تاریخ علم، دورهٔ ۱۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۵، ص۲۱ ــ ۴۰

در بارهٔ دو رویکرد اساسی در تاریخ‌نگاری ریاضیات

حسن امینی
استادیار، پژوهشکدهٔ تاریخ علم،دانشگاه تهران
hasanamini@ut.ac.ir
(دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۱۰، پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۰۹)

چکیده
تاریخ‌نگاری ریاضیات در سال‌های اخیر متحول شده است و رویکرد پیشین که منجر به نگارش کتاب‌های تأثیرگذاری در تاریخ ریاضی بود از اعتبارش کاسته شده است. نسل جدید مورخان ریاضیات یا حداقل گروهی از آنها دیگر آن رویکرد را مناسب نمی‌دانند. نگاه تازه به تاریخ ریاضی کاملاً متفاوت با رویکرد کلاسیک است و به واقعیات تاریخی، که در روش کلاسیک به آن توجه نمی‌شد، اهمیت می‌دهد. تفاوت میان این دو رویکرد که مبتنی بر مفروضات شناخت‌شناسانهٔ متفاوت است به دو گونه تاریخ‌نگاری کاملاً مجزا منجر می‌شود. این شرایط باعث می‌شود که این دو نوع تاریخ‌نگاری در مقابل هم قرار بگیرند. در این مقاله می‌کوشیم تا هر یکی از این رویکردها، خصوصیات، مفروضات، نتایج و ریشه‌های آنها را معرفی کنیم و سرانجام رویکرد دیگری پیشنهاد کنیم که از تقابل میان این دو نوع تاریخ‌نگاری می‌کاهد.

کلیدواژه‌ها: تاریخ ریاضیات، تاریخ‌نگاری علم، تاریخ‌نگاری ریاضیات، جبر هندسی.

تاریخ‌نگاری کلاسیک ریاضیات

تاریخ‌نگاری کلاسیک ریاضیات[۱] عنوانی است که برای رویکردی در تاریخ‌نگاری ریاضیات انتخاب کرده‌ام که ابتدائاً بر نحوهٔ بیان سیر تحولات تاریخی ریاضیات حاکم بود و بخش عمده‌ای از تاریخ ریاضیات با همین رویکرد نوشته شده است. این نوع تاریخنگاری که تا میانهٔ قرن بیستم خود را بر نحوهٔ درک متون قدیمی ریاضیات تحمیل کرده بود محصول کار کسانی بود که اغلب در عین حال هم ریاضی‌دان و هم مورخ ریاضیات بودند. در این دیدگاه وظیفهٔ مورخ ریاضیات آن بود که آن‌چه از متون ریاضی یونانی درخور توجه است بیابد و آن‌گاه متنی ریاضیاتی به زبان یونانی کلاسیک متعلق به قرن سوم پیش از میلاد را برای فهم ریاضی‌دانی معاصر به نحو مقتضی مهیا کند، چنان‌که ریاضی‌دان معاصر بتواند ادامه‌دهندهٔ راه آن ریاضی‌دان یونانی باشد که متن کهن را نوشته است. مورخ باید در این راه موانع متعدد زمانی و زبانی را که باعث مهجور ماندن کشف‌های ریاضی می‌شود از میان بردارد، بنا بر این ناگزیر است که تا حد ممکن نسخه‌های ریاضیات یونانی را جمع‌آوری کند، متنی قابل فهم و بی‌غلط از آنها فراهم آورد، قسمت‌های جاافتاده را تکمیل نماید، اشتباهات سهوی را تصحیح کند، مطالب را در پرتو دانش ریاضیات نوین تحلیل کند و سرانجام حاصل را به زبان نمادین ریاضیات امروز تحویل ریاضی‌دانان هم‌عصر خویش دهد.

نمونه‌ای شاخص از چنین رویکردی مورخ ریاضیات یونانی، توماس هیث[۲] است. او در چاپ کتاب اصول اقلیدس چنین معیارهایی را مد نظر قرار داده است و در تحلیل محتوای آن چنین راهی را پی گرفته است. بخشی از کار تحلیل تاریخی او، که محصول چنین رویکردی بود، بعدتر به شکل خاصی در کانون توجه مورخان ریاضی قرار گرفت. هیث در توضیحاتی که برای درک بهتر مقالهٔ دوم اصول نوشت اصطلاح «جبر هندسی» را به‌کار گرفت تا تبیینی از محتوای ریاضیاتی این مقاله به دست دهد.

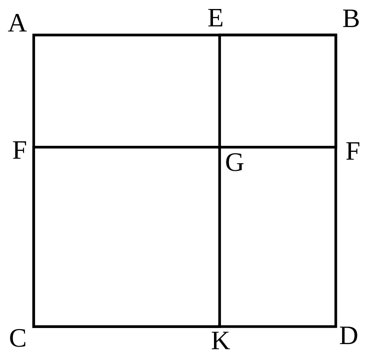
جبر هندسی به مجموعه‌ای از قضایای مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس اطلاق می‌شد که معادل با مجموعه‌ای از معادلات جبری بودند. برای مثال قضیهٔ چهارم از مقالهٔ دوم اصول که معادل هندسی اتحاد اول است. یا قضیهٔ یازدهم این مقاله که می‌توان آن را حل معادلهٔ درجه دوم مشخصی دانست.

---

۱. به آن تاریخ‌نگاری سنتی (traditional) ریاضیات نیز گفته می‌شود.

2. Sir Thomas Little Heath (5 October 1861-16 March 1940)

برای این‌که این رابطه را بهتر نشان دهیم قضیهٔ چهارم از مقالهٔ دوم اصول را بررسی می کنیم. این قضیه می‌گوید که «اگر خطی مستقیم را در نقطهٔ دلخواهی قطع کنیم، آن‌گاه مربع روی کل خط با مجموع مربعات روی هر یکی از قطعه‌های آن به علاوهٔ دو برابر متوازی الاضلاع شکل گرفته از آن دو قطعه برابر است».



معادل جبری این قضیهٔ هندسی رابطه‌ای است که به اتحاد اول معروف است:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

اگر چه فراگیر شدن اصطلاح جبر هندسی از کار هیث سرچشمه می‌گرفت اما می‌دانیم که او نخستین کسی نبود که از این اصطلاح استفاده کرد. این اصطلاح پیشتر توسط گئورگ زویتن[1] و پُل تانری[2] در قرن نوزدهم میلادی ابداع شده بود.

این‌که اولین بار اصطلاح جبرهندسی را به معنای تکنیک‌هایی پیش از خوارزمی (با استثنا کردن رشدی راشد، مورخ ریاضیات دورهٔ اسلامی، که آن را برای بعد آن هم به کار می‌برد) چه کسی به کار برد محل اختلاف است. گروهی معتقدند که نخستین بار پُل تانری بود که این اصطلاح را به کار بست. زیرا وقتی برای اولین بار آرپاد سابو[3] در ۱۹۶۹ به این ایده تاخت به مقاله‌ای از تانری ارجاع داد با عنوان «راه حل هندسی مسائل درجهٔ دوم» که در اصل در ۱۸۸۲ نوشته شده بود و در ۱۹۱۲ دوباره به چاپ رسیده بود و در آن به «قضایای جبری در لباسی هندسی» اشاره شده بود.

1. Hieronymus Georg Zeuthen (15 February 1839-6 January 1920)
2. Paul Tannery (20 December 1843-27 November 1904)
3. Arpad Szabo

ینس هویراپ[1] در مقاله‌ای که در این مورد نوشته در صحت نظر سابو تردید کرده است و گفته است که در مجموعهٔ سه جلدی آثار تانری، او تنها در مقاله‌ای متعلق به ۱۹۰۳ در بارهٔ جبر هندسی سخن گفته است که به بحث در بارهٔ تحلیل و ترکیب در ریاضیات یونانی برمی‌گردد. تانری در بخشی از این مقاله می‌نویسد که در زمان نخستین فیثاغورسیان احتمالاً «جبر هندسی» واقعی برای معادلات درجهٔ اول وجود داشته و آنها دقیقاً می‌دانستند که این کار با عملیات‌های عددی مرتبط است. او در این بخش همان اصطلاحی را که زویتن در ۱۸۸۶ ابداع کرده بود به‌کار گرفته است. زویتن این اصطلاح را نخستین بار در کتاب نظریهٔ مقاطع مخروطی در دورهٔ باستان[2] به‌کار برده بود که نسخهٔ دانمارکی آن در ۱۸۸۴ به چاپ رسیده بود (هویروپ، ص۱۳۱-۱۳۴).

زویتن در اثر یاد شده نوشته است که برای مثال در نظریهٔ تناسب ما از حساب جبری نسبت‌ها استفاده می‌کنیم و یونانی‌ها از حساب هندسی نسبت‌ها استفاده می‌کردند به این معنا که همین تصوری که صورت‌بندی مدرن تناسب به ما می‌دهد، اشکال هندسی برای آنها فراهم می‌کرد. به این شکل که خطی که در نموداری می‌توانست نشانگر هر مقداری به صورت کلی باشد و این رویکرد باعث می‌شد که بر خلاف ابزارهای حسابی که به دلیل کشف عدد گنگ اعتبارشان مورد تردید قرار گرفته بود، ابزارهای هندسی همچنان مناسب باشند. از همین روست که در دورهٔ یونانی، جبر هندسی پیشرفت می‌کند زیرا موضوع آن، مثل جبر، مقادیر کلی است ولی ابزار آن هندسه است. از طرف دیگر ابزار هندسی در مشاهده‌پذیری اثبات‌ها مفید است و به خاطر سپردن آنها را آسان می‌کند. به نظر زویتن جبر هندسی برای اقلیدس همان نقش جبر امروزی را بازی می‌کرد با این تفاوت که حیطهٔ عمل آن از عبارات درجهٔ دوم فراتر نمی‌رفت (ص۶-۷).

هیث اما دامنهٔ کارآمدی جبر هندسی را گسترده‌تر می‌دانست. او این تشابه میان ابزارهای هندسی و عملیات‌های جبری را به طور کامل بیان کرد، به این شکل که عملیات‌های جبری افزودن و کاستن مقادیر، معادل با ادامه دادن یا قطع کردن خطوط در جبر هندسی است. عمل ضرب دو مقدار، در جبر هندسی معادل است با ساختن مستطیلی است که آن دو مقدار طول و عرض آن هستند. عمل تقسیم، معادل با بیان نسبت دو خط مطابق قضایای مقالهٔ پنجم و ششم است. یافتن حاصل تقسیم عدد به دست آمده از ضرب دو

1. Jens Høyrup
2. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*

مقدار بر مقدار سومی (یعنی یافتن جزء چهارم تناسب، یا حل معادلهٔ خطی $ax = bc$) معادل می‌شود با پیدا کردن مستطیلی با یک ضلع معلوم که با مستطیل یا مربع معلومی برابر است. ابزار این کار همان روش موسوم به اعمال مساحت‌ها[1] است که در قضایای ۴۴ و ۴۵ مقالهٔ اول اصول مطرح شده است. افزودن و کاستن حاصل‌ضرب‌ها در جبر هندسی به افزودن و کاستن مستطیل‌ها یا مربع‌ها تبدیل می‌شود که می‌توان مجموع یا تفاضل نتایج را با اعمال مساحت به خطی معلوم مشخص کرد و این کار هندسی، معادل روش جبری پیدا کردن مضرب مشترک است. استخراج جذر نیز مطابق قضیهٔ ۱۴ مقالهٔ دوم و به کمک قضیهٔ ۴۷ مقالهٔ اول به پیدا کردن مربعی برابر با مستطیلی معلوم تبدیل می‌شود (ج۱، ص۳۷۴).

کمی بعدتر، با پیشرفت تاریخ ریاضی به کمک کشف‌های باستان‌شناختی، تصویر دقیق‌تری از میزان دانش ریاضی در تمدن‌های باستان و به خصوص تمدن بابلی در دسترس مورخان قرار گرفت. این شواهد تاریخی تازه نیز مؤید «نظریهٔ جبر هندسی» به عنوان نظریه‌ای برای تبیین شکل دانش جبر در یونان باستان بودند. زیرا اگر سطح دانش جبر در بابل را که شامل بیان مسائل ریاضی خاص و راه حل‌های خاص آنها می‌شد در نظر می‌داشتیم، جبر یونانی چیزی فراتر از نظام بخشیدن صرف به راه حل‌های عددی جبر بابلی بود که عموماً از حل موردی معادلات درجهٔ دوم فراتر نمی‌رفتند. مطابق این نظریهٔ تاریخی، جبر هندسی، راهی بود که ریاضیات یونانی برای غلبه بر مشکل ناهمسنجه‌پذیری مقادیر پدید آورده بود و لذا گامی بزرگ بود که نسبت به جبر عددی بابلی پیش‌تر نهاده بود. ون در واردن[2] در کتاب هندسه و جبر در تمدن‌های باستان[3] شرح کاملی از این نظریه را بر اساس شواهد و مدارک لازم به دست داده است. او کمی بعد در کتاب دیگرش به نام تاریخ جبر: از خوارزمی تا امی نوتر[4] باقی تحولات جبر را با مفروض گرفتن همین پیش فرض نوشت.

1. Aplication of areas
2. Bartel Leendert van der Waerden (February 2, 1903-January 12, 1996)
3. *Geometry and Algebra in Ancient Civilization*
4. *A history of algebra: From al-Khwarizmı to Emmy Noether*

بازنگری در تاریخ‌نگاری ریاضیات

در سال ۱۹۳۱ میلادی، بوریس هسن[1] مقالهٔ معروفش در بارهٔ ریشه‌های اجتماعی کتاب پرینکیپیای نیوتن[2] را نوشت و نوعی نگاه تازه در تاریخ‌نگاری علم را پیش نهاد. او توجه مورخان را به مؤلفه‌هایی غیر از مؤلفه‌های درونی علم برای تبیین پیشرفت علمی جلب کرد. با این حال چند دهه زمان لازم بود تا چنین تحولی در تاریخ‌نگاری خود را به ریاضیات، که در مقایسه با فیزیک و مکانیک انتزاعی‌تر بود، برساند.

اواخر دهۀ ۱۹۶۰ میلادی سابو به هر دو بخش نظریۀ جبر هندسی یعنی هم جبری بودن سرشت مقالۀ دوم اصول و هم تمایز آن با جبر بابلی تاخت و استدلال کرد که اولاً قضایای مقالۀ دوم صرفاً هندسی هستند و ثانیاً این قضایا هیچ ربطی به مشکل ناهمسنجه‌پذیری، که ریشه در مسألۀ تناسب داشت، ندارند و به دورۀ پیش اقلیدسی ریاضیات یونانی تعلق دارند.

اگر چه در آن زمان به این نقد سابو توجهی نشد اما از میانه‌های دهۀ ۱۹۷۰ میلادی جبر هندسی محمل بحث‌هایی در تاریخ‌نگاری ریاضی شد که سرآغاز تغییر در نگرش به آن بود. سابو سرانجام در ۱۹۷۷میلادی در مقاله‌ای با عنوان «دربارۀ مسألۀ موسوم به جبر هندسی در اصول اقلیدس»[3] موضع خود را با تمام ادله علیه نظریۀ جبر هندسی عرضه کرد (ص۳۹۰-۳۹۳).

اما در این حد فاصل، چهرۀ شاخص مخالفین «جبر هندسی»، ساباتای اونگورو،[4] در چهاردهمین کنفرانس جهانی تاریخ علم که در سال ۱۹۷۴ میلادی در ژاپن برگزار شد سخنرانی خود را با عنوان نیاز به بازنویسی تاریخ ریاضیات یونان[5] ایراد کرد. این سخنرانی بعدتر در قالب مقاله‌ای در مجلۀ آرشیو تاریخ علوم دقیقه[6] به چاپ رسید. او با لحن تندی عنوان داشت که کاری که تانری، زویتن و ون در واردن با ابداع اصطلاح جبر هندسی کرده‌اند چهرۀ واقعی ریاضیات یونانی را به کلی تغییر داده و تصویری معوج از این بخش از ریاضیات یونانی عرضه داشته است و این شکل از تاریخ‌نگاری

1. Boris Mikhailovich Hessen, also Gessen (August 16, 1893-December 20, 1936)
2. The Social and Economic Roots of Newton's *Principia*
3. Zum Problem der sogenaunten Geometrischen Algebra in Euklids *Elementen*
4. Sabetai Unguru (1931, Romania-)
5. The need to rewrite the history of Greek Mathematics
6. *Archive for history of exact sciences*

ریاضیات ساده لوحانه و غیرقابل دفاع است. خوانش ریاضیات کهن در چهارچوب و با هدف درک ذهن مدرن فقط به عدم درک خصوصیات اصلی این دانش منجر می‌شود، زیرا در این خوانش، پیش‌فرض‌های فلسفی و تعهدات مابعدالطبیعی نادیده گرفته می‌شوند و تمام مسؤولیت درک متن به عهدهٔ ریاضیات مدرن گذاشته می‌شود. جای دادن همهٔ محتوای ریاضی یک متن در قالب علائم جبری مدرن، راه درک ریاضیات قدیم نیست. به همین دلیل است که وضع اصطلاح جبر هندسی وجهی ندارد. هندسهٔ اصول، چنان‌که در مقالهٔ دوم هم حضور دارد، به فضا و خصوصیات آن برمی‌گردد و آن را با استفاده از نمودارها بازنمایی می‌کند و استدلالات آن در قالب الفاظ زبانی بیان می‌شوند. درحالی‌که خصوصیت اصلی جبر، نمادگذاری کاربردی است و جبر با روابط ریاضی سروکار دارد و نه اشیای ریاضی، و آن‌قدر انتزاعی است که هیچ تعهد وجودشناختی در آن راه ندارد. با توجه به این تفاوت‌هاست که می‌توان اذعان داشت که وجود جبر هندسی هم از نظر منطقی و هم از لحاظ تاریخی محال است.

اونگورو معتقد بود که تاریخ ریاضی باید به اصل و ذات تفکر ریاضی در یونان بپردازد و این را که کدام موجودات ریاضی در ریاضیات یونانی نقش اصلی ایفا کرده‌اند مد نظر قرار دهد. اما روش کلاسیک تاریخ‌نگاری ریاضی گویی فقط به دنبال ردپای ایده‌های ریاضی جدید در پس تصویر اصطلاحات کهن ریاضی یونانی است. همین دیدگاه محدود باعث شده است تا تاریخ‌نگاران کلاسیک اهمیت روش یگانه و خاص اثبات در ریاضیات یونانی را نادیده بگیرند. او ریشهٔ این مشکل را آنجا می‌دانست که تاریخ ریاضیات را ریاضی‌دانان نوشته‌اند، و آن‌چه برای ریاضی‌دانان واجد ارزش است و هدف آنها را شکل می‌دهد ترجمهٔ متون ریاضیات قدیم به زبان ریاضیات امروزی است تا محتوای آنها برای کلیهٔ علاقه‌مندان ریاضیات در دسترس باشد. او در ادامه مثال‌هایی از اصول را به عنوان شاهد می‌آورد که اگر چه به نقل از کتاب بیداری دانش[1] نوشتهٔ ون در واردن آمده‌اند اما او با رویکردی انتقادی به تعبیر آنها می‌پردازد و نیز توصیه‌هایی برای جایگزینی تعبیر جبر هندسی به دست می‌دهد.

1. *Science Awaking*

اونگورو اشاره می‌کند که آبل ری[1] در سال ۱۹۳۹ میلادی و مایکل ماهونی[2] در سال ۱۹۷۱میلادی هم به تعبیر جبری ریاضیات کهن بدون اشارهٔ مستقیم به اصطلاح جبر هندسی اعتراض کرده بودند و نخستین کسی که اعتبار این اصطلاح را رد کرد سابو در ۱۹۶۹میلادی بود. اونگورو به عنوان نمونه‌ای از تاریخ‌نگاری خوب ریاضیات تحلیل تاریخی جیکُب کلاین[3] را در کتاب تفکر ریاضی یونانی و منشأ جبر[4] معرفی می‌کند. موضوع این تحلیل تحول مفهوم عدد از فیثاغورسیان تا والیس است. از نظر اونگورو ریاضیات یک فرآوردهٔ فرهنگی است و نمی‌تواند متأثر از محیط فکر و فرهنگی‌ای که در آن رشد می‌کند نباشد (ص۶۷-۱۱۴).

عکس‌العمل تاریخ‌نگاری کلاسیک ریاضیات

ون در واردن در همان شماره از همان مجله که مقالهٔ اونگورو در آن به چاپ رسید و فقط چند صفحه بعد مقاله‌ای با عنوان «دفاع از نقطه نظری بهت‌آور»[5] نوشت و در آن به ادعاهای او پاسخ گفت. ون در واردن معتقد بود که اونگورو دو تلقی از جبر را خلط کرده است: یکی جبر به عنوان بخشی از ریاضی مدرن، یعنی شاخه‌ای علمی، و دیگری جبر به عنوان کار با عبارات جبری و معادلات، یعنی عملیاتی ریاضی. لذا انگورو درنیافته است وقتی ون در واردن در بارهٔ متون تاریخی به جبر اشاره می‌کند منظورش جبر به عنوان عملیات ریاضی است و نه شاخه‌ای علمی.

افزون بر این پیش فرض اونگورو که جبر هندسی نظریه‌ای است برای بیان امروزی قضایا به صورت جبری و با هدف فهم ساده‌تر آنها اشتباه است، بلکه چون این دسته از قضایا نمی‌توانستند برخاسته از هیچ مسألهٔ هندسی باشند و فقط می‌توانستند ریشه در عملیات جبری داشته باشند، عنوان جبر هندسی به آنها اطلاق شده است.

ون در واردن معتقد بود که هیچ مسألهٔ هندسی جالبی که بتواند انگیزهٔ قضایای مقالهٔ دوم باشد وجود ندارد. می‌توان تناظر خوبی میان روش‌های حسابی بابلی و برخی قضایای مقالهٔ دوم پیدا کرد که بخشی از شواهد بیشتری هستند که در مورد ارتباط میان ریاضیات بابلی و یونانی وجود دارد.

---

1. Abel Rey
2. Michael Mahoney
3. Jacob Klein
4. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*
5. Defence of a “shocking” point of view

او در انتها متذکر می‌شود که انگورو مثل بسیاری از غیرریاضی‌دانان اهمیت زبان نمادین در ریاضیات جدید را دست بالا می‌گیرد و گمان می‌کند که چون ریاضی‌دانان سر و کارشان با صفحات پر از فرمول است، فرمول بخش مهمی از ریاضی است در حالی که ریاضی‌دانان می‌دانند که فرمول در اغلب موارد فقط کار را راحت‌تر می‌کند (ص۲۰۰-۲۱۰).

به اقتفای ون در ورادن، هانس فرویدنتال[1] نیز مقاله‌ای در پاسخ به اونگورو نوشت و پا را فراتر نهاد و مدعی شد مقالهٔ پنجم اصول، که در بارهٔ نسبت‌ها است و در آن خبری از اشیاء هندسی مثل مثلث و مربع نیست، از اساس جبری است و از هر گونه معنای هندسی خالی است و برای بیان تمایز میان چنین مقاله‌ای و مقالهٔ دوم و چهارم است که اصطلاح جبر هندسی به کار می‌آید (ص۱۹۳).

آندره وی[2] دیگر ریاضی‌دان سرشناسی بود که متنی در مخالفت با اونگورو منتشر کرد و مدعی شد که در مورد مقالات هفتم، هشتم و نهم حتی اطلاق جبر هندسی نیز زیاده‌روی است زیرا «مطابق طبقه‌بندی مدرن» این مقاله‌ها بخشی از جبر حلقهٔ اعداد صحیح‌اند و در اساس به حوزهٔ نظریهٔ اعداد تعلق دارند. او استفاده از زبان نمادین ریاضیات مدرن را برای بیان این مطالب با استفاده از سیستم دهدهی عددنویسی برای بیان نتایج در تاریخ ریاضیات مقایسه کرد که صرفاً فهم آن را آسان‌تر می‌کند و تغییری در نتیجه نمی‌دهد (ص۹۲).

دلایل بیشتر علیه تاریخ‌نگاری کلاسیک

اونگورو در جواب بار دیگر بر موضع خود مبنی بر این‌که این نوع خوانش به روش‌شناسی خاصی برمی‌گردد که ریاضی‌دانان را قادر می‌سازد تا متون ریاضی را فارغ از منازعات تاریخی بفهمند تأکید کرد. او ادعا کرد که اولاً اگر تعریف فرویدنتال از جبر را مبنا قرار دهیم، حل عددی معادلات در بابل جبر به حساب نمی‌آید و ثانیاً آن‌چه حل موردی معادلات در بابل را از مقالهٔ دوم اصول متمایز می‌کند خصوصیت هندسی بودن آن است، این خصوصیت است که امکان تعمیم روش‌ها و نتایج را برای اقلیدس فراهم آورده است.

1. Hans Freudenthal
2. Andre Weil

او در ادامه متذکر شد که معادل بودن در معنای ریاضی متمایز از معادل بودن در معنای تاریخی است و ریاضی‌دانان در تاریخ‌نویسی به‌اشتباه معادل بودن ریاضی را بازنمایندۀ معادل بودن تاریخی می‌گیرند. این اشتباه محصول دیدگاه فلسفی افلاطونی آنها به ریاضیات است که گمان می‌کنند ریاضیات متشکل از صور لایتغیری است و تمام ریاضی‌دانان در طی دوره‌های تاریخی متفاوت از صور یکسانی استفاده می‌کنند و این صور ریاضی متأثر از فکر و اندیشۀ ریاضی‌دان نیستند. در نتیجه، به‌نظر ایشان، هستۀ ثابتی از صور ریاضی وجود دارد و زبان ریاضی در هر دوره‌ای به همان هستۀ ثابت ارجاع می‌دهد. در چهارچوب این هستی‌شناسی است که کار تاریخ ریاضی فقط پیدا کردن این صور در آثار ریاضی نوشته شده است تا اینکه مشخص شود نخستین بار کدام ریاضی‌دان به آن صورت ریاضی در اثر خود اشاره کرده است و آن صورت ریاضی را از عالم مثل به عالم درک محسوسات کشانده است.

او همچنین متذکر می‌شود که نظریه‌های تاریخی لایتغیر نیستند و چنان که اقتضای طبیعت آنهاست با ظهور نظریه‌های جدید از میان می‌روند. در حوزۀ تاریخ ریاضیات نیز وقت آن رسیده که تعبیر تاریخی پیشین از ریاضیات قدیم کنار گذاشته شود و نظریه‌ای نو جای آن را بگیرد (۱۹۷۹، ص۵۵۵-۵۶۳).

اونگورو در تاختن به طرفداران نظریۀ «جبر هندسی» تنها نبود و او و دیود راو[1] از منظری دیگر به این نظریه انتقاد کردند. آنها معتقد بودند که باید میان آگاهی از روابط پایه در حساب و دانش جبر تمایز گذاشت. زیرا اولی تنها وقوف به حقایق خاصی در مورد اعداد است اما دومی دانشی انتزاعی است که بدون ارجاع به اشیاء انضمامی فقط با نمادها سروکار دارد. آن‌چه نزد بابلیان به عنوان دانش ریاضی شناخته می‌شود همان شکل اول است که لازم است تا ابتدا به شکل نظام سازگاری برای حساب درآید تا بتواند محملی برای کشف دانش جبر شود. اما ریاضیات بابلی ضعیف‌تر از آن بود که بتواند چنین نظامی را فراهم آورده و بنیانی برای جبر یونانی باشد (۱۹۸۱، ص۱۱-۱۲).

بخش دیگری از پروژۀ اونگورو و راو بررسی معادل‌های هندسی عملیات‌های جبری در اصول بود. تفاوت اساسی میان یک عملیات جبری و معادل هندسی آن در این بود که دومی فقط قابل اعمال به مقادیر همگن یا هم بعد بود، یعنی خط را تنها می‌شد با خط

1. David Rowe

جمع کرد، در حالی‌که در ضرب به عنوان عملیاتی جبری امکان ضرب هر دو مقداری فارغ از نوع آنها وجود دارد. رعایت قاعدهٔ همگن بودن مقادیر، حاکی این واقعیت است که در چهارچوب اصول، مستطیل جز شکلی هندسی معنایی ندارد و برخلاف نظریهٔ جبر هندسی، مفهومی تعمیم یافته و معادل با عملیات جبری ضرب نیست. باید پذیرفت که ترکیب نظام‌های حسابی و هندسی در قالب جبر، به خصوصیاتی نیاز دارد که با خصوصیات هندسهٔ اصول ، که پذیرای تعمیم مقادیر نیست، تطابق ندارد. تمامی اعمال اصول صرفاً معنای هندسی دارند و با قطعیت می‌توان اذعان داشت که هیچ ریاضی‌دان یونانی این تلقی را نداشته است که نسبت میان دو مقدار از یک طرف و عمل ساختن مستطیلی روی خطی معلوم از طرف دیگر، دو گونه عملیات هستند که معادل مفهوم جبری تقسیم‌اند (همان، ص۳۳).

اونگورو و راو در ادامه نشان دادند که هندسهٔ یونانی قادر به حل معادلات درجهٔ دوم نبود. آنها ضمن نشان دادن کاربرد بسیاری از قضایای منسوب به جبر هندسی، این نظریه را ارائه کردند که وجود این قضایا به این دلیل است که اقلیدس تعمداً معرفی و استفاده از نظریهٔ نسبت را تا مقالهٔ پنجم به تأخیر انداخته بود (۱۹۸۲، ص۱۹،۱۲-۲۰).

فاولر نیز در پاسخ به ادعای ون در واردن مبنی بر این‌که قضایای مقالهٔ دوم به مسألهٔ هندسی قابل توجهی ارجاع نمی‌دهند، نقشی برای این قضایا در ساختار اصول پیدا کرده است. او معتقد است قبل از معرفی نظریهٔ نسبت ائودوکسوسی در اصول، نسبت به شکلی که در الگوریتم اقلیدسی برای پیدا کردن بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک به‌کار می‌رود مورد استفاده بوده است و نقش کلیدی قضایای مقالهٔ دوم در کمک به استفاده از این نوع نسبت است (ص۸۱۰-۸۲۸). مولر نیز در کتاب «فلسفهٔ ریاضیات و ساختار استنتاجی در اصول اقلیدس»[1] نقش این قضایا را بررسی کرده است و به این نتیجه رسیده است که نقش اصلی آنها کمک به استفاده از خصوصیات اشکال هندسی است و با رابطهٔ انتزاعی میان مقادیر ارتباطی ندارند (ص۴۱-۵۲).

آخرین دفاعیات تاریخ‌نگاری کلاسیک

ون در واردن در کتاب هندسه و جبر در تمدن‌های باستان که بعد از این مباحثات به چاپ رسانید، سعی کرد تا با تکیه بر ریشه‌های تاریخی از نظریهٔ جبرهندسی دفاع کند.

---

1. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*

او اظهار داشت که جبر هندسی در یونان فقط در جبر بابلی ریشه نداشته است و محصول تلفیق جبر بابلی با سنت‌های هندسی پیشین است. به طور دقیق‌تر جبر هندسی، محصول تلفیق سنت آموزش ریاضیات به کمک حل مسائل عددی و سنت اثبات‌ها و ترسیم‌های هندسی است که اولی ریشهٔ بابلی و دومی ریشهٔ مصری دارد. او حتی مسیری را از طریق سنت ساختن هندسی محراب در موکنای و کرت برای انتقال این سنت‌های هندسی مطرح می‌کند (ص۸۹).

اگرچه این ادعا نیز بی پاسخ نماند و برگرن در مقاله‌ای ضمن مرور تحقیقات مربوط به ریاضیات یونانی، عنوان می‌کند که هیچ شاهد تاریخی موجهی برای انتقال ریاضی بابلی به یونان وجود ندارد. او می‌گوید که موارد معروف رابطه میان دانش بابلی و یونانی یعنی استفاده از شاخص، تقسیمات به درجه و نظام شصتگانی بعد از اقلیدس اتفاق افتاده‌اند و شاهد متقنی برای چنین انتقالی قبل از این دوره در دسترس نیست (ص۳۹۸).

ویلبرت کنُر[1] در ۱۹۸۶ میلادی در کتاب سنت قدیم مسائل هندسی موضعی میانه را برگزید و نوشت که اصطلاح جبر هندسی اگر به معنای جبری انتزاع از مقادیر باشد حتماً اشتباه است زیرا کار این قضایا جدا کردن همان مقادیر از زمینه‌های آن است، اما می‌تواند اشاره‌ای باشد به این‌که دیاگرام‌های هندسی، که بازنمایی روابط کمی هستند، نقش ذاتاً هندسی ندارند بلکه قضایایی کمکی برای دیگر قضایا هستند و در چهارچوب روابط ساختاری هندسهٔ یونانی دیاگرام‌های به ظاهر کاملاً بی‌ربط در ارتباط با هم قرار می‌گیرند (ص۲۰۳).

پیش از خاتمهٔ بحث باید به یکی از نخستین آثار در حوزهٔ تاریخ هندسه اشاره شود. میشل فلوریا شال[2]، ریاضی‌دان فرانسوی، در ۱۸۳۷ کتاب دیدگاه تاریخی از خاستگاه و توسعه روش‌های هندسی را منتشر کرد. او طبیعتاً در بارهٔ جبر هندسی، ایده‌ای که هنوز مطرح نشده بود، حرفی به میان نیاورده است و در بارهٔ موضوع مقالات اول تا چهارم اصول فقط نوشته است که این مقالات در بارهٔ خصوصیات اشکال مسطح به روش انتزاعی است. اما او در ادامه وقتی در بارهٔ روش افنا صحبت می‌کند متذکر می‌شود که نگاه به خَم‌ها به عنوان چندضلعی‌هایی با بی‌نهایت ضلع توسط نگاه مدرن بر نوشته‌های یونانی تحمیل شده است و چنین کاری با دقت اثبات یونانی هم‌خوانی ندارد و این نگاه

1. Wilbur Richard Knorr (August 29, 1945-March 18, 1997)
2. Michel Floréal Chasles (15 November 1793-18 December 1880)

مدرن است که روش افنا را به روش بی‌نهایت‌کوچک‌ها تبدیل کرده است (ص۱۶). می‌توان این بخش را به عنوان نخستین نشانه و ریشهٔ مورد توجه قرار نگرفتهٔ بازنگری در تاریخ‌نگاری ریاضیات دانست.

محمل فلسفی تاریخ‌نگاری کلاسیک و بازنگری آن

تاریخ نگاری کلاسیک ریاضیات، از حیث نظری بر دیدگاهی خاص نسبت به ماهیت دانش ریاضی استوار است. در این دیدگاه کار دانش ریاضی کشف حقایق ضروری و لایتغیر جهان است و تاریخ ریاضی گزارشی از انباشت این حقایق کشف شده روی یکدیگر است. در این نوع تاریخ‌نگاری قضیه‌ای ریاضی وقتی یک بار توسط ریاضی دانی کشف شد دیگر به همان شکل و برای همیشه در دسترس قرار دارد و کار مورخ ریاضی جز این نیست که راه این دسترسی را نشان دهد و هموار سازد.
چنین دیدگاهی ریشه در نگاه چهره‌های کلاسیک فلسفهٔ تاریخ یعنی کندرسه (قرن هجدهم) و آگوست کنت (قرن نوزدهم) به تاریخ علم دارد. آگوست کنت در کتاب نظام سیاست تحصلی[1] می‌نویسد که تالس می‌تواند پایه‌گذار جبر باشد زیرا نخستین قضیهٔ او یک معادله و قضیهٔ دوم او یک تناسب است (ج۳، ص۳۰۰). کار بارز این نوع تاریخ‌نگاری در شکل کلی و نه منحصراً در مورد ریاضیات، جستجوی مسیر عقلانیت امروزی در بدنهٔ تاریخ اندیشه‌ها است. مسیر این تأثیر از طرفی به واسطهٔ زویتن و از طرف دیگر به واسطهٔ تأثیر کتاب دروس فلسفهٔ تحصلی آگوست کنت بر پُل تانری است. تعلقات فکری تانری به فلسفهٔ تحصلی در نگاه او به تاریخ‌نگاری علم تأثیر بسزایی داشته است.

این نوع تاریخ‌نگاری، یکی از بهترین نمونه‌های تاریخ‌نگاری هم‌زمان[2] است تا آنجا که تأثیر زمان به طور کلی از میان می‌رود و گویی تاریخ همیشه در شکل مفهومی ثابت است. چنین نوع تاریخ‌نگاری در فلسفهٔ ریاضیات به افلاطون‌گرایی و تا حدی صورت‌گرایی نزدیک‌تر است.

---

1. *Systeme de Politique Positive*
2. Anachronistical

علاوه بر این چنین نوع تاریخ‌نگاری، شکل ایده‌آل تاریخ‌نگاری درونی[1] علم است، زیرا برای توجیه تمام تحولات تاریخی به چیزی بیرون از خود آن علم یعنی ریاضیات نیاز ندارد.

اما در نوع مقابل تاریخ‌نگاری کلاسیک، ریاضیات محصولی فرهنگی است که چگونگی بیان و ارائهٔ آن نیز به همان اندازهٔ مفهوم ریاضی آن واجد اهمیت است. وظیفهٔ مورخ آن است که واقعهٔ تاریخی را که در بستر زبان و زمان اتفاق افتاده با حداکثر تعهد ممکن بازگو نماید و شرایط امکان این واقعه را به نفع ساختار ریاضی آن کنار نگذارد.

در میان کسانی که به بازنگری در تاریخ‌نگاری ریاضیات معتقد بودند، مایکل ماهونی ابزارگرا و از مریدان توماس کوهن بود که رد پای این تأثیر را می‌توان در مقدمهٔ کتابی که در مورد آثار فرما نوشته است یافت (صxv). تعهدات فلسفی و متافیزیکی بیشتر ریاضیات قدیم نسبت به ریاضیات مدرن و متأثر بودن آن از فرهنگ و تفکر به عنوان دو تذکر مهم اونگورور در مقالهٔ «لزوم بازنگری...» (ص۱۷۱) هر دو طنینی کوهنی دارند. کوهن در ۱۹۶۸ مقالهٔ «تنش اساسی»[2] نوشته است که مورخان علم تنها در پی نوشتن سیر تکامل علم جدید بوده‌اند و هر مشاهده، قانون یا نظریه‌ای را که از منظر علم جدید بی‌اعتبار بود به ندرت مورد عنایت قرار می‌دادند. از طرف دیگر او معتقد بود در آغاز شکل‌گیری یک رشتهٔ علمی عناصر اجتماعی و به ویژه فلسفی در شکل‌گیری راه‌حل‌های مسائل نقش مهمی را بازی می‌کنند (ص۱۰۷) که اولی راه را برای دخالت دادن عناصر اجتماعی در تاریخ‌نگاری ریاضیات باز می‌کرد و دومی به اهمیت توجه به چنین عواملی در ریاضیات باستان می‌افزود.

این نوع تاریخ‌نگاری، متعلق به مکتب تاریخ‌نگاری درزمان[3] است تا آن‌جا که می‌کوشد برای مفاهیم ریاضی که تا حد زیادی ثابت هستند سر تحول تاریخی بیابد. چنین نوع تاریخ‌نگاری در فلسفهٔ ریاضیات به افسانه‌گرایی و تا حدی شهودگرایی نزدیک‌تر است.

از دیگر سو، این تاریخ‌نگاری به نوع تاریخ‌نگاری بیرونی[4] علم نزدیک است، که در آن عوامل بیرون از چهارچوب علم در تحولات علمی مؤثر انگاشته می‌شوند.

---

1. Internalist
2. Essential Tension
3. Diachronistical
4. Externalist

تحلیل

در واقع سؤال وجود جبر هندسی دو جنبهٔ تاریخی و مفهومی دارد که ضمن مباحثات شکل‌گرفته حول این موضوع همیشه این دو جنبه خلط شده‌اند، با این حال نگارنده گمان می‌کند که تمایز گذاشتن میان این دو جنبه می‌تواند دو فایده داشته باشد: اول آن‌که با روشن کردن جنبهٔ تاریخی سؤالات می‌توان به برخی از آنها پاسخ گفت و حداقل تصویر تاریخی مناسبی را فراهم آورد و تا حدی تکلیف این مباحثه را روشن کرد. دوم آن که با مشخص کردن جنبهٔ مفهومی می‌توان ریشه‌های آن را پیگیری کرد و نشان داد که چگونه این منازعه ریشه‌های عمیق متفاوتی دارد که می‌تواند امکان ادامهٔ حیات دو سنت تاریخ‌نگاری را کنار هم فراهم آورد و چگونه این ریشه‌ها تحقیقات تاریخی را به سؤالات فلسفی در مورد ریاضیات پیوند می‌زنند.

جنبهٔ تاریخی:

۱- آیا موجود تاریخی مستقلی به نام جبر بابلی وجود دارد؟

مورخان کلاسیک معتقدند که جبر بابلی فقط در شکل حسابی وجود داشته است ولی گروه مقابل معتقدند که آن‌چه از دورهٔ بابلی باقی مانده است فقط حل مسائل موردی هستند و جبر نیستند.

۲- آیا موجود تاریخی مستقلی به نام جبر یونانی وجود دارد؟

مورخان کلاسیک معتقدند که جبر یونانی در شکل هندسی وجود داشته است و نظریهٔ جبر هندسی را عنوان کرده‌اند ولی گروه مقابل معتقدند که آن‌چه جبر هندسی نامیده می‌شود صرفاً قضایایی برای استفادهٔ بهتر از خصوصیات اشکال برای اثبات‌های هندسی‌اند.

۳- شواهدی تاریخی برای رابطهٔ میان قضایای مقالهٔ دوم اصول و دانش ریاضیات بابلی وجود دارد؟

مورخان کلاسیک معتقدند که حل معادلات موردی در ریاضیات بابلی یکی از ریشه‌های شکل‌گیری قضایای مقالهٔ دوم اصول بوده است ولی گروه مقابل معتقدند که ریاضیات یونانی هیچ‌گاه به حل معادلات درجهٔ دوم نپرداخته است.

۴- آیا شواهدی برای تأثیر گذاری مسألهٔ ناهمسنجه‌پذیری بر ساختار کتاب اصول وجود دارد؟

مورخان کلاسیک معتقدند که عدم مواجهه با مسألهٔ ناهمسنجه پذیری از انگیزه‌های شکل‌گیری قضایای مقالهٔ دوم اصول بوده است ولی گروه مقابل معتقدند که این مسأله تنها به تناسب برمی‌گردد که در مقالهٔ پنجم و ششم مطرح می‌شود

۵- نقش قضایای مقالهٔ دوم در ساختار کتاب اصول چیست؟

مورخان کلاسیک معتقدند که قضایای مقالهٔ دوم معادل عملیات جبری با عبارات هستند ولی گروه مقابل معتقدند که این قضایا فقط بیانگر روابط میان خصوصیات اشکال هندسی‌اند.

۶- نخستین بار کِی شاخهٔ مستقلی از ریاضی به نام جبر شکل گرفت؟

مورخان کلاسیک معتقدند که جبر نخستین بار در بابل ابداع شده است ولی گروه مقابل معتقدند که این اتفاق در دورهٔ اسلامی افتاده است.[۱]

جنبهٔ مفهومی

۱- تاریخ ریاضیات به چه کار می‌آید؟

مورخان مکتب هم‌زمانی معتدند که هدف اصلی نوشتن تاریخ علم مشخص کردن مسیر عقلانیت علم مدرن است اما مورخان مکتب درزمانی معتقدند که بازسازی ذهنیت علمی در گذشته باید برای مورخ علم واجد اهمیت باشد.

۲- جبر به چه معناست؟

این سؤال که وقتی از جبر حرف می‌زنیم به مجموعه‌ای از عملیات‌های ریاضی که بر موجودات انتزاعی اعمال می‌شوند صحبت می‌کنیم، یا این‌که به شاخه‌ای علمی ارجاع می‌دهیم که به شکلی مستقل توسط ریاضی‌دانان پذیرفته شده است، از موضوعات محل بحث است.

---

۱. پاسخ به این سؤال با پاسخ به سؤال در مورد هویت جبر در ارتباط است، به همین دلیل مورخان ریاضی نظرات گوناگونی در این باره داشته‌اند.

۳- آیا مفاهیم ریاضی با زمان و مکان تغییر می‌کنند؟

پاسخ به این سؤال نیز طیفی از نظرات را از این‌که ریاضیات و کشف‌های ریاضی مستقل از هر تغییری هستند تا این‌که حتی عناصر زبانی و فرهنگی نیز در شکل‌گیری ریاضی مؤثر است تغییر می‌کند.

۴- رابطۀ ریاضیات با جهان خارج چیست؟

پاسخ به این سؤال نیز از این‌که مفاهیم ریاضی مستقل از جهان خارج هستند تا این‌که این مفاهیم برساخته‌های اجتماعی هستند تغییر می‌کند.

فراتاریخ ریاضیات[1]

به نظر می‌رسد مورخان در بیشتر بررسی‌های تاریخی با توازن یا دست‌کم مشخص بودن حوزه‌های عوامل بیرونی و درونی مواجه‌اند، اما در دو حوزۀ خاص با شرایط حدی سروکار داریم: تاریخ‌نگاری ادبیات داستانی و تاریخ‌نگاری ریاضیات. در مورد تاریخ‌نگاری ریاضیات وضعیت دقیقاً عکس وضعیت در تاریخ‌نگاری ادبیات داستانی است. همان‌قدر که در تاریخ‌نگاری ادبیات عناصر بیرونی و اجتماعی ایفاگر نقش اصلی در تبیین‌های تاریخی هستند در تاریخ‌نگاری ریاضیات این عناصر درونی و منطقی هستند که بار عمدۀ تبیین‌های تاریخی را نیز به دوش می‌کشند.

پاسکاله کازانوا[2] در مقالۀ «ادبیات به مثابه جهان»، پیشنهادی دارد که ورای نظریۀ انتقادی بیرونی و درونی در مورد تاریخ‌نگاری ادبیات داستانی است، او در پی فراهم آوردن فضایی میانی است، جهانی که مرزهایش مستقل از حدود سیاسی و زبانی است و قوانین خودش را دارد (ص۷۱-۷۲). در مورد تاریخ‌نگاری ریاضی نیز کاری مشابه می‌تواند در دستور کار قرار گیرد.

همیشه بررسی ریاضی در سطحی میان ریاضیات و فلسفۀ ریاضی مطرح بوده است، که به این حوزه فراریاضیات[3] گفته می‌شود و عموماً به مطالعۀ مفاهیم ریاضی با روش‌های ریاضی اختصاص دارد. فراریاضیات خود سرشتی ریاضی دارد ولی این ایده را پیش می‌نهد که برای ریاضیات نیز بتوان فضایی بیرون از خود ریاضی ولی با سرشتی تاریخی

1. Meta-history of Mathematics
2. Pascale Casanova (February 14, 1959-September 29, 2018)
3. Meta-mathematics

فراهم کرد که قوانین آن تاریخی، منطقی و ریاضی هستند. عناصر چنین فضایی تمامی مفاهیمی هستند که به واقعیتی ریاضی ارجاع می‌دهند و این مفاهیم هستند که سرشتی تاریخی دارند و می‌توانند تغییر کنند. در چنین فضایی هر دو تعبیر متفاوت از تاریخ جبر تا آن‌جا که مفاهیم آن‌ها به روابط ریاضی ارجاع می‌دهند درست است، بنا بر این خود مفهوم جبر نیز مفهومی است که بر اساس ارجاع به کارهای ریاضی ساخته شده است. چنین نظری تنها باید به این سؤال پاسخ دهد که حدود فرا رفتن از اشیای ریاضی تا چه حد است؟ آیا می‌توان فراز و نشیب زندگی فردی ریاضی‌دان را نیز بخشی از مفاهیمی قرار داد که بر اساس نوشته‌های ریاضی او ساخته می‌شود؟ پاسخ می‌تواند این باشد که این مفاهیم تا جایی امکان جدا شدن از روابط ریاضی را دارند که همچنان رابطهٔ علی تاریخی را با آن مفهوم ریاضی حفظ کرده باشند.

منابع

Barker, A. (2004). *Greek Musical Writings: Harmonic and Acoustic Theory*. Cambridge University Press.

Berggren, J.L. (1984). “History of Greek Mathematics: A.Survey of Recent Research”, *Historia Mathematica* 11, pp. 394-410.

Casanova, Pascale. (2005). “Literature as a World.” *New Left Review* 31.

Chasles, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, originally published by Hayez in Bruxelles.

Comte, Auguste. (1851). *Système de politique positive: ou traité de sociologie instituant la religion de l'Humanité*. E. Thunot.

Fowler. (1979). “Ratio in Early Greek Mathematics.” *Bulletin of the American Mathematical* Society, Vol. 1 No. 6. pp. 807-846.

Freudenthal, H. (1977). “What is Algebra and What has it been in History?” *Archive for history of exact sciences*, 16(3). pp. 189-200.

Heath, Thomas Little, ed. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Hessen. Boris. (1931). “The Social and Economic Roots of Newton's *Principia*”, in: Nicolai I. Bukharin, *Science at the Crossroads*. London. (Reprinted in 1971, New York), pp. 151–212.

Høyrup, J. (2017). “What is “geometric algebra”, and what has it been in historiography?” *AIMS Mathematics*, 2(1). pp. 128-160.

Kuhn, T. (1977). *The Essential Tension*, The Univ. of Chicago Press.

Knorr, W.R (1986). *Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhauser. (Repriented in 1993).

Mahoney, M.S. (1973). *The Mathematical Career of Pierre de FERMAT*, Princeton Univ. Press.

Mueller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements.* The M.I.T. Press.

Szabo, A. (1977). “Zum Problem der sogenaunten Geometrischen Algebra in Euklids Elementen” in *Y. Maeyama und W.G. Seltzer (Hers): 11PIIMATA. Naturwissenschafs-geschichtliche Studien.* Franz Steiner Verlag GmbH. pp. 373-393.

Unguru, S. (1974). “On the need to rewrite the history of Greek Mathematics.” *Proceedings of XIVth International Congress of the History of Science*. Science Council of Japan, No 2, 1974. Also: Unguru, S. “On the need to rewrite the history of Greek mathematics.” *Archive for history of exact sciences* 15(1). pp. 67-114.

__________. (1979). “History of Ancient Mathematics: Some Reflections on the State of the Art.” *ISIS*, 70 (No 254). pp. 555-565.

Unguru, S., D.E. Rowe. “Does the quadratic equation have Greek roots? A Study on “Geometric Algebra.” and “Application of Areas” and related problems.” *Libertas Mathematica*, 1, 1981 pp. 1-49 and 2, 1982 pp. 1-62.

Waerden, B. L. van der. (1985). *A history of algebra: From al-Khwarizmı to Emmy Noether*.

———— . (1976). “Defence of a “shocking” point of view.” *Archive for History of Exact Sciences*, 15(3). pp. 199-210.

———— . (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer.

Weil, André. (1978). “Who betrayed Euclid? (Extract from a letter to the editor).” *Archive for History of Exact Sciences*. 19(2). pp. 91-93.

Zeuthen, H. G. (1886). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. København: Höst & Sohn.