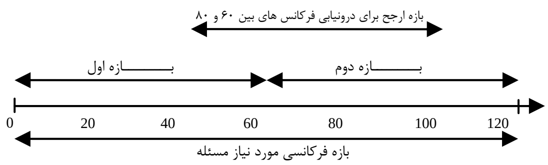
اجزای مرزی را داشته باشد، تهیه گردید که در ادامه، با به کارگیری برنامه مزبور، ماتریس امپدانس مربوط به پیِ سدی قوسی، برای مجموعه‌ای از فرکانس های مورد نظر (که در این جا شامل ۲۴۰ فرکانس صفر تا ۱۹/۱ هرتز با گام هایی مساوی است) و هم چنین، برای مقادیر گوناگون ضریب کشسانی مصالح سنگ پی، به دست آمد. سپس با بررسی تأثیر فرکانس ω بر درایه‌های مختلف $[S_f(\omega)]$ و رسم منحنی هایی همانند آنچه در شکل (۲) قابل مشاهده می‌باشد، مشخص شد که تغییرات درایه‌های این ماتریس بر حسب فرکانس چندان شدید نبوده و در واقع، $[S_f(\omega)]$ تابعی هموار و خوش‌رفتار از ω است.



شکل ۲: تغییرات پاره‌ای از درایه‌های ماتریس امپدانس بر حسب فرکانس.

با توجه به ویژگی بیان شده، می‌توان دریافت که درایه‌های این ماتریس، به دلیل رفتار هموار و ملایم خود قابل پیش‌بینی بوده و نیازی به محاسبه آنها، برای تمامی مقادیر ω نمی‌باشد. در واقع می‌توان با محاسبه تنها تعدادی از ماتریس های امپدانس به ازای پاره‌ای از فرکانس های مورد نظر، به پیش‌بینی سایر ماتریس ها به ازای تمامی n فرکانسِ لازم پرداخت. با این کار، نیازی به پیمودن روند دشوار و زمان بر محاسبه تمامی $[S_f(\omega)]$ ها نبوده و این محاسبات، تنها برای پاره‌ای از مقادیر ω که از این پس با ω_i به نمایش در می‌آیند، به انجام می‌رسند. سپس با در دسترس بودن مقادیر $[S_f(\omega_i)]$ به ازای $i=1,2,\ldots,n_f$ که بطور معمول $n_f << n$، می‌توان سایر ماتریس های مربوط به فرکانس های $\omega \neq \omega_i$ و $\omega_1 < \omega < \omega_{n_f}$ را با بهره‌جویی از مفهوم درون یابی ریاضی به دست آورد.

خاطر نشان می گردد، تغییرات نه چندان شدید درایه‌های ماتریس امپدانس بر حسب فرکانس، چنین می‌نماید که استفاده از توابع چندجمله‌ای درجه سه، برای درون یابی و برازش منحنی مزبور کافی بوده بنابراین، می‌توان با تقسیم بازه فرکانسی مورد نظر (که در اینجا بین صفر تا ۱۲۰ رادیان بر ثانیه یا همان صفر تا ۱۹/۱ هرتز بوده و به طور معمول، در حالت کلی شامل تعداد بسیار زیادی فرکانس می‌باشد) به بازه‌هایی کوچکتر و مساوی، کار درون یابی درجه سه را بین هر چهار فرکانس موجود در بازه‌های جدید به انجام رساند. یادآوری می شود برای برازش دقیق یک منحنی درجه سه، تنها مقدار تابع در چهار نقطه مشخص مورد نیاز است و از این رو، باید ماتریس امپدانس را تنها به ازای هر چهار ω موجود در هر بازه بدست آورد. شکل (۳) فرآیند تقسیم بازه اصلی به دو بازه کوچکتر و هفت فرکانس مشخص شده برای محاسبه $[S_f(\omega)]$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳: بازه‌های فرکانسی.

شایان توجه می‌باشد، برای محاسبه ماتریس امپدانس به ازای فرکانس مشخص ω، بهتر است درون یابی را به گونه‌ای انجام داد که ω، در میانه‌های بازهٔ چهار فرکانسی بیان شده قرار گیرد. به عنوان نمونه، برای بدست آوردن $[S_f(73)]$، باید از ماتریس های امپدانس مربوط به فرکانس های 40، 60، 80 و 100 که بازه دربرگیرنده آنها در شکل (۳) نمایان می‌باشد، استفاده نمود. در حالت کلی، رابطه مورد نیاز برای درون یابی مزبور را می‌توان با رابطه زیر نشان داد:

$$S_{f,ij}(\omega) = \alpha_0 + \alpha_1\omega + \alpha_2\omega^2 + \alpha_3\omega^3 \qquad (۲۲)$$

که در آن، $S_{f,ij}(\omega)$ درایه سطر iام و ستون j ام ماتریس امپدانس به ازای فرکانس ω می‌باشد که با استفاده

از تحلیل بدست نیامده و قرار است، به کمک درون یابی و با بهره‌جویی از ماتریس های امپدانس مربوط به فرکانس های نزدیک ω محاسبه شود. هم چنین α_0، α_1، α_2 و α_3، چهار عامل ثابتی هستند که می‌توانند به کمک رابطه زیر به دست آیند:

$$\begin{bmatrix} 1 & \omega_i & \omega_i^2 & \omega_i^3 \\ 1 & \omega_{i+1} & \omega_{i+1}^2 & \omega_{i+1}^3 \\ 1 & \omega_{i+2} & \omega_{i+2}^2 & \omega_{i+2}^3 \\ 1 & \omega_{i+3} & \omega_{i+3}^2 & \omega_{i+3}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{f,ij}(\omega_i) \\ S_{f,ij}(\omega_{i+1}) \\ S_{f,ij}(\omega_{i+2}) \\ S_{f,ij}(\omega_{i+3}) \end{Bmatrix} \qquad (۲۳)$$

در این رابطه ω_i، ω_{i+1}، ω_{i+2} و ω_{i+3} به ترتیب چهار فرکانس مشخص مربوط به بازه‌ای می‌باشند که در یافتن ماتریس امپدانس مربوط به فرکانس دلخواه ω بکار می‌روند. یادآوری می‌شود، هر چهار ماتریس امپدانس وابسته به این چهار فرکانس به صورت تحلیلی محاسبه شده و درایه سطر iام و ستون j ام آنها، طرف راست معادله (۲۳) را تشکیل داده است. بنابراین می‌توان با حل دستگاه معادلات مزبور و یافتن مقادیر α_0 تا α_3، رابطه (۲۲) را برپا نمود و به کمک آن، سایر ماتریس های امپدانس را محاسبه نمود. بدین ترتیب، تنها با n_f بار تحلیلِ مدل اجزای مرزی سنگ پی و در دست داشتن n_f ماتریس امپدانس، روند برپایی سایر $[S_f(\omega)]$های مربوط به $n-n_f$ فرکانسِ دیگر مورد نیاز مسئله، با استفاده از درون یابی فرکانسی پیگیری شده و مجموعه ماتریس های امپدانس لازم برای به دست آوردن پاسخ کامل می‌گردد.

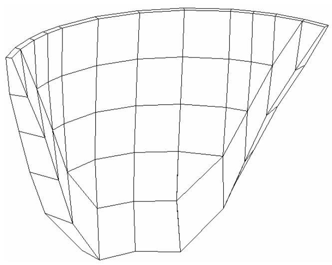
ناگفته نماند، با توجه به زمان بسیار اندک مورد نیاز برای درون یابی که در مقایسه با زمان چشمگیر لازم برای هر یک از تحلیل های اجزای مرزی، بسیار ناچیز و قابل چشم‌پوشی است، به کارگیری روش ارائه شده، سرعت تحلیل را به نسبت n به n_f افزایش می‌دهد. یادآوری می‌گردد، با توجه به این که تعداد فرکانس های موجود در بازه مورد نظر یا همان n، بسیار بیشتر از n_f می‌باشد، افزایش سرعت فرآیند تحلیل و در نتیجه، کاهش زمان مورد نیاز برای دستیابی به پاسخ، بسیار قابل توجه و ارزشمند است. بنابراین، در صورتی که این کار سبب کاهش دقت پاسخ ها نشود، بهره‌جویی از آن می‌تواند کمک شایانی به بالا رفتن کارآیی روشِ تحلیلی و بهینه شدن آن نماید. باید افزود، کارهای عددی فراوان انجام گرفته که تنها پاره‌ای از آنها را می‌توان در نمودارهای بخش آتی دید، به خوبی نشان می‌دهند که تأثیر ناچیز راهکار درونیابی بر دقت پاسخ ها، در کنار افزایش چشمگیر سرعت کُند تحلیل، استفاده از آن را توجیه‌پذیر می‌نماید.

مدلهای تحلیلی

در این بخش، یک سد قوسی مشخص (سد Morrow Point که مشخصات هندسی آن در مرجع [۱۰] موجود است) به همراه دره پیرامون آن که گره‌های مرز مشترک سد و سنگ پی آن را نیز شامل می‌گردد، مورد تحلیل دینامیکی قرار می‌گیرد. یادآوری می شود، این تحلیل در حوزه فرکانس، به شیوه مستقیم و با استفاده از فن زیرسازه به انجام می‌رسد. هم چنین برای وارد ساختن اثرات اندرکنشی سنگ پی، ماتریس امپدانس آن که همانا ماتریس ترکیبی جرم ـ میرایی ـ سختی آن می باشد، با به کارگیری روش اجزای مرزی محاسبه شده و به گونه‌ای که در بخش سوم مقاله بدان اشاره گشت، به ماتریس سختی دینامیکی مدل اجزای محدود سد قوسی افزوده می‌شود. هم چنین برای نشان دادن درستی راهکار پیشنهادی در بخش پیشین، کار درون یابی برای حالت های گوناگون تقسیم‌بندی بازه فرکانسی به انجام رسیده و نتایج آن، با آن چه از تحلیل کامل بازه مزبور و بدون بهره‌جویی از شیوه بیان شده بدست آمده است، مقایسه می‌گردد.

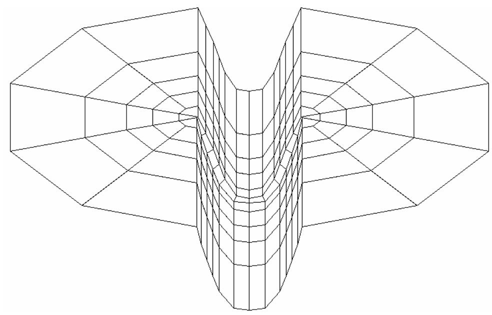
مدل سد قوسی که در شکل (۴) به نمایش درآمده است، با استفاده از چهل جزء هم‌عامل بیست گرهی مدل سازی شده و شامل ۹۵۴ درجه آزادی است که از آن میان، ۱۸۹ تای آنها در مرز مشترک سد و سنگ پی واقع می باشند. بنابراین، در صورت حذف آنها که به معنای تحلیل سد قوسی با چشم‌پوشی از اثرات اندرکنشی سنگ پی است، شمار درجات آزادی سازه به ۷۶۵ می‌رسد. بتن بکار رفته در سد قوسی با مشخصات زیر می باشد:

ـ ضریب کشسانی ۲۷/۵ گیگا پاسگال
ـ وزن حجمی ۲۴/۸ کیلو نیوتن بر متر مکعب
ـ نسبت پواسون ۰/۲
ـ ضریب میرایی هیسترتیک ۵ درصد



شکل ۴: مدل اجزای محدود سد قوسی.

خاطر نشان می شود، با حل دستگاه معادلات (۲۱)، تمامی درایه‌های بردار تغییرمکان سازه بدست می‌آیند. اما در اینجا، دو کمیت که همانا تغییرمکان در جهت جریان گره میانی تاج این سد و هم چنین، تغییرمکان شعاعی نقطه‌ای از تاج با زاویه مرکزی ۱۳/۲۵ درجه می باشد، در نظر گرفته شده و منحنی تغییرات اندازه آنها، پس از ضرب شدن در $-\omega^2$ برای تبدیل به شتاب، بر حسب فرکانس ω ترسیم می‌گردد. ناگفته نماند، به دلیل وضوح بیشترِ پاسخ مربوط به نقطه اول، برای تحریک های در جهت جریان و قائم و نقطه دوم، برای تحریک عمود بر جهت جریان، سال هاست که همین سه خروجی بدست آمده از تحلیل دینامیکی این سد قوسی مشخص، مورد توجه پژوهشگران بوده و به معیار سنجش روش های تحلیلی گوناگون تبدیل شده است [۱۰].



شکل ۵: مدل اجزای مرزی سنگ پی.

شکل (۵)، مدل به کار رفته در تحلیل سنگ پی را نشان می‌دهد که دارای ۵۶۹ گره و ۱۷۸ المان هشت‌گرهی هم‌عامل بوده و تنها شامل سطح فوقانی دره می‌گردد. مصالح موجود در این محدوده، مصالحی همگن، همسان گرد و کشسان خطی فرض می‌شود که همان نسبت پواسون و ضریب میرایی هیسترتیک مربوط به بتن سد را دارا می باشد. اما وزن مخصوص آن ۲۶/۴ کیلونیوتن بر مترمکعب بوده و ضریب کشسانی آن، در تحلیل های گوناگون متفاوت و به صورت ضریبی از مدول الاستیسیته بتن مورد استفاده در سد، می‌باشد. این نسبت (E_f / E_d) که بی نهایت پنداشتن آن، به معنای صلب‌بودن پی و چشم‌پوشی از اثرات اندرکنشی سد قوسی ـ سنگ پی است، در نمونه‌های عددی، برابر ۲، ۱، ۰/۵ و ۰/۲۵ فرض می‌گردد تا بتواند حالات مختلف وجود پی‌های سخت و یا نرم را شامل شود.

نمودارهای ارائه شده در انتهای نوشتار، نتایج حاصل از تحلیل سد قوسی شکل (۴) را با و بدون در نظر گرفتن اثر اندرکنشی سنگ پی نشان می‌دهند. محور افقی آنها، با تقسیم هر فرکانس بر فرکانس های طبیعی متناظر با اولین شکل مود سد قوسی بر روی پی صلب، در دو حالت متقارنِ مربوط به تحریک های قائم و در جهت جریان ($\omega_1^s = 26.5 rps$) و هم چنین پاد متقارنِ وابسته به تحریک در جهت عمود بر جریان ($\omega_1^a = 23.75 rps$) به دست آمده است. محور عمودی این نمودارها، اندازه شتاب گرهی و اعداد درون جعبه راهنمای نمودارها، نسبت E_f / E_d به کار رفته در تحلیل و همچنین، تعداد فرکانس های مورد استفاده برای درون یابی را نشان می‌دهد. خاطر نشان می گردد، حالت های مربوط به تحلیل بر روی پی صلب و یا عدم استفاده از درونیابی فرکانسی، به گونه‌ای جداگانه و برای مقایسه با سایر نتایج به دست آمده در هر نمودار مشخص شده‌اند.

نتایج عددی

شکل (۶ – الف) ارائه شده در بخش ۹ که پاسخ مربوط به حالت در نظر گرفتن اندرکنش سنگ پی‌ای با ضریب کشسانی ۲، ۱، ۰/۵ و ۰/۲۵ برابر ضریب کشسانی مصالح سد را در خود جای داده‌است، از اهمیت بحثِ در نظر گرفتن اندرکنش سنگ پی و تأثیر چشمگیر انعطاف‌پذیری، جرم و میرایی محدوده مزبور بر رفتار لرزه‌ای سد قوسی حکایت دارد. این تأثیر را می‌توان به گونه‌های مختلف و با توجه به تغییرات ایجاد شده در محل وقوع و هم چنین مقدار بیشینه تابع پاسخ، در مقایسه با منحنی‌های مربوط به حالت پی صلب مشاهده کرد. . خاطر نشان می گردد، این نمودارها را می‌توان با شکل (۶–ب) که از مرجع [۹] و برای نشان دادن صحت نتایج این تحقیق نقل شده است نیز مقایسه کرد.

جدول(۱) به مقایسه تغییرات به وجود آمده در پاسخ تاج سد بر حسب مقادیر مختلف E_f / E_d می‌پردازد. سطرهای دوم و چهارم هر سه بخش این جدول که نسبت فرکانس طبیعی و همچنین قله (peak) پاسخ، در حالات با و بدون در نظر گرفتن اندرکنش سد و سنگ پی را در خود جای داده است، به خوبی نشان دهنده تأثیر ضریب کشسانی مصالح سنگ پی در پاسخ دینامیکی سد می‌باشد.

ناگفته نماند، شکل (۶-الف) و جدول (۱)، بدون استفاده از درون یابی و با محاسبه ماتریس امپدانس برای تمامی ۲۴۰ فرکانس مورد نظر به دست آمده‌اند.

جدول ۱: مقایسه فرکانس اول و پاسخ بیشینه مجموعه سد و سنگ پی‌های گوناگون.

		E_f/E_d				
		∞	**2**	**1**	**0.5**	**0.25**
Upstream G.M.	ω_1 (rad/s)	26.5	25.5	24.5	23.5	22.0
	$\omega_{1\ Flex.}/\omega_{1\ Rigid}$	1.00	0.96	0.92	0.89	0.83
	Radial Acc.	27.61	23.88	19.27	15.01	10.08
	$R.A._{Flex.}/R.A._{Rigid}$	1.00	0.86	0.70	0.54	0.37
Vertical G.M.	ω_1 (rad/s)	26.5	25.5	24.5	23.5	22.0
	$\omega_{1\ Flex.}/\omega_{1\ Rigid}$	1.00	0.96	0.94	0.89	0.83
	Radial Acc.	5.50	5.45	4.71	4.01	3.01
	$R.A._{Flex.}/R.A._{Rigid}$	1.00	0.99	0.86	0.73	0.55
Cross-stream G.M.	ω_1 (rad/s)	23.75	22.5	21.5	20.0	18.5
	$\omega_{1\ Flex.}/\omega_{1\ Rigid}$	1.00	0.95	0.91	0.84	0.78
	Radial Acc.	14.71	14.48	13.33	11.05	9.03
	$R.A._{Flex.}/R.A._{Rigid}$	1.00	0.98	0.91	0.75	0.61

جدول ۲: حداکثر درصد خطای پاسخ تاج سد مربوط به فرکانس اول مجموعه.

		E_f/E_d			
	No. of Freq. Station	**2**	**1**	**0.5**	**0.25**
Upstream G.M.	4	0.1	5.9	8.0	8.8
	7	1.3	1.6	2.2	0.7
	10	0.1	0.0	1.1	0.0
	13	0.9	2.2	2.4	1.6
Vertical G.M.	4	1.6	6.6	8.3	12.3
	7	2.5	2.5	4.4	3.6
	10	0.2	0.7	1.4	3.0
	13	0.8	1.4	3.8	4.3
Cross-stream G.M.	4	1.0	6.8	10.3	6.1
	7	0.5	0.2	0.0	0.7
	10	0.2	0.7	1.6	3.3
	13	0.0	0.2	0.0	1.7

در کنار این ها، شکل های (۷) تا (۱۰)، درستی روش پیشنهادی برای افزایش کارآیی و سرعت روند تحلیل را نشان می‌دهند. همان گونه که در این نمودارها مشهود است، حداکثر اختلاف بین منحنی‌های مربوط به حالت های مختلف درون یابی (انتخاب ۴، ۷، ۱۰ و ۱۳ فرکانس برای درون یابی)، در نخستین نقطه بیشینه یا قله هر یک از نمودارها رخ می‌دهد و سایر نقاط موجود در منحنی‌ها، انطباق بسیار مناسبی با یکدیگر دارند. بر همین اساس، جدول (۲) حداکثر درصد خطاهای ناشی از درون یابی فرکانسی در مقایسه با حالت محاسبه تمامی ماتریس های امپدانس که در این جا پاسخ دقیق فرض می‌گردد را نشان می‌دهد.

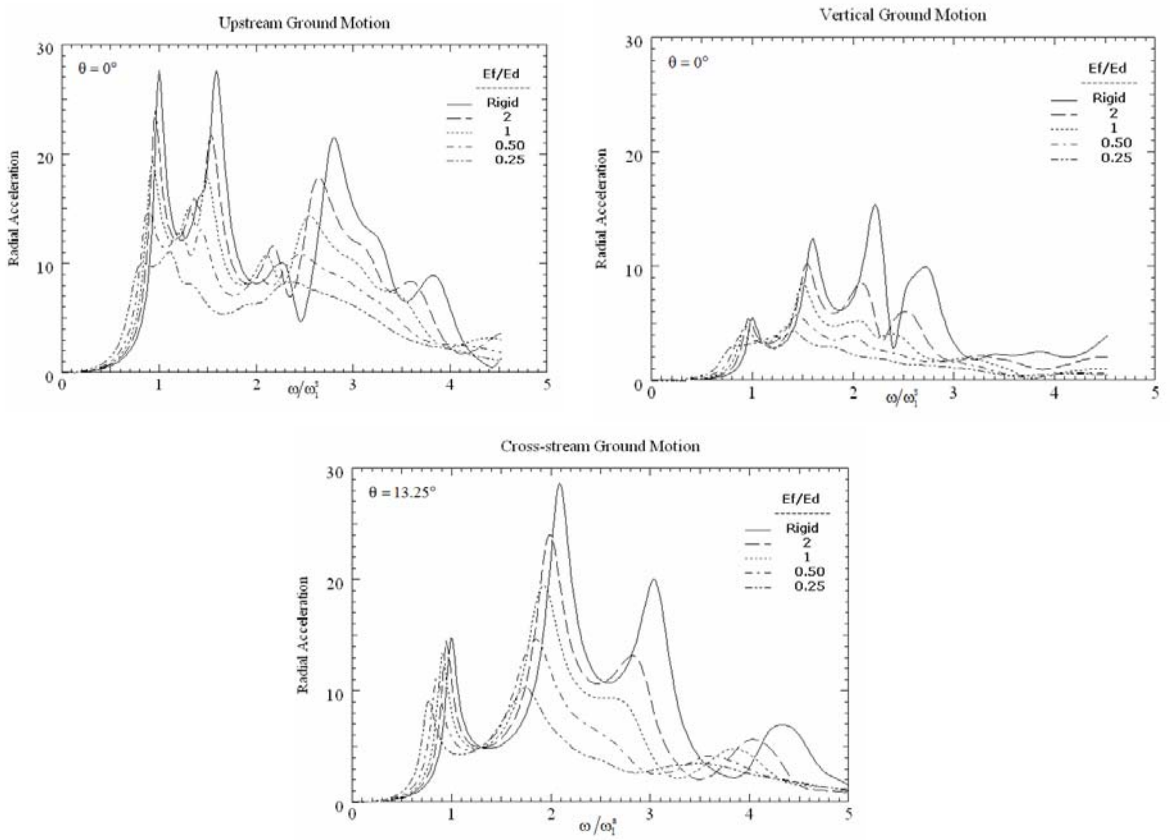
یادآوری می‌شود، بیشترین خطا و انحراف موجود در شکل های دوازده‌گانه (۷) تا (۱۰)، در نخستین قله آنها قابل مشاهده بوده و اعداد درج شده در جدول (۲) نیز به همین نقطه مربوط می‌گردند. آشکار است، معدل خطای مربوط به تمامی نقاط هر نمودار، به دلیل تطابق بسیار خوب سایر بخش های منحنی با پاسخ دقیق، عددی بسیار ناچیز و قابل صرفنظر کردن خواهد بود.

نتیجه گیری

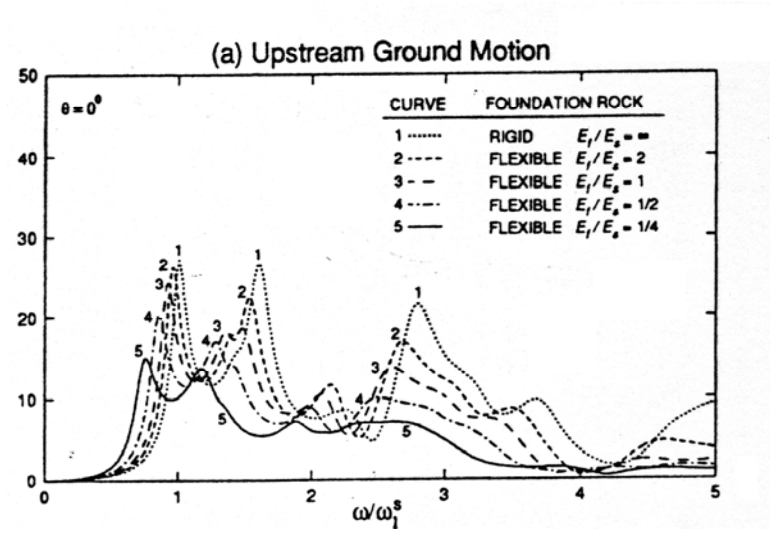
همان گونه که مشاهده گردید، می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش نسبت E_f / E_d که معادل نرم تر و انعطاف‌پذیرتر شدن سنگ پی است، مقادیر بیشینه پاسخ تاج سد کاهش یافته و در مجموع، منحنی پاسخ آن نیز افت می‌نماید. هم چنین فرکانس مربوط به نقطه بیشینه منحنی که نشان دهنده فرکانس طبیعی اول مجموعه سد قوسی و سنگ پی می‌باشد نیز با افزایش نسبت E_f / E_d فزونی یافته و به سمت فرکانس طبیعی سد بر روی پی صلب که معادل بینهایت پنداشتن ضریب کشسانی سنگ پی است میل می‌کند. باید افزود، در حالت کلی تمامی منحنی‌های پاسخ مربوط به گونه‌های مختلف تحریک، با افزایش ضریب کشسانی سنگ پی به سمت منحنی پاسخ سد بر روی پی صلب که در هریک از نمودارها قابل مشاهده می‌باشد، میل خواهند نمود.

همان گونه که در بخش نتایج عددی مشخص شد، حداکثر درصد خطای موجود که مربوط به درون یابی بین ۷، ۱۰ و ۱۳ فرکانس می‌باشد، کمتر از پنج درصد بوده که این امر، از دقت بسیار مناسب فن درون یابی فرکانسی در این مسئله حکایت دارد. شایان توجه است، افزون بر نتایج فوق، شکل های به نمایش درآمده در شکل های (۶-الف) و

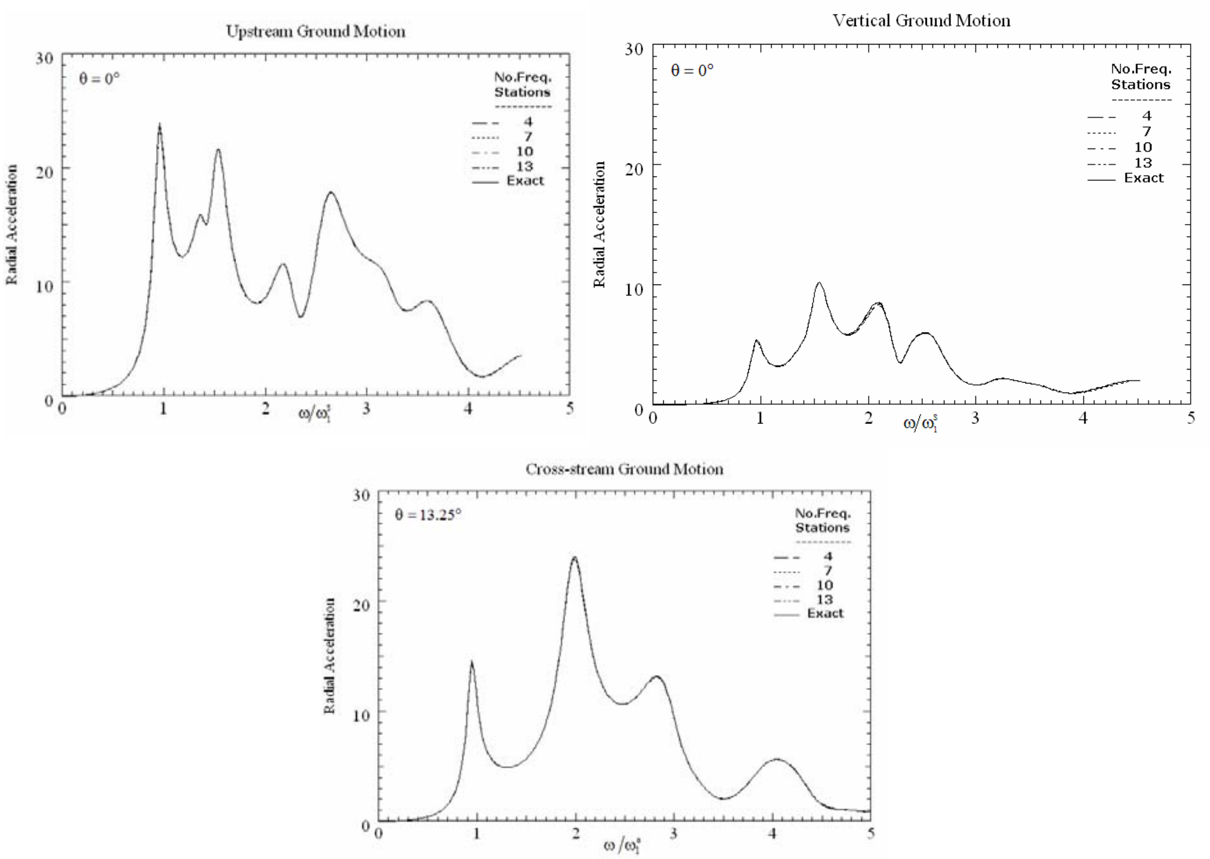
(۶-ب) نیز به خوبی مؤید این مطلبند. بنابراین می‌توان با انتخاب n_fای برابر ۷، به محاسبه ماتریس امپدانس به ازای تنها ۷ فرکانس پرداخت و ماتریس مربوط به سایر ۲۳۴ فرکانس باقیمانده را با درون یابی و به روش بیان شده به دست آورد. آشکار است، با این کار در عین حفظ دقت و اعتبار پاسخ ها، زمان مورد نیاز برای تحلیل به شدت کاهش یافته و منحنی پاسخ به نسبت ۲۴۱ به ۷ (حدود ۳۳ بار) سریع تر به دست می‌آید.



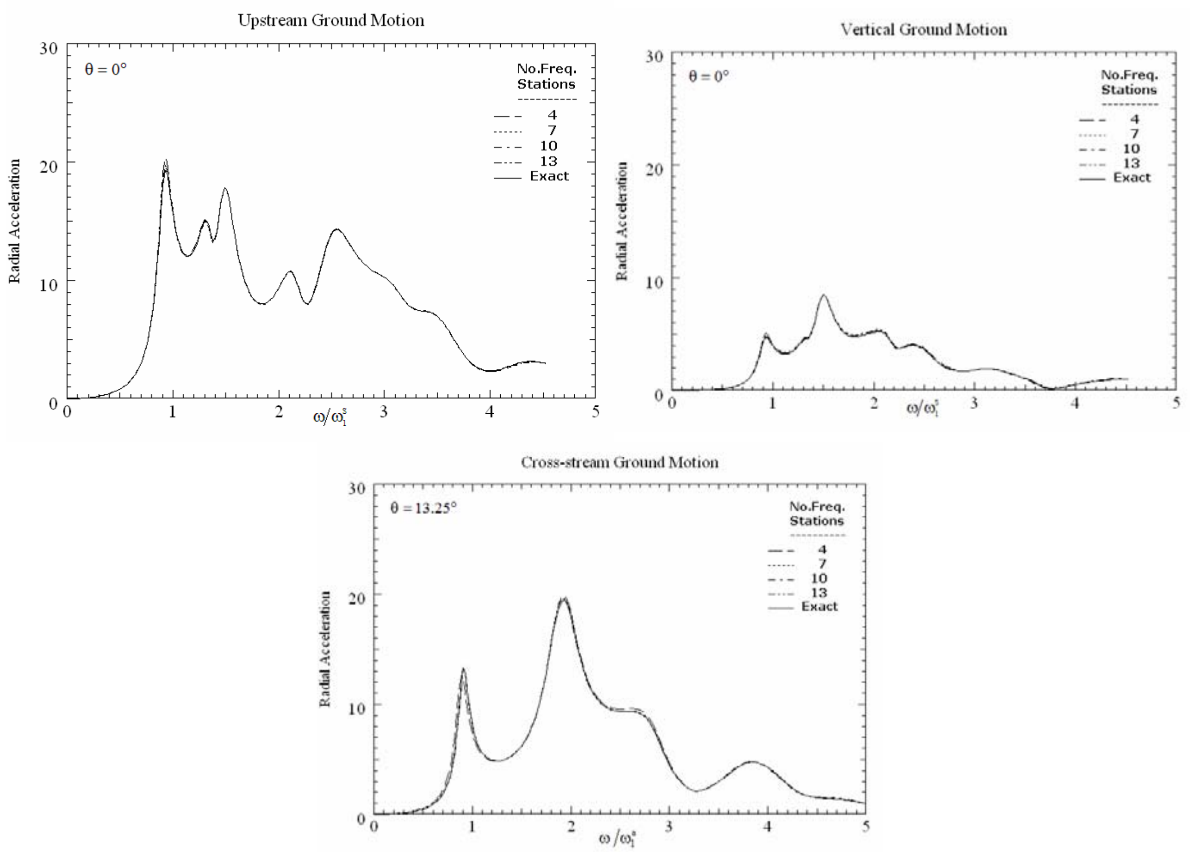
شکل ۶-الف : اثر E_f / E_d بر پاسخ دینامیکی سد قوسی.



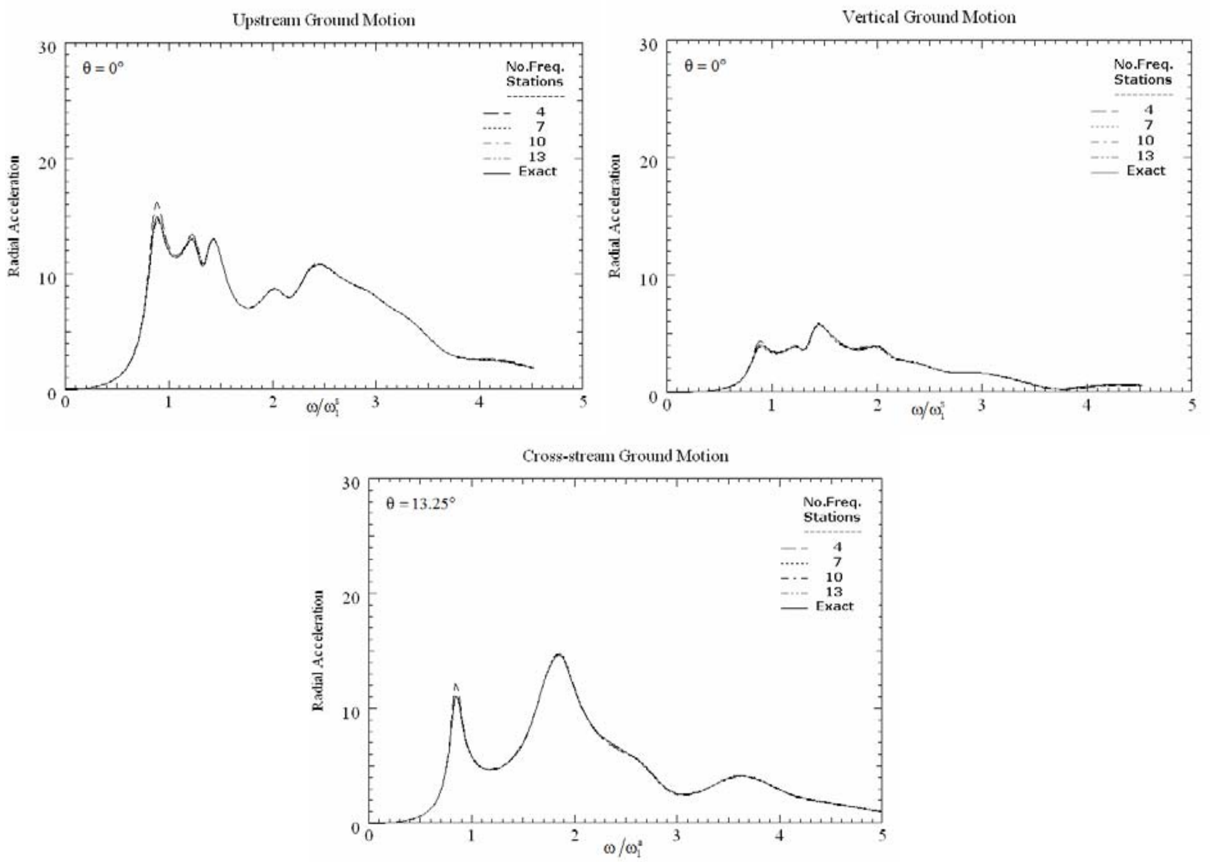
شکل ۶ – ب : نتایج موجود در مرجع [۹] برای حالت تحریک در جهت جریان.



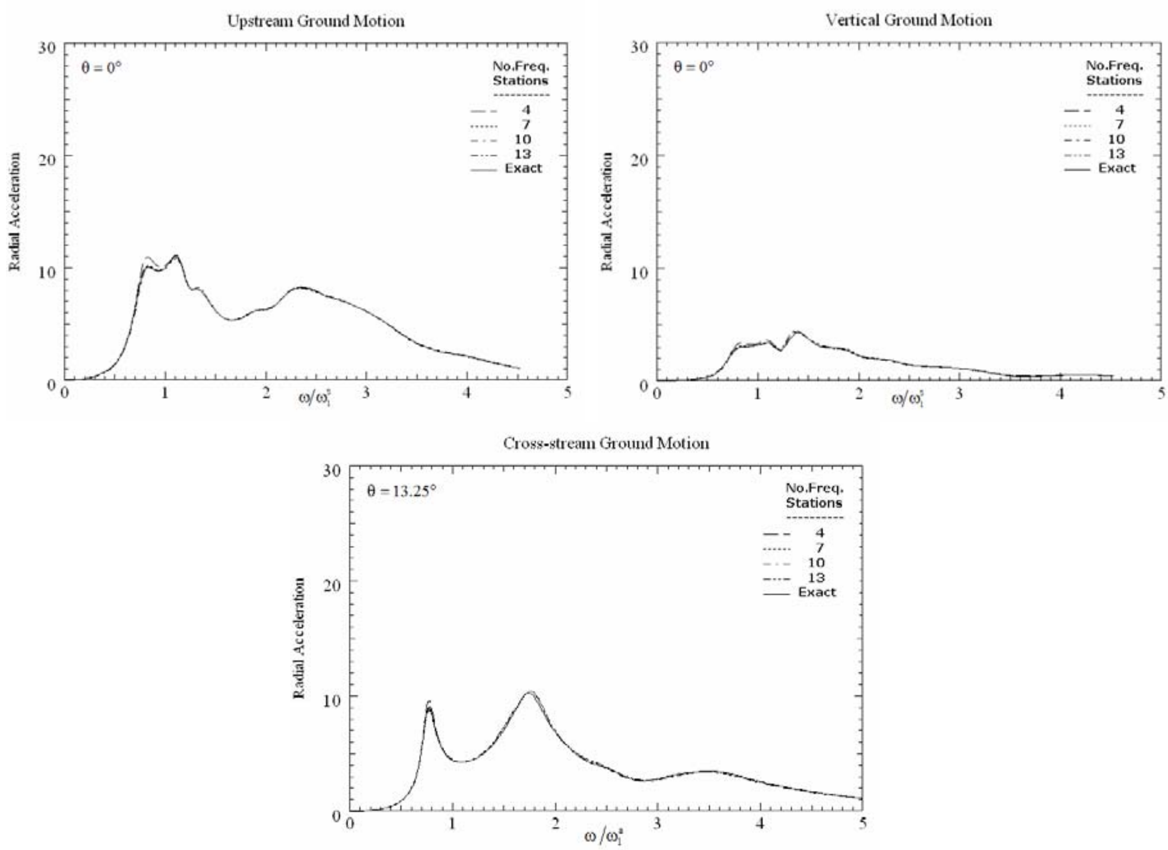
شکل ۷ : اثر تعداد فرکانس های انتخابی برای درون یابی بر پاسخ سد قوسی برای $E_f / E_d = 2$.



شکل ۸ : اثر تعداد فرکانس های انتخابی برای درون یابی بر پاسخ سد قوسی برای $E_f / E_d = 1$.



شکل ۹ : اثر تعداد فرکانس های انتخابی برای درون یابی بر پاسخ سد قوسی برای $E_f / E_d = 0.5$.



شکل ۱۰ اثر تعداد فرکانس های انتخابی برای درون یابی بر پاسخ سد قوسی برای $E_f / E_d = 0.25$.

مراجع

1 - Maeso, O., Aznarez, J. J. and Dominguez, J. (2004). "Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams." *Earth. Eng. & Struc. Dynamics*, Vol. 33, PP. 1103-1123.

2 - Camara, R. J. (2000). "A method for coupled arch dam-foundation reservoir seismic behavior analysis." *Earth. Eng. & Struc. Dynamics*, Vol. 29, PP. 441-460.

3 - Singhal, A. C. (1991). "Comparison of computer codes for seismic analysis of dams." *Computers & Struc.*, Vol. 38, PP. 107-112.

4 - Lotfi, V. (2004). "Analysis of concrete arch dams by FE-BE procedure in the frequency domain." *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada.

5 - Fok, K. and Chopra, A. K. (1986). "Frequency response functions for arch dams: hydrodynamic and foundation flexibility effects." *Earth. Eng. & Struc. Dynamics*, Vol. 14, PP. 769-795.

6 - Zhang, L. and Chopra, A. K. (1991). "Impedance functions for three-dimensional foundations supported on an infinitely-long canyon of uniform cross-section in a homogeneous half-space." *Earth. Eng. & Struc. Dynamics*, Vol. 20, PP. 1011-1027.

7 - Maeso, O. and Dominguez, J. (1993). "Earthquake analysis of arch dams. I: dam-foundation interaction." *ASCE, J. of Eng. Mechanics*, Vol. 119, PP. 513-530.

8 - Maeso, O., Aznárez, J. J. and Domínguez, J. (2002). "Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams." *ASCE, J. of Eng. Mechanics*, Vol. 128, PP. 759-770.

9 - Tan, H. and Chopra, A. K. (1995). "Dam-foundation rock interaction effects in frequency-response function of arch dams." *Earth. Eng. & Struc. Dynamics*, Vol. 24, PP. 1475-1489.

10 - Hall, J. F. and Chopra, A. K. (1983). "Dynamic analysis of arch dams including hydrodynamic effects." *ASCE, J. of Eng. Mechanics*, Vol. 109, PP. 149-163.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Singularity

2 - Skyline