

# اندرکنش سد و مخزن در دامنه زمان به وسیله روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

کیانوش کریمی<sup>۱</sup> و رضا عطارنژاد<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۱۱/۲۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۱۲/۸، تاریخ تصویب ۸۷/۱۲/۲۰)

## چکیده

در این مقاله تحلیل دینامیکی از نوع تاریخچه زمانی یک سد با ضخامت ثابت و مخزن نیمه بی نهایت، با یک روش عددی نوین به نام انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)، مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به حیاتی بودن مسئله طراحی سد، یافتن یک روش عددی کارا، سریع و دقیق که قابلیت مدل سازی شرائط مرزی پیچیده را داشته باشد، ضروری به نظر می رسد. بدین منظور روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا در این مقاله نخستین بار برای تحلیل مسئله اندرکنش سد و مخزن به کار گرفته شده است. در ابتدای مقاله روش مذکور به صورت اجمالی معرفی شده و نحوه اعمال شرائط مرزی در آن، تشریح می گردد. سپس معادله حرکت اندرکنش سازه سد (یک تیر اویلر - برنولی طره ای) با مخزن نیمه بی نهایت در حالت پر و تحت زلزله ال سنتر، به وسیله روش DSC و با به کارگیری هسته دلتای شانون تنظیم شده، مدل سازی شده و با نتایج حاصل از روش Lee & Tsai. به عنوان نتایج شاهد مقایسه می شود. در نهایت نشان داده می شود که روش DSC با سایر روش های عددی از نظر دقت و پایداری قابل رقابت می باشد.

**واژه های کلیدی:** اندرکنش سد و مخزن - تحلیل در حوزه زمان - انتگرال حلقوی منفرد مجزا - هسته دلتای

شانون

## مقدمه

موجود برای حل آن دسته از مسائلی است که نیاز به پیش بینی فرکانس های بالای ارتعاش دارند [۴]. ساختار ریاضی روش DSC، تئوری تحلیل موجک<sup>۲</sup> [۵] و تئوری پخش<sup>۳</sup> [۶] می باشد. با انتخاب مناسب پارامترهای به کار رفته در هسته DSC، این روش دقت قابل کنترلی را برای مسئله ایجاد نموده و انعطاف پذیری چشمگیری در مدل سازی هندسه های پیچیده و شرائط مرزی به دست می دهد. انواع مختلف هسته های دلتا از جمله هسته دلتای شانون و دیریکله در روش DSC مورد استفاده قرار می گیرند [۱]. قبل از به کارگیری روش DSC در مسئله مورد نظر، ابتدا توضیحاتی در مورد سایر روش های محاسبه فشار هیدرودینامیک و تحلیل اندرکنش سد و مخزن ارائه می شود.

توزیع فشار هیدرورینامیک بر روی سدهای صلب اولین بار توسط وسترگارد در سال ۱۹۳۳ انجام گرفت [۷]. Chopra در سال ۱۹۶۷ یک راه حل تحلیلی برای فشار هیدرودینامیک برای یک سد در حالت صلب و به صورت قائم ارائه نمود [۸]. در سال ۱۹۷۸ فرمولاسیون فشار

با توجه به اهمیت چشم گیر مسئله اندرکنش سد و مخزن، یافتن یک روش محاسباتی برتر که با مشخصات فیزیکی مسئله تطابق کافی داشته، فرض های ساده کننده در آن کمتر بوده و سرعت و دقت مناسبی داشته باشد، امری ضروری است. به منظور نیل به این هدف در این مقاله روش جدیدی تحت عنوان انتگرال حلقوی منفرد مجزا<sup>۱</sup> به منظور مدل سازی مسئله اندرکنش معرفی می گردد. الگوریتم انتگرال حلقوی منفرد مجزا، به عنوان یک روش برای حل عددی مسائل تکینه شکل گرفته است. به طور کلی این روش علاوه بر این که راه حل متفاوتی را برای سایر مسائل ارائه می دهد، قادر است برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به عنوان یک الگوی برتر و مفید مورد استفاده قرار گیرد. در حال حاضر روش DSC، در تعدادی از مسائل علمی و مهندسی به کار گرفته شده است که از آن جمله می توان به مسائل کوانتوم [۱]، مسائل فیزیک کلاسیک [۲]، شبیه سازی جریان سیالات در دامنه های ساده و پیچیده [۳]، اشاره نمود. در تحلیل سازه ها، روش DSC تنها الگوریتم عددی

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \ddot{u}_g - P(0, z, t) \quad (1)$$

که در آن،  $E$  مدول الاستیسیته سد،  $I$  ممان اینرسی مقطع عرضی تیر نسبت به محوری که تیر حول آن دوران می‌کند (محور  $y$ ها)،  $m$  جرم واحد طول تیر،  $u$  تغییر مکان های سازه نسبت به تکیه‌گاه زمین،  $\ddot{u}_g$  شتاب های زلزله که در راستای محور  $x$  بر سازه اعمال می‌شود و  $p$  فشار هیدرودینامیک (مازاد بر فشار هیدرواستاتیک) می‌باشد. در رابطه مذکور  $m$  و  $EI$  را می‌توان نسبت به  $z$  متغیر و پاسخ سازه به تأثیر نیروهای سیال و زلزله را به صورت ترکیب خطی از اشکال مودی  $\phi_n(z)$  و تابع کلی زمان  $Y_n(t)$  فرض نمود. بنابراین خواهیم داشت:

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(z) Y_n(t) \quad (2)$$

که در آن  $\phi$  شکل مود ارتعاش و  $Y$  مختصه کلی است. در این صورت معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = -V_n(t) - P_n(t) \quad (3)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

که در آن:

$$M_n = \int_0^h m(x) [\phi_n(x)]^2 dx \quad (4)$$

بار عمومی ناشی از لرزش زمین،  $V_n$ ، طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V_n(t) = \int_0^h m(z) \ddot{u}_g(t) \phi_n(z) dz \quad (5)$$

و بار عمومی ناشی از تأثیر فشار هیدرودینامیک روی سد:

$$P_n(t) = \int_0^h p(x=0, z, t) \phi_n(z) dz \quad (6)$$

که  $\omega_n$  فرکانس طبیعی سازه بدون مخزن در مود  $n$  ام می‌باشد.

فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال در سیستم

سد و مخزن از معادله فشار موج پیروی می‌کند:

$$\nabla^2 P(x, z, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{P}(x, z, t) \quad (7)$$

در رابطه فوق  $c$  سرعت انتشار صوت در سیال بوده و پارامتر  $p$  فشار هیدرودینامیک موجود در حوزه سیال می‌باشد.

### شرایط مرزی و اولیه

در ناحیه تماسی سازه و سیال:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \left[ \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^N \phi_n(z) \ddot{Y}_n(t) \right] \quad (8)$$

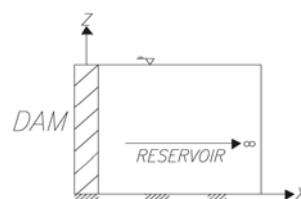
هیدرودینامیک برای سدهای صلب با دیواره بالادست مایل با زاویه ثابت و با صرفنظر از تراکم پذیری سیال توسط Chwang ارائه گردید [۹]. Mei در سال ۱۹۷۹ یک روش دقیق برای اندرکنش سیال و سازه در حوزه فرکانس به دست آورد [۱۰] و بالاخره در سال ۱۹۸۶ Liu روش Chwang را توسعه داده تا یک روش دقیق برای سدهای صلب و با سطح شیبدار و مخزن مثلی، دست پیدا نمود [۱۱].

برای تحلیل دو بعدی و سه بعدی در دامنه زمان Lee و Tsai یک روش نیمه تحلیلی برای بیان شرایط انتشار در ناحیه دور در حوزه سیال ارائه کردند [۱۳] و [۱۲]. هم چنین یک روش دقیق تحلیلی برای سدهای صلب با دیواره قائم که تحت نیروهای زلزله قرار می‌گیرند، پیشنهاد داده و توانستند روشی نیمه تحلیلی در دامنه زمان برای حل مسئله اندرکنش سد و مخزن ارائه نمایند [۱۴]. در این روش سد به صورت یک تیر اولر-برنولی طره ای با مقطع ثابت در نظر گرفته شده است.

در مقاله حاضر ابتدا فرمولاسیون ارائه شده توسط Lee و Tsai [۱۴] برای مسئله اندرکنش به منظور مقایسه با روش DSC، ارائه می‌شود. سپس روش DSC و نحوه مدل سازی شرایط مرزی در آن تشریح می‌گردد. در ادامه، مسئله اندرکنش با فرضیات مشابه روش Lee & Tsai، به وسیله DSC و با انتخاب سه دسته مختلف از پارامترهای مؤثر بر این روش، تحلیل و پاسخ تغییر مکان تاج سد و نیز فشار هیدرودینامیک در حالت مخزن پر و تحت اثر زلزله ال - سنترو، به دست آمده و نتایج حاصل با موارد مشابه در روش Lee و Tsai مقایسه می‌شود، تا میزان تأثیر پارامترهای DSC بر دقت و پایداری جواب ها بررسی شود.

### فرمولاسیون Lee & Tsai

معادله حرکت انعطاف پذیر سد در اثر شتاب زمین ناشی از زلزله و فشار هیدرودینامیک ناشی از تأثیر مخزن (شکل ۱) به صورت رابطه زیر (۱) نوشته می‌شود [۱۴]:



شکل ۱: سیستم سد انعطاف پذیر و مخزن پر نیمه بی نهایت، تحت اثر ارتعاش زمین با شتاب  $\ddot{u}_g$ .

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1(t) \\ \dot{Y}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{Y}_N(t) \\ \dot{Y}_N(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_N(t) \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

که در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$m_{ij} = \begin{cases} W_{ij} & i \neq j \\ W_{ij} + M_i & i = j \end{cases} \quad (۱۷)$$

$$K_{ii} = \omega_i^2 M_i \quad (۱۸)$$

$$L_i(t) = -V_i(t) - P_i^r(t) - F_i(t) \quad (۱۹)$$

### معرفی روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

DSC یک روش عمومی برای حل عددی کانولوشن منفرد می‌باشد. با به کارگیری و اختصاص دادن یا تقریب ساختار یک هسته منفرد، DSC می‌تواند یک الگوریتم کاملاً مؤثر، با دقت و قابل اعتماد برای کاربردهای مختلف باشد [۲]. از آن جا که پایه و مبنای این روش تئوری پخش می‌باشد، لذا تابع T را به عنوان تابع توزیع (پخش) در نظر گرفته و  $\eta(x)$  یک المان از فضای تابع آزمون خواهد بود. در این صورت انتگرال حلقوی منفرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (۲۰)$$

در این رابطه  $T(t-x)$  یک هسته منفرد بوده و بر اساس شکل و اجزای هسته T، انتگرال حلقوی منفرد  $F(t)$  یک توزیع مرکزی برای بسیاری از مسائل علمی و مهندسی می‌باشد. انواع هسته‌های منفرد که در مسائل مختلف کاربرد دارند، هسته‌های هیلبرت و هسته‌های نوع دلتا می‌باشند که نوع هیلبرت بیشتر در مسائل انتشار امواج، پرتو-نگاری و ... کاربرد داشته ضمن این که نوع دلتا در حل عددی معادلات دیفرانسیل کاربرد فراوانی دارد و شکل عمومی آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$T(x) = \delta^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (۲۲)$$

به علت تکینگی هسته‌ها و غیر قابل محاسبه بودن آنها با رایانه و توزیع مستقیم هسته‌ها، یک تقریب  $T_\alpha$  برای تابع توزیع T مورد استفاده قرار می‌گیرد:

در کف مخزن:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (۹)$$

در سطح آزاد مخزن:

با صرفنظر از امواج سطحی داریم:

$$p|_{z=h} = 0 \quad (۱۰)$$

با فرض این که مخزن در زمان صفر در شرایط آزاد باشد، داریم:

$$p|_{t=0} = 0 \quad (۱۱)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (۱۲)$$

در این روش فرض شده است که امواج آب هنگام پخش شدن از سد تنها دور می‌شوند. توزیع فشار هیدرودینامیک به کمک حل معادله (۷) با اعمال شرایط مرزی فوق و تبدیلات لاپلاس به دست می‌آید. جمله مربوط به آن به دو جزء مربوط به حرکت جسم صلب سد و تغییر مکان سد تجزیه شده و به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۴]:

$$p_n(t) = p_n^r(t) + p_n^f(t) \quad (۱۳)$$

$$p_n^r(t) = \frac{4\rho c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} Q_{nk} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau$$

$$p_n^f(t) = \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^N Q_{nk} Q_{mk} \int_0^t \ddot{Y}_m(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau \quad (۱۴)$$

با فرض تغییرات خطی شتاب زمین در دو گام زمانی متوالی و با فرض شتاب میانگین ثابت برای سازه در نهایت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = -V_n(t) - \quad (۱۵)$$

$$P_n^r(t) - F_n(t) - \sum_{m=1}^N W_{mn} \ddot{Y}_m$$

اگر قسمت  $\sum_{m=1}^N W_{mn} \ddot{Y}_m(t)$ ، از طرف راست رابطه

بالا به طرف چپ منتقل شده و با قسمت  $M_n \ddot{Y}_n(t)$  جمع شود، رابطه ماتریسی تحلیل اندرکنش سد و مخزن به شکل رابطه زیر حاصل می‌شود:

شرط  $R_\sigma(0)=1$ ، یکی از نیازهای اختصاصی برای نظم دهنده از نوع دلتا می باشد. یک تنظیم کننده عمومی و تیپ که در این مقاله و تحقیقات دیگر [۴ و ۵] مورد استفاده قرار می گیرد،  $R_\sigma(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2)$  می باشد. این تنظیم کننده، یک تابع از کلاس Schwartz بوده و با استفاده از آن هسته دلتای شانون به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)} \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)} e^{-((x-x_k)^2/2\sigma^2)} \quad (30)$$

این تنظیم کننده سبب می شود که هسته شانون، قابلیت توزیع ملایم تری داشته و از نظر عددی برای استفاده در روش محلی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، عملکرد بسیار مناسبی نشان دهد. به منظور تقریب زدن مشتقات یک تابع نسبت به متغیرهای فضایی در یک نقطه مجزای مشخص، DSC معمولاً از یک ترکیب خطی وزن دار از مقادیر تابع در  $2M+1$  نقطه ( $M$  نقطه در سمت چپ و  $M$  نقطه در سمت راست نقطه مورد نظر) در جهت متغیرهای فضایی استفاده می کند، که  $M$  نیمه عرض نوار محاسباتی می باشد.  $m$  امین مشتق تابع  $f(x)$  در  $i$  امین نقطه به صورت زیر خواهد بود:

$$f^{(m)}(x_i) \approx \sum_{k=-M}^M C_k^{(m)} \cdot f(x_i + k) \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (31)$$

که در آن  $C_k^{(m)}$ :  $m$  امین مشتق هسته دلتای شانون تنظیم شده در نقطه  $k$  و  $N$  تعداد کل نقاط شبکه در دامنه محاسباتی می باشد. با نوشتن رابطه فوق به صورت ماتریسی، بخش دیفرانسیلی ماتریس فوق به صورت زیر تعریف می شود:

$$[D_q^{(m)}]_{i,j} = \begin{cases} C_{j-i}^{(m)} & \text{if } -M < j-i < M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

برای  $D_q^{(m)}$   $j = -M, \dots, N-1+M$ ،  $i = 0, \dots, N-1$  یک ماتریس دیفرانسیلی  $N \times (2M+N)$  است و  $q$  جهت دیفرانسیل گیری بوده ( $q = x, y$ ) و  $m$  مرتبه مشتق گیری است. توسعه و گسترش به ابعاد بالاتر (دو بعد) می تواند به صورت محصولات تنسوری تحقق یابد. مقدار  $C_k^{(m)}$  به صورت تحلیلی قابل محاسبه بوده که تا مشتقات مرتبه چهارم آن به دست آمده است، به عنوان

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x) \rightarrow T(x) \quad (23)$$

که در آن  $\alpha_0$  یک حد عمومی می باشد. به منظور حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی، که موضوع تحقیق حاضر می باشد، پس از بررسی های فراوان، هسته های نوع دلتای دیراک به عنوان هسته های DSC انتخاب شده اند. بنابراین اگر  $T(x) = \delta(x)$  باشد،  $T_\alpha(x)$  نیز از نوع دلتا بوده و خواهیم داشت:

$$F_\alpha(t) = \sum_k T(t-x_k) f(x_k) \quad (24)$$

$\{x_k\}$  یک مجموعه مناسب از نقاط مجزای شبکه است که این تقریب بر روی آنها تعریف می شود و  $F_\alpha(t)$  یک تقریب برای  $F(t)$  می باشد. نمونه مختلف هسته دلتا که در مسائل مختلف کاربرد دارند، در ادامه معرفی می شوند:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \eta(x) \right\rangle = \eta(0) \quad (25)$$

هسته های نوع دلتای دیریکله:

$$\frac{\sin\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)(x-x')\right]}{2\pi \sin\left[\frac{1}{2}(x-x')\right]} \quad (26)$$

نتایج بررسی بر روی معادلات به کار رفته در مسائل مهندسی و موضوعات مورد تحقیق این مقاله نشان می دهد که استفاده از هسته دلتای شانون<sup>۴</sup> با اعمال تغییراتی، نتایج بسیار مطلوبی را به دست می دهد. با استفاده از الگوریتم نمونه گیری درون یابی در فرکانس Nyquist یعنی  $\alpha = \frac{\pi}{\Delta}$ ، هسته دلتای شانون به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin[\alpha(x-x')]}{\pi(x-x')} \rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x-x_k)} \quad (27)$$

اهمیت تئوری نمونه گیری شانون این است که با جداسازی و شبکه بندی مجموعه نامحدودی از مقادیر  $\{f(x_k)\}$ ، می توان یک تابع  $L^2$  (نوار محدود) را روی یک خط افقی پوشش داد. توالی و تناوب و نظم این هسته به کمک یک تنظیم کننده (Regulator)، بهبود می یابد:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} R_\sigma = 1 \quad (28)$$

برای تناوب دلتا، بر اساس رابطه (۲۳)، خواهیم داشت:

$$\int \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_\alpha(x) R_\sigma(x) dx = R_\sigma(0) = 1 \quad (29)$$

با انتخاب  $a_i = 1$  برای  $i=1,2,\dots,M$  معادلات مربوط به این شرط مرزی ارضاء می شوند.

### نحوه اعمال شرائط مرزی معادل لبه آزاد

برای تکیه گاه لبه آزاد، شرائط مرزی معادل  $f''(x)=0$  و  $f'''(x)=0$  خواهد بود. برای شرط مرزی سرآزاد از یک روش مرز تطبیق یافته تکرار شونده استفاده می شود. در این روش به صورت پی در پی از شرط مرزی داده شده استفاده گردیده، تا یک تعداد به اندازه کافی زیاد از نقاط جعلی ایجاد شده تا یک هسته یکسان انتقالی DSC بتواند بطور صحیح نزدیک لبه آزاد اجرا شود. این روش (IMB<sup>5</sup>) از یک الگوی مشابه با نام روش سطح مشترک تطبیق یافته تکراری که اخیراً توسعه یافته [۱۵] الگو برداری می کند. روش IMB، یک دامنه ساختگی (جعلی) خارج از مرزها را در نظر می گیرد و شرائط مرزی را در امتداد مرز برقرار می سازد. در شکل (۲) این روند به وضوح نشان داده می شود. در مرحله اول از آنجا که دو شرط مرزی در دسترس است، فقط دو نقطه جعلی تعیین گردند. به منظور دستیابی به درجات بالای دقت برای شرائط مرزی، تقریب تفاضلات محدود (FD) یک طرفه به کار گرفته می شود که شامل ضرائب روی  $L$  نقطه شبکه روی وجه داخلی مرز می باشد. بنابراین شرط مرزی بوسیله روش تفاضلات محدود یک طرفه  $L+3$  نقطه ای) تقریب زده می شود.

$$W_1^{(k)} f_2 + W_2^{(k)} f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} W_i^{(k)} g_{i-2} = 0 \quad (38)$$

با بازنویسی رابطه (۳۸) برای هردو رابطه شرط مرزی لبه آزاد ( $f''(x)=0$  و  $f'''(x)=0$ ) به کمک روش فوق، برای مشتق مرتبه دوم و مشتق مرتبه سوم داریم:

$$\begin{cases} W_1^{(2)} f_2 + W_2^{(2)} f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} W_i^{(2)} g_{i-2} = 0 \\ W_1^{(3)} f_2 + W_2^{(3)} f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} W_i^{(3)} g_{i-2} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

ضرائب  $W_i^{(k)}$  برای  $i=1,2,\dots,L+3$  و  $k=2,3$  وزنهای روش تفاضلات محدود یک طرفه میباشند.  $f_1$  و  $f_2$  مقادیر نامعلوم تابع روی نقاط جعلی و  $g_i$  برای  $i=1,2,\dots,L+1$  مقادیر معلوم تابع روی سمت راست مرز می باشند. با حل دستگاه (۳۹) مقادیر  $f_1$  و  $f_2$  بر حسب مقادیر معلوم داخل مرز تعیین می شوند. حال با جا به جایی مرز و اعمال کردن شرط مرزی در نقطه  $f_2$ ، مقادیر

مثال برای حالت  $x \neq x_k$  و با فرض هسته دلتای شانون تنظیم شده داریم:

$$\delta_{\frac{\pi}{\Delta}, \sigma}^{(1)}(x_m - x_k) = \frac{\cos \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(x - x_k)} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\Delta} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (33)$$

### نحوه اعمال شرائط مرزی معادل تکیه گاه ساده و گیردار

در زمینه مدل سازی شرائط مرزی تحقیقات گسترده ای انجام گرفته است. در واقع یک الگوی عددی کامل باید روشی برای مدل کردن شرائط مرزی داشته باشد. برای شرائط مرزی معادل تکیه گاه ساده و گیردار، استفاده از تابع یک بعدی مفروض  $f(x)$  به همراه فرض رابطه ای مشخص و سپس افزودن الگوریتم DSC بر آن، می تواند زمینه مدل سازی آنها را فراهم آورد. مثلاً در مرز چپ رابطه بین نقاط جعلی (خارج از دامنه) و نقاط درونی (داخل دامنه)، به صورت زیر فرض می شود [۲]:

$$f(x_{-i}) - f(x_0) = a_i [f(x_i) - f(x_0)] \quad i=1,\dots,M \quad (34)$$

که در آن  $x_0$  نقطه مرز چپ می باشد و با استفاده از تقریب DSC برای اولین و دومین مشتقات تابع  $f(x)$  به صورت زیر و استفاده از یک سری تکنیک های خاص، شرائط مرزی ساده و گیردار به صورت زیر مدل سازی می شوند:

$$f(x_{-i}) = a_i f(x_i) + (1 - a_i) f(x_0) \quad (35)$$

$$f'(x_0) = \sum_{i=-M}^M C_i^1 f(x_i) = \left[ C_0^1 - \sum_{i=1}^M (1 - a_i) C_i^1 \right] f(x_0) + \sum_{i=1}^M (1 - a_i) C_i^1 f(x_i) \quad (36)$$

$$f''(x_0) = \sum_{i=-M}^M C_i^2 f(x_i) = \left[ C_0^2 + \sum_{i=1}^M (1 - a_i) C_i^2 \right] f(x_0) + \sum_{i=1}^M (1 + a_i) C_i^2 f(x_i) \quad (37)$$

برای تکیه گاه ساده، شرائط مرزی معادل:  $f(x_0)=0$  و محاسباتی، مشخص می شود که با انتخاب  $a_i = -1$  برای  $i=1,2,\dots,M$  معادلات مربوط به این شرط مرزی ارضاء می شوند. در واقع شرائط مرزی ساده با بسط غیر متقارن مدل شده اند. برای تکیه گاه گیردار مشخص می گردد که

$$\left. \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 u(z, t)}{\partial z^4} \right|_{x=i} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(4)}(z_i - z_k) u_{i+k}(z, t) \quad (40)$$

در واقع طول تیر (ارتفاع سد) به نحوی شبکه بندی می گردد که N نود (نقطه) روی سازه قرار گرفته و M نقطه جعلی<sup>۴</sup>، به طور متقارن از هر مرز به سمت خارج دامنه و با فاصله یکسان نسبت به نقاط داخل دامنه، در نظر گرفته می شود. فاصله نقاط شبکه یکسان بوده و از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta = \frac{(N-1)}{h} \quad (41)$$

با تقریب زدن مشتقات چهارم تابع  $u(z, t)$  نسبت به z در تمام نقاط شبکه (N نقطه) به وسیله رابطه (۴۰) ماتریس ضرائب DSC حاصل می شود. درایه های این ماتریس، ضرائب  $\delta_{\Delta, \sigma}^{(4)}(z_i - z_k)$  می باشند که مشابه رابطه (۳۳) به صورت تحلیلی محاسبه می شوند. این ماتریس مستطیلی بوده و دارای N سطر و (N+2M) ستون می باشد. با توجه به این که سازه سد به صورت یک تیر طره ای مدل شده است، دارای شرائط تکیه گاهی گیردار و سر آزاد در دو انتهای خود می باشد:

$$Z = 0 : u(z, t) = 0, \quad \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (42)$$

$$Z = h : \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u(z, t)}{\partial z^3} = 0 \quad (43)$$

برای مدل سازی شرط مرزی تکیه گاه گیردار بر اساس مطالب بخش قبل از بسط متقارن استفاده می شود، بنابراین در نقطه  $z = 0$  خواهیم داشت:

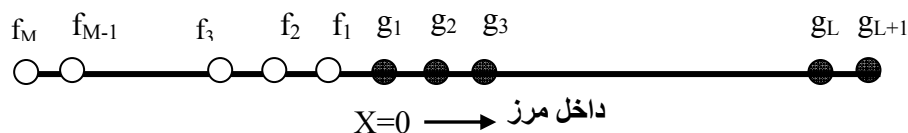
$$u_{-k}(z, t) = u_k(z, t), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (44)$$

$f_1$  و  $f_2$  در داخل دامنه و جزء مقادیر معلوم قرار می گیرند. با ادامه این روند به تعداد مجهولات خارج از دامنه، معادله خواهیم داشت و روند تکراری فوق تحت عنوان روش IMI مورد استفاده قرار می گیرد. میزان دقت آن به طول L بستگی دارد که می تواند کوچکتر یا بزرگتر از M باشد. البته شرایط  $2 \geq L$  و  $2 \geq M$  باید در تمامی روابط برقرار باشد.

## تحلیل اندرکنش سد و مخزن به وسیله روش DSC

در این بخش با توجه به فرضیات مشابه روش Lee و Tsai، سازه سد مانند گذشته به صورت یک تیر طره ای با مقطع ثابت در نظر گرفته می شود. سپس در معادله حرکت مربوطه، تابع و مشتقات آن نسبت به متغیرهای فضایی به کمک الگوریتم انتگرال حلقوی منفرد مجزا، تقریب زده می شود. معادلات فشار هیدرودینامیک مجدداً با رویکرد به روش DSC از ابتدا تعیین شده و تغییرات لازم اعمال می گردد. در حل مسئله اندرکنش سد - مخزن به کمک الگوریتم DSC معادله (۱) به طور مستقیم مورد تحلیل قرار می گیرد.

به منظور تقریب مشتقات مرتبه چهارم تابع  $u(z, t)$  نسبت به متغیر مکانی z به کمک روش DSC، با توجه به مطالب مطرح شده در بخش ۳ مقاله و با استناد به این نکته که طی بررسی های انجام گرفته، هسته تنظیم شده دلتای شانون هماهنگی و سازگاری بیشتری با مسئله اندرکنش دارد، لذا از رابطه تقریب کانولوشن منفرد مجزا با هسته تنظیم شده دلتای شانون استفاده می شود و خواهیم داشت:



شکل ۲: مرز تطبیق یافته تکرار شونده.

که در آن  $[K]_{N \times N}$  ماتریس ضرائب DSC پس از اعمال شرایط مرزی و کاهش آن به ماتریس  $N \times N$  مربعی و ماتریس  $[m]_{N \times N}$  ماتریس جرم متمرکز در محل نقاط اصلی شبکه می باشد که یک ماتریس قطری بوده و به شکل زیر تعریف می شود:

$$[m]_{N \times N} = \begin{cases} m_{ii} = m \times \Delta & \text{for } i = 2, 3, \dots, N-1 \\ m_{ii} = m \times \frac{\Delta}{2} & \text{for } i = 1, N \end{cases} \quad (51)$$

که در آن  $m$  جرم واحد طول سازه می باشد. با توجه به رابطه (۴۹)، و با انتقال قسمت  $W_k(z, t)$  از سمت چپ به سمت راست معادله (۵۰)، این معادله را در نهایت به شکل ماتریسی زیر می توان باز نویسی نمود:

$$EI \times \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}(z_1, t) \\ \ddot{u}(z_2, t) \\ \vdots \\ \ddot{u}(z_N, t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & \dots & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(z_1, t) \\ u(z_2, t) \\ \vdots \\ u(z_N, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L(z_1, t) \\ L(z_2, t) \\ \vdots \\ L(z_N, t) \end{Bmatrix} \quad (52)$$

در رابطه ماتریسی فوق داریم:

$$L(z_i, t) = -[m_i]_{N \times N} \times [\ddot{u}_g(t)]_{N \times 1} - [P_k^r(z_i, t)]_{N \times 1} - [F_k(z_i, t)]_{N \times 1} \quad (53)$$

$$W_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [P]_{N \times N} \times \ddot{u}(z, t) \quad (54)$$

$$[M]_{N \times N} = \sum_{k=1}^{\infty} [P]_{N \times N} + [m]_{N \times N} \quad (55)$$

بدین ترتیب معادله حاکم تغییر یافته به صورت فوق، از طریق روش نیومارک، مجزا سازی زمانی شده و پاسخ تغییر مکان سازه سد در هر نقطه و در هر گام زمانی محاسبه می شود. از آن جا که ماتریس های  $[K]_{N \times N}$  و  $[M]_{N \times N}$  در تمام گام های زمانی ثابت می باشند، لذا مسئله به طور کامل با شرایط روش حل نیومارک در مسائل خطی مطابقت دارد.

### مقایسه و بررسی نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از اندرکنش سد و

در واقع می توان  $M$  معادله به فرم کلی  $u_{-k}(z, t) - u_k(z, t) = 0, k = 1, 2, \dots, M$  را به  $N$  معادله قبلی اضافه نمود. از آن جا که در محاسبات عددی همواره سعی می شود که با کاهش ابعاد یک ماتریس سرعت عملیات را افزایش دهند، لذا با اعمال تکنیک های عددی، اعمال شرط مرزی گیردار سبب کاهش ابعاد ماتریس خواهد شد. برای سر آزاد نیز مطابق بخش قبل، با استفاده از روش IMB و کاربرد یک تکنیک عددی خاص، باز هم ابعاد ماتریس ضرائب کاهش یافته و در نهایت این ماتریس به یک ماتریس  $N \times N$  تبدیل می شود که با حل مسئله سازگاری ابعادی دارد. به منظور تعیین معادله فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال با رویکرد به روش DSC، تمام فرضیات و شرایط مرزی و اولیه مطابق بخش قبل می باشد، فقط شرط مرزی در ناحیه تماسی سازه و سیال به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho [\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(z, t)] \quad (45)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس و روش جداسازی متغیرها و نیز برقراری شرایط مرزی، توزیع فشار هیدرودینامیک را با رویکرد به روش DSC، می توان به صورت زیر نوشت:

$$p(0, z, t) = p_k^r(z, t) + p_k^f(z, t) \quad (46)$$

$$p_k^r(z, t) = \frac{4\rho C}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos \lambda_k z \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) J_0[\lambda_k c(t-\tau)] d\tau \quad (47)$$

$$p_k^f(z, t) = \frac{2\rho C}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k z \left\{ \int_0^t \int_0^t \ddot{u}(z, \tau) \cos \lambda_k z dz \times J_0[\lambda_k C(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (48)$$

با فرض تغییرات خطی شتاب زمین در دو گام زمانی متوالی و با فرض شتاب میانگین ثابت برای سازه در نهایت معادله  $p_k^f(z, t)$  به شکل خلاصه زیر نوشته می شود:

$$p_k^f(z, t) = F_k(z, t) + W_k(z, t) \quad (49)$$

معادله حرکت سازه در اندرکنش سد و مخزن، را با توجه به الگوریتم DSC و در نظر گرفتن فرم ماتریسی، می توان به صورت معادله زیر نوشت:

$$EI \times [K]_{N \times N} \times [u(z, t)]_{N \times 1} + [m]_{N \times N} [\ddot{u}(z, t)]_{N \times 1} = -[m]_{N \times N} \times [\ddot{u}_g(t)]_{N \times 1} - [P_k^r(z, t)]_{N \times 1} - [W_k(z, t)]_{N \times 1} - [F_k(z, t)]_{N \times 1} \quad (50)$$

## نتیجه گیری

- از مقایسه نتایج و شکلها، این نتیجه حاصل می شود که مقادیر پاسخ تغییر مکان تاج سد و فشار هیدرودینامیک، به شدت متأثر از پارامترهای DSC می باشند، و انتخاب نادرست این پارامترها سبب غیر واقعی بودن جوابها و تنزل دقت آنها می گردد.
- افزایش  $N$ ، یعنی افزایش تعداد نقاط شبکه به طور کلی سبب کوچکتر شدن  $\Delta$  می شود و این امر سبب نمونه گیری مناسب تر هسته شده و دقت آن و در نتیجه دقت جواب ها را افزایش می دهد. از طرفی افزایش  $N$  سبب افزایش زمان تحلیل و هزینه محاسباتی می گردد.
- افزایش پارامتر  $M$  تا یک حد معین به شدت بر جواب ها و دقت آنها مؤثر است. پس از رسیدن مقدار  $M$  به این حد تجربی تأثیر آن بر جواب ها کمتر شده، اما از دست نمی رود، در حالی که برای مقادیر کمتر از  $M$  بهینه دقت جواب ها در بعضی موارد بسیار تنزل می کند. در مسئله مورد بحث معمولاً برای  $N=250$ ، مقادیر  $M$  بیش از ۵۰ اثر کمتری برافزایش دقت جواب ها دارد.
- در مسئله مورد بحث، متناسب با اندازه شبکه یعنی  $\Delta$  و نیز مقدار  $M$  به منظور تنظیم هسته، یک پارامتر بهینه  $r$  وجود دارد که:  $r = \sigma \cdot \Delta$ . بر اساس بررسی های انجام شده با تحلیل های مختلف،  $r$  بهینه در این مسئله معمولاً عددی بین (۵-۱/۴) به دست می آید.
- افزایش  $L$ ، همان طور که از مقایسه شکل های (۶) تا (۹) به وضوح قابل مشاهده می باشد، سبب افزایش دقت روش IMB در مدل سازی شرط مرزی می شود. اما برای هر  $M$  نیز می توان  $L$  بهینه ای یافت که به ازای آن دقت مورد نظر حاصل شود.
- بررسی شکل های (۶) تا (۹)، نشان می دهند که عمده خطای ایجاد شده در این روش، خطای ناشی از استفاده از روش های عددی انتگرال گیری در محاسبه فشار هیدرودینامیک با رویکرد به روش DSC، می باشد. این خطا به صورت تجمعی و با افزایش گام زمانی از دقت جواب ها می کاهد و خطای ناشی از روش DSC در مقایسه با این خطا کوچکتر است. به همین دلیل تطابق جواب ها در مورد جا به جای نسبتاً مناسب ولی در مورد فشار هیدرودینامیک تطابق کمتری وجود دارد.

مخزن نیمه بی نهایت با فرض تراکم پذیری سیال و صرف نظر از امواج سطحی، بوسیله روش DSC ارائه می شود. سپس نتایج حاصله با نتایج و گراف های حاصل از روش Lee & Tsai مقایسه می شود. مطابق شکل (۳)، سیستمی شامل یک تیر منشوری با مقطع ثابت به ارتفاع ۱۸۰ متر و به ضخامت ۱۵ متر در نظر گرفته می شود، مدول الاستیسیته این تیر  $EI=3/5E7$  تن بر مترمربع و وزن مخصوص آن  $2/4$  تن بر مترمکعب می باشد. سرعت صوت در آب  $C=1438/656$  متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. جرم حجمی آب  $\rho = 1$  تن بر مترمکعب می باشد. سازه فوق در هر دو روش، تحت مؤلفه افقی شمالی - جنوبی زلزله ال سنترو (۱۹۴۰) و به مدت ۶ ثانیه، مورد تحلیل قرار می گیرد. در تحلیل Lee و Tsai، ۵ مود برای سازه و ۳۵ جمله اول حد مجموعها در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به روش Lee و Tsai در شکل های (۴) و (۵) ارائه گردیده است. در روش DSC به جهت مقایسه و بررسی میزان تأثیر پارامترها، سه حالت مختلف در تحلیل مدنظر قرار گرفته است:

حالت اول:

$$N = 100, M = 26, r = 3, L = 17$$

حالت دوم:

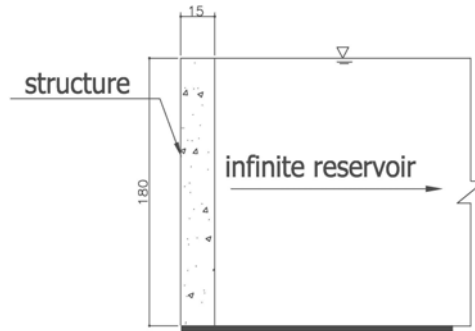
$$N = 150, M = 36, r = 4, L = 27$$

حالت سوم:

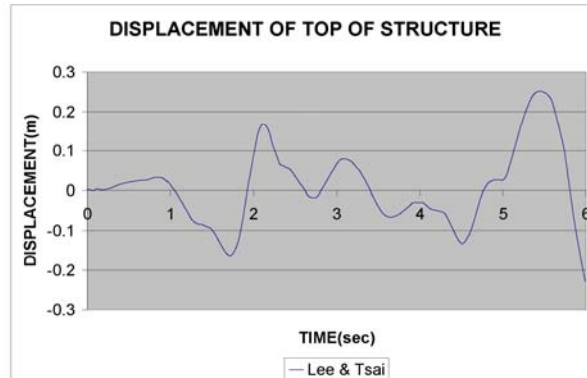
$$N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41$$

لازم به یادآوری است که پارامتر  $N$  تعداد نقاط شبکه اصلی،  $M$  تعداد نقاط جعلی،  $r = \sigma \cdot \Delta$  تنظیم کننده و  $L$  تعداد نقاط داخل دامنه می باشد که در مدل سازی لبه آزاد به کار گرفته می شود. تغییر مکان تاج سد در هر سه حالت تحت اثر زلزله ال سنترو، به دست آمده است (شکل ۶ تا ۸). نتایج هر سه حالت با مقدار تغییر مکان حاصل از روش Lee و Tsai مقایسه شده و بهترین و دقیق ترین جواب ممکن و پارامترهای نظیر آن تعیین می شوند (شکل ۹). در شکل (۱۰)، بهترین جواب به دست آمده برای روش DSC در حالت سوم با روش Lee و Tsai مقایسه شده است. سپس برای این پارامترها فشار هیدرودینامیک در کف مخزن به دست آمده و با فشار نظیر آن در روش Lee و Tsai مقایسه می گردد (شکل های ۱۱ و ۱۲).

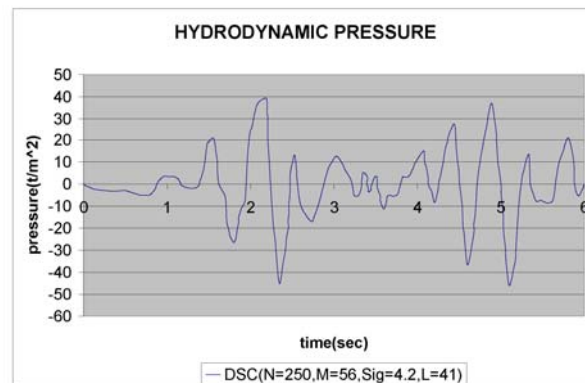




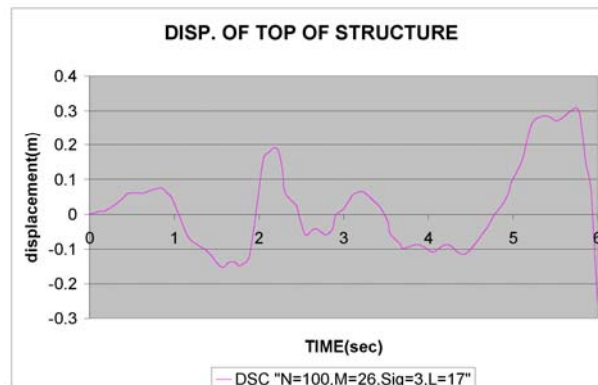
شکل ۳: سیستم سد - مخزن مورد مطالعه .



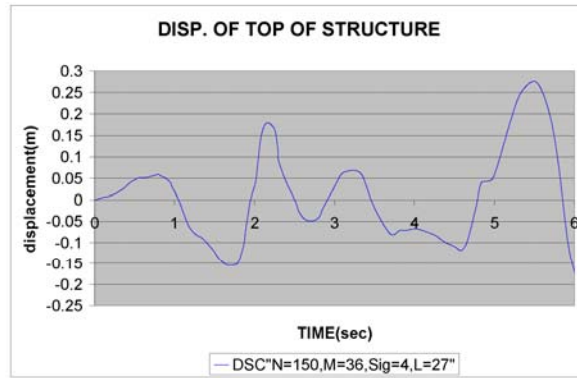
شکل ۴: تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) در حالت مخزن پر، تحت زلزله ال سنترو به روش Lee & Tsai بر حسب زمان.



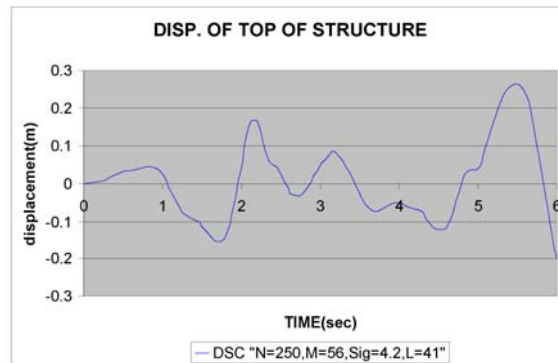
شکل ۵: فشار هیدرودینامیک در کف مخزن (تن بر متر مربع) بر اساس روش Lee & Tsai .



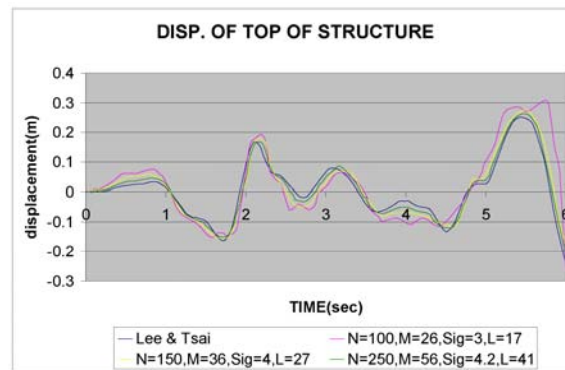
شکل ۶: تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) در حالت مخزن پر بر اساس روش DSC (پارامترها  $N = 100$ ,  $M = 26$ ,  $r = 3$ ,  $L = 17$ ).



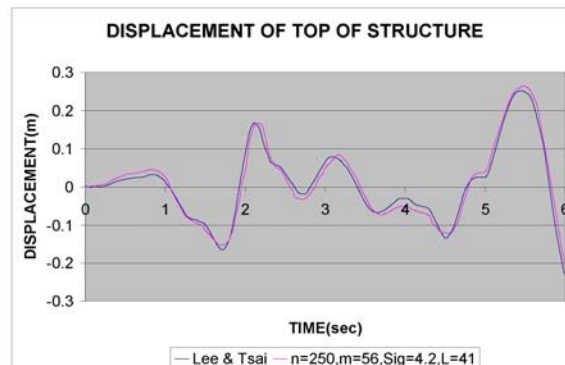
شکل ۷: تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) در حالت مخزن پر بر اساس روش DSC (پارامترها  $N = 150, M = 36, r = 4, L = 27$ ).



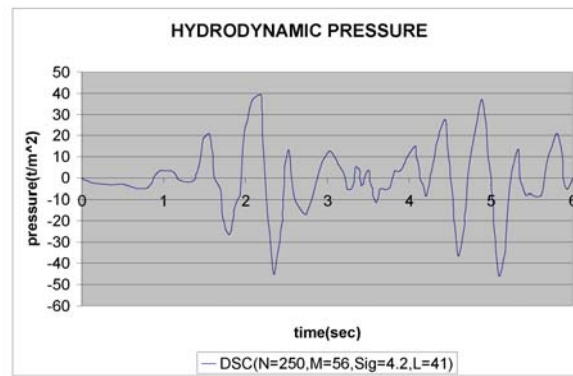
شکل ۸: تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) در حالت مخزن پر بر اساس روش DSC (پارامترها  $N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41$ ).



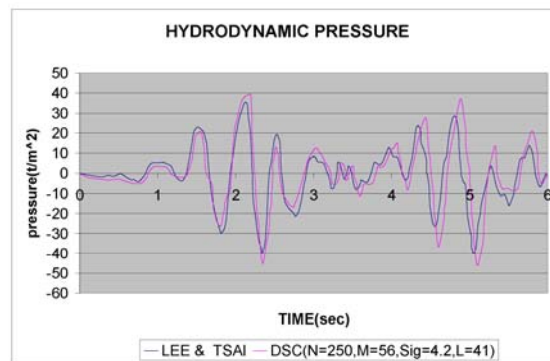
شکل ۹: مقایسه تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) با مخزن پر در هر سه حالت روش Lee & Tsai با روش DSC.



شکل ۱۰: مقایسه تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) با مخزن پر به کمک DSC در حالت Lee & Tsai با  $N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41$ .



شکل ۱۱: فشار هیدرودینامیک (بر حسب تن بر متر مربع) در کف مخزن بر اساس روش DSC (پارامترها  $N = 250$ ,  $M = 56$ ,  $r = 4.2$ ,  $L = 41$ ).



شکل ۱۲: مقایسه فشار هیدرودینامیک در کف (بر حسب تن بر متر مربع) مخزن بر اساس روش DSC در حالت Lee & Tsai با  $N = 250$ ,  $M = 56$ ,  $r = 4.2$ ,  $L = 41$ .

## مراجع

- 1 - Wei, G. W. (2000). "Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution." *J. Phys.* Vol. B33, PP. 343-352
- 2 - Wei, G. W. (2001). "A new algorithm for solving some mechanical problems." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 190, PP. 2017-2030.
- 3 - Wan, D. C. and Wei, G. W. (2002). "Discrete singular convolution-finite subdomain method for the solution of incompressible viscous flows." *J. Comput. Phys.* Vol. 180, PP. 229-255.
- 4 - Wei, G. W. (2001). "Vibration analysis by discrete singular convolution." *J. Sound Vibration*, Vol. 244, PP. 535-553.
- 5 - Wei, G. W. (1998). "Quasi wavelets and quasi interpolating wavelets." *Chem. Phys. Lett.*, Vol. 296, PP. 215-222.
- 6 - Wei, G. W., Zhang, D. S., Kouri, D. G. and Hoffman, D. K. (1997). "Lagrange distributed approximating functionals." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, PP. 775-777.
- 7 - Westergaard, H. M. (1933). "Water pressures on dams during earthquakes." *ASCE*. Vol. 98, PP. 418-433
- 8 - Chopra, A. K. (1967). "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes." *Journal of engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 93, No. 6, PP. 205-223.
- 9 - Chwang, A. T. (1978). "Hydrodynamic pressures on sloping dam during earthquake. Part2.Exact theory." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 87, PP. 343-348.

- 10 - Mei, C. C., Foda, M. A. and Tong, P. (1979). "Exact and hybrid –element solution for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea floor." *Appl. Ocean Res.*, Vol. 1, No. 2, PP. 79-88.
- 11 - Liu, P. L. F (1986). "Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquake." *J. Fluid Mech.*, Vol. 165, PP. 131-145.
- 12 - Tsai, C. S., and Lee, G. C. (1990). "Method for the transient analysis of three-dimensional dam-reservoir interactions." *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 116, No. 10, PP. 2151-2172.
- 13 - Tsai, C. S., Lee, G. C. and Ketter, R. L. (1990a). "A semi-analytical method for time-domain analysis of dam-reservoir interaction ." *International J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 5, PP. 913-933.
- 14 - Lee, G. S. and Tsai, C. S. (1991). "Time-domain analysis of dam-reservoir system part 1; exact solution." *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 117, No. 9, PP. 1990-2006.
- 15 - Zhao, S., Wei, G. W. and Xiang, Y. (2005). "DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method." (*Short Communication*). *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 284, PP. 487-493.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Discrete Singular Convolution
  - 2 - Wavelet theory
  - 3 - Distribution Theory
  - 4 - Shannon Kernel
  - 5 - Iteratively Matched Boundary
  - 6 - Fictious Point
-