مدل جدید تحلیل پوششی داده‌ها برای تعیین کاراترین واحد تصمیم‌گیری با درنظرگرفتن داده‌های غیردقیق

بهلول ابراهیمی[۱]، مرتضی رحمانی[۲*]، مرتضی خاکزار بفروئی[۳]

۱. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع پژوهشکدهٔ توسعهٔ تکنولوژی جهاد دانشگاهی شریف

۲. دانشیار گروه پژوهشی مهندسی صنایع پژوهشکدهٔ توسعهٔ تکنولوژی جهاد دانشگاهی شریف و دانشیار دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه علم و فرهنگ

۳. استادیار گروه پژوهشی مهندسی صنایع پژوهشکدهٔ توسعهٔ تکنولوژی جهاد دانشگاهی شریف

(تاریخ دریافت ۹۲/۸/۱۲ ـ تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۴/۱/۲۹ ـ تاریخ تصویب ۹۴/۳/۱۸)

چکیده

سهرابی و نالچیگر (۱۳۸۹)، مدل نوین تحلیل پوششی داده‌ها را برای شناسایی کاراترین واحد تصمیم‌گیری (DMU) با داده‌های غیردقیق ارائه کردند. در این مقاله نشان داده می‌شود مدل ارائه‌شده لزوماً قادر به تعیین کاراترین DMU نیست و این مدل به‌طورتصادفی یکی از DMUهای کارا را، کاراترین معرفی می‌کند. همچنین ممکن است مدل ارائه‌شده برای تعیین کاراترین DMU در حالت بازده به مقیاس متغیر غیرممکن باشد. برای غلبه بر این مشکلات، مدل‌های ترکیبی جدیدی ارائه می‌شود. علاوه‌براین، برای تعیین و رتبه‌بندی سایر DMU های کارا، الگوریتمی پیشنهاد می‌شود. با به‌کارگیری مدل ارائه‌شده در این پژوهش، فرد تصمیم‌گیرنده می‌تواند کاراترین DMU را فقط با حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح پیدا کند. کاربرد مدل پیشنهادی با درنظرگرفتن داده‌های غیردقیق هجده تأمین‌کننده نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: انتخاب تأمین‌کننده، برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح، تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، داده‌های غیردقیق، کاراترین DMU.

مقدمه

چارنز، کوپر و رودز [۱] در سال ۱۹۷۸، روش تحلیل پوششی داده ها (DEA)[۱] را برای محاسبهٔ کارایی واحدهای تصمیم‌گیری[۲] مشابه با چندین ورودی و خروجی ارائه کردند که به مدل CCR معروف شده است. پس از آن بنکر، چارنز و کوپر [۲] در سال ۱۹۸۴ مدل BCC را ارائه دادند. این روش‌ها اساس روش‌های غیرپارامتری شدند و تحلیل پوششی داده‌ها نامیده شدند. این مدل‌ها به‌سرعت توسعه یافته‌اند و تاکنون مقاله‌های بسیار زیادی در این زمینه به‌چاپ رسیده‌اند که هدف عمدهٔ آن‌ها محاسبهٔ کارایی نسبی[۳] DMU ها با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است. شایان ذکر است مدل CCR حالت بازده به مقیاس ثابت[۴] و مدل BCC حالت بازده به مقیاس متغیر[۵] است.

در بسیاری از کاربردهای عملی روش DEA، از جمله مسئلهٔ ارزیابی و انتخاب تأمین کنندگان[۶] در زنجیرهٔ تأمین، باید «کاراترین DMU»[۷] مشخص شود. در این زمینه، مدل DEA قدرت تفکیک پذیری کافی ندارد؛ یعنی در ارزیابی DMU ها با این مدل، تعداد زیادی از DMU ها کارا شناخته می‌شوند. این حالت مخصوصاً زمانی رخ می‌دهد که تعداد DMU ها در مقایسه با تعداد کل معیارهای ارزیابی (ورودی‌ها و خروجی‌ها) کافی نباشد. برای افزایش قدرت تفکیک پذیری مدل DEA، به‌منظور تشخیص کاراترین DMU، روش های مختلفی ارائه شده است. از جمله مهم ترین این روش‌ها می‌توان به روش Super Efficiency [۳]، Cross-Efficiency [۴] و اعمال محدودیت های وزنی [۵] اشاره کرد. به تازگی مدل‌های ترکیبی نیز برای تعیین کاراترین DMU ارائه شده است که در اینجا مهم‌ترین آن‌ها را توضیح می‌دهیم.

امین و طلوع [۶]، مدل ترکیبی را برای افزایش قدرت تفکیک‌پذیری روش DEA ارائه کردند. آن‌ها ادعا کردند این

* نویسندهٔ مسئول: Email: rahmanimr@jdsharif.ac.ir

مدل کاراترین DMU را فقط با حل یک برنامه ریزی خطی عدد صحیح پیدا می‌کند. شایان ذکر است در مدل اولیهٔ DEA برای به‌دست‌آوردن کاراترین DMU، باید حداقل به تعداد DMU ها مدل برنامه ریزی خطی نوشته و حل شود. همچنین مدل اولیهٔ DEA در اکثر مواقع قادر به تعیین کاراترین DMU نیست. امین [۷] نشان داد مدل ارائه‌شده در [۶] لزوماً قادر به تعیین کاراترین DMU نیست و ممکن است چند DMU را کارا مشخص کند. درادامه، وی برای تعیین کاراترین DMU یک برنامه‌ریزی غیرخطی[۸] ارائه کرد. طلوع و نالچیگر [۸] مدل ارائه شده در [۶] را به حالت بازده به مقیاس متغیر (BCC) گسترش دادند. فروغی [۹] نشان داد مدل ارائه‌شده در [۷] ممکن است گاهی نشدنی باشد. وی برای رفع این مشکل و تعیین کاراترین DMU یک برنامه ریزی خطی عدد صحیح ارائه کرد. طلوع [۱۰] با بیان برخی از مشکلات مدل [۸]، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح برای تعیین کاراترین DMU در حالت بازده به مقیاس متغیر ارائه داد. وانگ و جیانگ [۱۱] نشان دادند بسیاری از محدودیت های مدل ارائه‌شده در [۹] زائد[۹] هستند. همچنین آن‌ها ادعا کردند این مدل از داده‌های نویز[۱۰] تأثیر می‌گیرد؛ بنابراین، ممکن است کاراترین DMU را درست تعیین نکند. درادامه، آن ها سه مدل مختلف برای تعیین کاراترین DMU در حالت های بازده به مقیاس ثابت، بازده به مقیاس افزایشی و بازده به مقیاس کاهشی ارائه کردند. فروغی [۱۲] با بیان برخی از مشکلات مدل های قبلی، در مرحلهٔ اول، الگوریتمی برای تعیین تمام DMU های کارا در مدل [۶] ارائه کرد؛ همچنین در مرحلهٔ دوم، برای تعیین کاراترین DMU از بین DMU های کارای مشخص‌شده در مرحلهٔ اول، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح ارائه کرد.

بنابر فرض مدل DEA، مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها باید دقیق معلوم باشند، اما در دنیای واقعی مقادیر داده‌های ورودی و خروجی واحدهای ارزیابی برای همیشه دقیق نیستند و در موارد بسیاری مانند مسئلهٔ انتخاب تأمین‌کننده، نمی‌توانیم مقادیر واقعی و دقیق داده‌ها را اندازه‌گیری کنیم. به‌عبارت دیگر، ممکن است چندین گزینه به عنوان مقدار اصلی برای یک داده درنظر گرفته شود یا ممکن است معیارهای کیفی برای داده‌های یک مسئله مطرح شود. بر این اساس، کوپر و همکاران [۱۳] اولین بار اصطلاح داده‌های غیردقیق[۱۱] را مطرح کردند که شامل داده‌های بازه‌ای[۱۲] و داده‌های ترتیبی ضعیف[۱۳] بود. مدل DEA حاصل، DEA نادقیق یا IDEA[۱۴] نامیده شد.

به تازگی سهرابی و نالچیگر [۱۴] مدل هایی برای تعیین کاراترین DMU با درنظرگرفتن داده‌های غیردقیق برای حالت‌های بازده به مقیاس ثابت و متغیر ارائه کرده‌اند. در این پژوهش، مشکلات این مدل‌ها مطرح و برای رفع آن‌ها مدل‌های جدیدی ارائه می‌شود.

شایان ذکر است روش DEA در زمینه‌های عملی متفاوت به‌کار رفته است. محبعلی‌زاده و فائز [۱۵] مدلی چندهدفه با استفاده از DEA برای ارزیابی و انتخاب تأمین کنندگان در زنجیرهٔ تأمین ارائه کردند. قادری و همکاران [۱۶] عملکرد منابع انسانی را با استفاده از DEA ارزیابی کردند. آن‌ها برای درنظرگرفتن معیارهای کیفی از DEA فازی بهره جستند. اجلی و صفری [۱۷] از DEA برای ارزیابی عملکرد ۲۳ شرکت گاز استانی استفاده کردند. آن‌ها برای افزایش قدرت تفکیک‌پذیری مدل DEA، یک مدل ترکیبی با استفاده از شبکهٔ عصبی ارائه کردند. نجفی و منصوری [۱۸]، از روش DEA برای تعیین سهام برتر در بین ۲۲ گروه صنعت موجود در بورس اوراق بهادار تهران استفاده کردند. رضائیان و عسگری‌نژاد [۱۹] روش DEA را برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های آب و فاضلاب استان مازندران به کار بردند و برای تفکیک بین واحدهای کارا از شبکهٔ عصبی استفاده کردند.

در بخش بعدی، مدل‌های سهرابی و نالچیگر و مشکلات آن‌ها بیان می‌شود. درادامه، مدل های جدیدی برای غلبه بر این مشکلات ارائه می‌شود. مثال‌های عددی و نتیجه‌گیری را در بخش‌های بعدی مشاهده می‌کنیم.

مشکلات مدل سهرابی و نالچیگر

در سال ۱۳۸۹، سهرابی و نالچیگر [۱۴] مدلی ترکیبی را برای تعیین کاراترین واحد تصمیم‌گیری (DMU) به‌صورت زیر ارائه کردند.

$$
\begin{aligned}
& M^* = Min \quad M \\
& s.t. \quad M - d_j \ge 0; \quad j=1,\dots,k \\
& \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \le 1; \quad j=1,\dots,k \\
& \sum_{r=1}^{m} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} + d_j - \beta_j = 0; \ j=1,\dots,k \\
& \sum_{j=1}^{k} d_j = k-1 \\
& 0 \le \beta_j \le 1, \quad d_j \in \{0,1\}; \quad j=1,\dots,k \\
& (x_{ij}) \in \theta_i^-; \quad (y_{rj}) \in \theta_r^+ \\
& u_r, v_i \ge \varepsilon; \quad \forall r,i
\end{aligned} \tag{۱}
$$

که در آن $u=(u_1,u_2,\dots,u_m)$ و $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ به ترتیب وزن (اهمیت) ورودی‌ها و خروجی‌هاست. ε عددی مثبت و کوچک غیرارشمیدسی[۱۵] است. d متغیر انحرافی واحد j- ام و M ماکزیمم مقدار ناکارایی است که باید مینیمم شود. β_j به‌دلیل گسسته‌بودن d_j درنظر گرفته شده است. $(x_{ij}) \in \theta_i^-$ و $(y_{rj}) \in \theta_r^+$ همه یا بخشی از داده های غیردقیق به شکل رابطه‌های ۲ تا ۴ هستند. اصطلاح داده های غیردقیق حالت‌هایی را نشان می‌دهد که در آن داده ها در بازه‌ای با کران های مشخص قرار دارند یا نسبت به هم اولویت ویژه ای دارند. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه می‌توان به [۲۰] مراجعه کرد.

- داده‌های کراندار یا بازه‌ای[۱۶]

$$
\begin{aligned}
& \underline{x}_{ij} \le x_{ij} \le \bar{x}_{ij} \qquad (i \in BI) \\
& \underline{y}_{rj} \le y_{rj} \le \bar{y}_{rj} \qquad (i \in BO)
\end{aligned} \tag{۲}
$$

که در آن $\underline{x}_{ij}$ و $\underline{y}_{rj}$ کران‌های پایین و $\bar{x}_{ij}$ و $\bar{y}_{rj}$ و کران های بالا هستند و BI و BO به‌ترتیب دربردارندهٔ داده های کراندار برای ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. مقادیر کران های بالا و پایین در داده های کراندار معلوم و نامنفی هستند و مقادیر اصلی ورودی‌ها و خروجی‌ها نامعلوم اند و در این کران قرار دارند.

- داده‌های ترتیبی ضعیف

$$
\begin{aligned}
& x_{i1} \le x_{i2} \le \dots \le x_{in} \qquad (i \in DI) \\
& y_{r1} \le y_{r2} \le \dots \le y_{rn} \qquad (i \in DO)
\end{aligned} \tag{۳}
$$

که در آن DI و DO به‌ترتیب دربردارندهٔ داده های ترتیبی ضعیف برای ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند. در این نوع از داده‌های نادقیق، فقط اولویت ویژه‌ای بین ورودی‌ها یا خروجی‌ها برقرار است و مقدار واقعی داده‌ها معلوم نیست.

- داده‌های کسری کراندار[۱۷]

$$
\begin{aligned}
& G_{ij} \le \frac{x_{ij}}{x_{io}} \le H_{ij} \\
& L_{rj} \le \frac{y_{rj}}{y_{ro}} \le U_{rj}
\end{aligned} \tag{۴}
$$

که در آن H_{ij} و U_{rj} کران‌های بالا و G_{ij} و L_{rj} کران‌های پایین هستند. مقادیر کران‌های بالا و پایین در داده‌های کسری کراندار معلوم و نامنفی هستند و نسبت دو خروجی یا نسبت دو ورودی نامعلوم است و بین کران‌های بالا و پایین قرار دارند.

به‌وضوح مدل ۱ غیرخطی[۱۸] و غیرمحدب[۱۹] است. سهرابی و نالچیگر با استفاده از تغییر متغیر پیشنهادشده در [۲۰]، (رابطهٔ ۵) این مدل را به صورت زیر به یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح (مدل ۶) تبدیل کردند.

$$
\begin{aligned}
& X_{ij} = v_i x_{ij} \qquad \forall i,j \\
& Y_{rj} = u_r y_{rj} \qquad \forall r,j
\end{aligned} \tag{۵}
$$

$$
\begin{aligned}
& M^* = Min \quad M \\
& s.t. \\
& \quad M - d_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,k \\
& \quad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \le 1 \qquad j=1,\dots,k \\
& \quad \sum_{r=1}^{m} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + d_j - \beta_j = 0, \quad j=1,\dots,k \\
& \quad \sum_{j=1}^{k} d_j = k-1 \\
& \quad 0 \le \beta_j \le 1; \quad d_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\dots,k \\
& \quad X_{ij} \in \tilde{D}_i^-; \ Y_{rj} \in \tilde{D}_r^+; \ X_{ij} \ge \varepsilon^*; Y_{rj} \ge \varepsilon^*, \forall i,j,r
\end{aligned} \tag{۶}
$$

که در آن $\tilde{D}_i^-$ و $\tilde{D}_r^+$ به‌ترتیب تبدیل‌شده θ_i^- و θ_r^+ تحت تغییر متغیر (۵) هستند. طبق این تغییر متغیر برای داده‌های غیردقیق و دقیق داریم:

- داده‌های بازه‌ای یا کراندار:

- $v_i \underline{x}_{ij} \le X_{ij} \le v_i \bar{x}_{ij}$ و
$u_r \underline{y}_{rj} \le Y_{rj} \le u_r \bar{y}_{rj}$

- داده‌های ترتیبی:
  - $Y_{rj} \le Y_{rk}, \forall j \ne k$ و $X_{ij} \le X_{ik}, \forall j \ne k$
  - برای بعضی از مقادیر i و r
- داده‌های کسری کراندار:
  - $G_{ij} \le \frac{X_{ij}}{X_{ij_o}} \le H_{ij}$ و $L_{rj} \le \frac{Y_{rj}}{Y_{rj_o}} \le U_{rj}\ , j \ne j_o$
- داده‌های دقیق:
  - $Y_{rj} = u_r \hat{y}_{rj}$ و $X_{ij} = v_i \hat{x}_{ij}$، که در آن $\hat{y}_{rj}$ و $\hat{x}_{ij}$ داده‌های دقیق‌اند.

آن‌ها برای تعیین ماکزیمم مقدار ε^* مدل برنامه ریـزی خطی زیر را ارائه کردند:

(۷)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^* = \max \quad \varepsilon \\
&s.t. \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \le 1; \quad j = 1,\dots,k \\
&\quad \sum_{r=1}^{m} Y_{rj} - \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \le 0; \; j = 1,\dots,k \\
&\quad X_{ij} \in \widetilde{D}_i^-; \quad Y_{rj} \in \widetilde{D}_r^+ \quad ; \quad \forall i, j, r \\
&\quad X_{ij} - \varepsilon \ge 0; \; Y_{rj} - \varepsilon \ge 0, \quad \forall i, j, r
\end{aligned}
$$

شایان ذکر است به کارگیری ماکزیمم مقدار ε^* موجب افزایش قدرت تفکیک‌پذیری مـدل DEA در تعیـین DMU های کارا می‌شود.

سهرابی و نـالچیگر ادعـا کردنـد بـا حـل مـدل ۶، فـرد تصمیم‌گیرنده می‌تواند کـاراترین DMU را شناسـایی کنـد. به‌عبارت دیگر، آن‌ها ادعا کردند در جواب بهینهٔ ایـن مـدل، DMU_p کاراترین واحد اسـت، اگـر $d_p^* = 0$. بـا توجـه بـه محدودیت $\sum_{j=1}^{k} d_j = k-1$ و اینکه d_jها متغیرهایی از نوع صفر و یـک[20] هسـتند؛ در جـواب بهینـه فقـط بـرای یـک داریم:

$$d_p^* = 0 \qquad p \in \{1,2,\dots,k\}$$

جواب بهینهٔ مدل (۶) همواره برابر یـک اسـت $(M^* = 1)$، زیرا در جواب بهینهٔ مقادیر تمامی d_j ها برابـر یـک اسـت و فقط مقدار یکی از آن‌ها برابر صفر است. به عبارت دیگر، هر جواب شدنی این مدل یک جواب بهینه است. درنتیجه، این مدل به‌طور تصادفی یکی از جواب‌های شـدنی را بـه‌عنـوان جـواب بهینـه انتخـاب مـی‌کنـد. درصـورتی‌کـه ایـن مـدل جواب‌های شدنی مختلفی با مقـادیر مختلـف d_j هـا داشـته باشد، با توجه به نوع نرم‌افزاری که مدل با آن حل می‌شود، جواب‌های بهینهٔ مختلفی به‌دست می‌آید و بـه‌تبـع آن ایـن مدل DMU هـای مختلفـی را کـاراترین معرفـی مـی‌کنـد. شـایان ذکـر اسـت کـه در روش تحلیـل پوششـی داده‌هـا، DMU_p یک واحد کاراست اگر و تنها اگـر وزن‌هـای مثبـت $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ و $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ طـــــــوری موجود باشد که به‌ازای این وزن‌ها، کارایی DMU_p از کارایی بقیه واحدهای تصمیم‌گیری بیشتر $(\ge)$ باشد. با توجـه بـه محدودیت های نوع سوم مدل ۶ مشخص اسـت کـه میـزان انحراف از کارایی DMU_j برابر است با $d_j - \beta_j$. سهرابی و نالچیگر به اشتباه متغیـر از نـوع صـفر و یـک d_j را میـزان انحراف از کارایی DMU_j فرض کرده‌اند.

همچنین ممکن است با حل این مدل چند واحـد کـارا به‌دست آید؛ برای مثال، فرض کنیـد در جـواب بهینـهٔ ایـن مدل داشته باشیم: $d_j^* = \beta_j^* = 0 \,\&\, d_p^* = \beta_p^* = 1$ که در آن $j, p \in \{1,2,\dots,k\} \,\&\, j \ne p$ ، در ایـــن‌صـــورت واضـــح است مـدل ۶ ، هـم DMU_j و هـم DMU_p را کـارا معرفـی مـی‌کنـد و نمـی‌توانـد کـاراترین DMU را تعیـین کنـد. درصـورتی‌کـه در جـواب بهینـهٔ ایـن مـدل داشـته باشـیم $d_p^* = 0 \,\&\, \beta_p^* > 0$، امتیاز کـارایی DMU_p بیشـتر از یـک است و امتیاز کارایی بقیهٔ واحدها حداکثر برابر یـک اسـت؛ بنابراین، به وضوح DMU_p یـک واحـد کاراسـت. بـه‌عبـارت دیگر، ایـن واحـد سـوپرکـارا[21] اسـت. بـا توجـه بـه مـوارد بیان شده، در حالت کلی مدل ۶ نمی‌توانـد کـاراترین واحـد تصمیم‌گیری را تعیین کند.

مدل ۶ حالت بازده به مقیـاس ثابـت اسـت. سـهرابی و نالچیگر برای تعیـین کـاراترین DMU در حالـت بـازده بـه مقیاس متغیر مدل زیر را پیشنهاد کردند:

برای تعیین و رتبه‌بندی سایر واحدهای کارا که با مدل ۱۰ به‌دست می‌آید، الگوریتم زیر پیشنهاد می‌شود:

مرحلۀ صفر: قرار دهید: $T=\{p\}$، $\mathrm{DMU_p}$ کاراترین واحد تصمیم‌گیری است که با حل مدل ۱۰ به‌دست آمده است.

مرحلۀ نخست: مدل ۱۰ را با اضافه‌کردن محدودیت های جدید $d_j=1,\ \forall j\in T$ حل کنید، فرض کنید در جواب بهینه داشته باشیم: $d_l^*=0$.

مرحلۀ دوم: قرار دهید: $T=T\cup\{l\}$.

مرحلۀ سوم: اگر مدل ۱۰ با اضافه‌کردن محدودیت های جدید $d_j=1,\ \forall j\in T$ شدنی است به مرحلۀ ۱ بروید. در غیراین‌صورت T مجموعه واحدهای کاراست که با حل مدل ۱۰ به‌دست می‌آید.

در مرحلۀ اول این الگوریتم دومین واحد کارا به‌دست می‌آید (درصورتی‌که چنین واحدی موجود باشد). در هر مرحله از الگوریتم واحد کارایی که در تکرار قبلی به دست آمده است کنار گذاشته می‌شود تا واحد کارای دیگر به دست آید. درحقیقت، واحدهای تصمیم گیری با توجه به مقدار M^* رتبه‌بندی می‌شوند.

با توجه به اینکه میزان ناکارایی مطابق مدل ارائه‌شده (مدل ۱۰)، برابر $d_j-\beta_j$ است، برای مقدار بیشتر M مقدار β_j نیز بیشتر است و درنتیجه مقدار $d_j-\beta_j$ کمتر خواهد بود. درنتیجه، واحدی که در اولین تکرار الگوریتم به دست می‌آید دارای دومین رتبه و واحدی که در آخرین تکرار الگوریتم به دست می‌آید دارای پایین ترین رتبه است. در بخش بعدی، کاربرد مدل و الگوریتم ارائه‌شده با مثال عددی توضیح داده می‌شود. مدل ۱۰ برای حالت بازده به مقیاس ثابت است. برای تعیین کاراترین DMU در حالت بازده به مقیاس متغیر مدل زیر پیشنهاد می‌شود:

(۱۱)

$$
\begin{aligned}
& M^*=Max\quad M\\
& s.t.\\
& \quad M\le\beta_j \qquad j=1,\dots,k\\
& \quad \sum_{i=1}^{n}X_{ij}\le 1 \qquad j=1,\dots,k\\
& \quad \sum_{r=1}^{m}Y_{rj}-u_0-\sum_{i=1}^{n}X_{ij}+d_j-\beta_j=0,\quad j=1,\dots,k\\
& \quad \sum_{j=1}^{k}d_j=k-1\\
& \quad 0\le\beta_j\le 1;\quad d_j\in\{0,1\}\qquad j=1,\dots,k\\
& \quad X_{ij}\in\tilde{D}_i^-;Y_{rj}\in\tilde{D}_r^+;X_{ij}\ge\varepsilon_1^*;Y_{rj}\ge\varepsilon_1^*,\forall i,j,r
\end{aligned}
$$

برای تعیین ماکزیمم مقدار ε_1^* مدل برنامه‌ریزی خطی زیر پیشنهاد می‌شود:

(۱۲)

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon_1^*=Max\ \varepsilon\\
& s.t.\\
& \quad \sum_{i=1}^{n}X_{ij}\le 1 \qquad j=1,\dots,k\\
& \quad \sum_{r=1}^{m}Y_{rj}-u_0-\sum_{i=1}^{n}X_{ij}+d_j-\beta_j=0,\ j=1,\dots,k\\
& \quad \sum_{j=1}^{k}d_j=k-1\\
& 0\le\beta_j\le 1;\quad d_j\in\{0,1\}\qquad j=1,\dots,k\\
& X_{ij}\in\tilde{D}_i^-;\ Y_{rj}\in\tilde{D}_r^+;X_{ij}\ge\varepsilon;Y_{rj}\ge\varepsilon,\forall i,j,r
\end{aligned}
$$

در لم زیر نشان داده می‌شود که مدل ۱۱ برخلاف مدل ۸ همواره شدنی است.

لم: مدل ۱۱ همواره شدنی است.

برهان: به‌وضوح مدل ۱۲ همواره شدنی است و دارای جواب بهینۀ متناهی است. فرض کنید $(\varepsilon_1^*,v^*,u^*,d^*,\beta^*,u_0^*)$ جواب بهینۀ مدل ۱۲ باشد. دراین‌صورت، جواب زیر به‌وضوح یک جواب شدنی برای مدل ۱۱ است:

$$
\begin{aligned}
& (M,v,u,d,\beta,u_0)=\\
& (\min\{\beta_1^*,\beta_2^*,\dots,\beta_k^*\},v^*,u^*,d^*,\beta^*,u_0^*)
\end{aligned}
$$

با استفاده از مدل ۱۱ در الگوریتم ارائه شده در این بخش، می توان بقیۀ واحدهای تصمیم‌گیری کارا را در حالت بازده به مقیاس متغیر پیدا و رتبه‌بندی کرد.

مثال عددی

در این بخش، دو مثال ارائه می‌شود. مثال اول نشان می‌دهد که ممکن است مدل ۸ شدنی نباشد. مثال دوم کاربرد و سودمندی روش ارائه‌شده در این پژوهش را نشان می‌دهد.

مثال اول: چهار واحد تصمیم‌گیری را مطابق جدول ۱ درنظر بگیرید (ورودی‌ها از نوع داده‌های دقیق و خروجی‌ها از نوع داده‌های بازه‌ای هستند):

جدول ۱. اطلاعات چهار واحد تصمیم‌گیری

شمارهٔ DMU	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی
۱	۲	۲	[۱,۲]
۲	۳	۲	[۱,۳]
۳	۱	۳	[۲,۳]
۴	۱	۱	[۲۴,۲۵]

با حل مدل ۹، برای این داده ها داریم: $\varepsilon^* = 0.2$. مدل ۸ با $\varepsilon^* = 0.2$ نشدنی است؛ بنابراین، این مدل قادر به تشخیص کاراترین واحد تصمیم‌گیری نیست. واضح است واحد ۴، کاراترین واحد تصمیم‌گیری است.

با حل مدل ۱۲، داریم $\varepsilon_1^* = 0.145$. با به‌کارگیری این مقدار جواب بهینهٔ مدل ۱۱ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:
(۱۳)

$$M^* = 0.625\times 10^{-2};\ d_j^* = \begin{cases} 0 & j=4 \\ 1 & j\neq 4 \end{cases}$$

$$v_1^* = 0.145, v_2^* = 0.181, u_1^* = 0.072, u_0^* = 0.414$$

همان‌طورکه انتظار می‌رود، جواب بهینه نتیجه می‌دهد که DMU_4 کاراترین واحد تصمیم گیری است. مدل ۱۱ با اضافه‌کردن محدودیت $d_4 = 1$ نشدنی است؛ یعنی واحد کارای دیگری وجود ندارد.

مثال دوم: داده‌ های این مثال (مطابق پژوهش [۲۱]) اطلاعات هجده تأمین کننده را دربردارد. این داده ها (جدول ۲) در پژوهش سهرابی و نالچیگر نیز استفاده شده است. برای هرکدام از تأمین‌کنندگان دو معیار ورودی و یک معیار خروجی درنظر گرفته شده است. ورودی‌ها عبارت‌اند از: از هزینه ارسال کالا[۲۳]- که اطلاعات آن دقیق است- و شهرت تامین‌کننده[۲۴]- که یک معیار کیفی است و اطلاعات آن به‌صورت ترتیبی است. تعداد صورت‌حساب‌های دریافتی بدون خطا[۲۵] نیز به‌عنوان معیار خروجی درنظر گرفته شده است که اطلاعات مربوط به آن غیردقیق و بازه‌ای است.

معادله‌های مربوط به ورودی‌ها و خروجی عبارت‌اند از:

- هزینهٔ ارسال کالا (داده‌های دقیق)

$$\theta_1^- = \{x_{11} = 253; x_{12} = 268; x_{13} = 259; \ldots; x_{1,18} = 216\}$$

- شهرت تأمین‌کننده (داده‌های ترتیبی)

$$\theta_2^- = \{x_{2,18} \geq x_{2,16} \geq \ldots \geq x_{2,17}\}$$

- وضعیت تعداد صورت‌حساب‌ های بدون خطا (داده‌های بازه‌ای)

$$\theta_1^+ = \{50 \leq y_{11} \leq 65;\ 60 \leq y_{12} \leq 70; \ldots; 90 \leq y_{1,18} \leq 150\}$$

با استفاده از تغییر متغیر ذکرشده در رابطهٔ ۵، θ_1^-، θ_2^- و θ_1^+ به‌ترتیب به‌صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\tilde{D}_1^- = \{X_{11} = 253v_1; X_{12} = 268v_1; X_{13} = 259v_1; \ldots; X_{1,18} = 216v_1\}$$

$$\tilde{D}_2^- = \{X_{2,18} \geq X_{2,16} \geq \ldots \geq X_{2,17}\}$$

$$\tilde{D}_1^+ = \{50u_1 \leq Y_{11} \leq 65u_1; 60u_1 \leq Y_{12} \leq 70u_1; \ldots; 90u_1 \leq Y_{1,18} \leq 150u_1\}$$

با حل مدل ۷، داریم $\varepsilon^* = 0.1971522$. سهرابی و نالچیگر مدل ۶ را برای داده‌های جدول ۲ به‌کار بردند و تأمین‌کنندهٔ ۴ را به‌عنوان بهترین تأمین‌کننده معرفی کردند.

ممکن است حل این مدل با نرم‌افزارهای دیگر جواب‌های متفاوتی داشته باشد، اما حل آن با مدل ارائه‌شده در این پژوهش (مدل ۱۰) برای تعیین کاراترین تأمین‌کننده جواب بهینهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

$M^* = \beta_{11}^* = 0.4454$ و $d_{11}^* = 0$

این جواب نشان می‌دهد تأمین کنندهٔ ۱۱، کاراترین تأمین‌کننده است. با اضافه‌کردن محدودیت $d_{11} = 1$ به مدل ۱۰ و حل دوبارهٔ آن داریم:

$M^* = \beta_{14}^* = 0.3352$ و $d_{14}^* = 0$

جدول ۲. اطلاعات مربوط به هجده تأمین‌کننده

شمارهٔ تأمین‌کننده	ورودی‌ها		خروجی
	هزینهٔ ارسال کالا ($TC\ x_{1j}$)	شهرت تأمین‌کننده* ($SR\ x_{2j}$)	تعداد صورت‌حساب بدون مشکل ($NB\ y_{1j}$)
۱	۲۵۳	۵	[۵۰، ۶۵]
۲	۲۶۸	۱۰	[۶۰، ۷۰]
۳	۲۵۹	۳	[۴۰، ۵۰]
۴	۱۸۰	۶	[۱۰۰، ۱۶۰]
۵	۲۵۷	۴	[۴۵، ۵۵]
۶	۲۴۸	۲	[۸۵، ۱۱۵]
۷	۲۷۲	۸	[۷۰، ۹۵]
۸	۳۳۰	۱۱	[۱۰۰، ۱۸۰]
۹	۳۲۷	۹	[۹۰، ۱۲۰]
۱۰	۳۳۰	۷	[۵۰، ۸۰]
۱۱	۳۲۱	۱۶	[۲۵۰، ۳۰۰]
۱۲	۳۲۹	۱۴	[۱۰۰، ۱۵۰]
۱۳	۲۸۱	۱۵	[۸۰، ۱۲۰]
۱۴	۳۰۹	۱۳	[۲۰۰، ۳۵۰]
۱۵	۲۹۱	۱۲	[۴۰، ۵۵]
۱۶	۳۳۴	۱۷	[۷۵، ۸۵]
۱۷	۲۴۹	۱	[۹۰، ۱۸۰]
۱۸	۲۱۶	۱۸	[۹۰، ۱۵۰]

* بالاترین شهرت: ۱۸ و کمترین شهرت: ۱

با توجه به کاهش مقدار بهینهٔ M^*، نتیجه می گیریم تأمین‌کنندهٔ ۱۴ دومین تأمین‌کنندهٔ کاراست. نتیجهٔ به‌کارگیری الگوریتم ارائه‌شده در بخش قبل برای تعیین و رتبه‌بندی سایر تأمین‌کنندگان کارا در جدول ۳ آورده می‌شود. همان‌طورکه در این جدول مشخص است، تأمین کنندهٔ ۴ یکی از تأمین کنندگان کاراست که مدل سهرابی و نالچیگر آن را به‌اشتباه به‌عنوان کاراترین تأمین‌کننده معرفی کرده است. رتبهٔ این تأمین‌کننده بین تأمین‌کنندگان کارا ۴ است.

جدول ۳. رتبه‌بندی تأمین‌کنندگان کارا

M^*	رتبه	شمارهٔ تأمین‌کنندهٔ کارا
۰/۴۴۵۴	۱	۱۱
۰/۳۳۵۲	۲	۱۴
۰/۲۳۹۹	۳	۱۷
۰/۲۳۹۶	۴	۴
۰/۱۵۱۲	۵	۸

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل های نوین تحلیل پوششی داده های سهرابی و نالچیگر (۱۳۸۹) برای تعیین کاراترین DMU در حالت بازده به مقیاس ثابت و متغیر و با درنظرگرفتن داده‌های غیردقیق بررسی شدند. نتایج نشان داد مدل ارائه‌شده در حالت بازده به مقیاس ثابت قادر به تعیین کاراترین واحد تصمیم گیری نیست و این مدل به‌طور تصادفی یکی از DMU های کارا را به‌عنوان کاراترین DMU انتخاب می کند. همچنین این مدل ممکن است بیش از یک واحد را کارا معرفی کند. مدل ارائه‌شده برای تعیین کاراترین DMU در حالت بازده به مقیاس متغیر، علاوه بر مشکلات بالا، ممکن است نشدنی باشد.

برای رفع مشکلات مذکور، مدل‌های ترکیبی جدیدی برای تعیین کاراترین DMU در هر دو حالت بازده به مقیاس ثابت و متغیر ارائه شد. اثبات شد مدل ارائه شده در حالت بازده به مقیاس متغیر همواره شدنی است. برای تعیین و رتبه‌بندی سایر تأمین‌کنندگان کارا در دو حالت بازده به مقیاس ثابت و متغیر، الگوریتم جدید ارائه شد.

مدل ارائه شده برای تعیین کاراترین تأمین کننده از بین ۱۸ تأمین‌کننده با داده‌های غیردقیق استفاده شد و تأمین‌کنندهٔ ۱۱ به‌عنوان کاراترین تأمین‌کننده انتخاب شد. مدل سهرابی و نالچیگر تأمین‌کنندهٔ ۴ را به‌اشتباه، کاراترین تأمین‌کننده مشخص کرده بود. با الگوریتم ارائه‌شده مشخص شد این تامین کنندهٔ کارا، رتبهٔ چهارم را بعد از تأمین‌کنندگان کارای ۱۱، ۱۴ و ۱۷ دارد؛ بنابراین، تأمین‌کنندهٔ ۴ کاراترین تأمین‌کننده نیست.

مراجع

1. Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978). “Measuring the efficiency of decision-making units.” *European J. of Operational Research*, 2, 429–444.
2. Banker, R. D., Charnes, A. and Cooper, W. W. (1984). “Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis.” *Management Science*, 30, 1078–1092.
3. Andersen, P. and Petersen, N.C. (1993). “A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis.” *Management Science*, 39, 1261–1294.
4. Sexton, T.R., Silkman, R.H. and Hogan, A.J. (1986). “Data envelopment analysis: critique and extensions, in: R.H. Silkman (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis.” *Jossey-Bass, San Francisco*, CA, 73–105.
5. Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G. and Thanassoulis, E. (1997). “Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: evolution, development and future directions.” *Annals of Operations Research*, 13–34.
6. Amin, G.R. and Toloo, M. (2007). “Finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model.” *Computers & Industrial Engineering*, 52(2), 71–77.
7. Amin, G.R. (2009). “Comments on finding the most efficient DMUs in DEA: An improved integrated model.” *Computers & Industrial Engineering*, 56, 1701–1702.
8. Toloo, M. and Nalchigar, S. (2009). “A new integrated DEA model for finding most BCC-efficient DMU.” *Applied Mathematical Modelling*, 33, 597–604.
9. Foroughi, A.A. (2011). “A new mixed integer linear model for selecting the best decision making units in data envelopment analysis.” *Computers & Industrial Engineering*, 60, 550–554.
10. Toloo, M. (2012). “On finding the most BCC-efficient DMU: A new integrated MIP–DEA model.” *Applied Mathematical Modelling*, 36, 5515–5520.
11. Wang, Y.M. and Jiang, P. (2012). “Alternative mixed integer linear programming models for identifying the most efficient decision making unit in data envelopment analysis.” *Computers & Industrial Engineering*, 62, 546–553.
12. Foroughi, A.A. (2013). “A revised and generalized model with improved discrimination for finding most efficient DMUs in DEA.” *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4067–4074.
13. Cooper, W.W., Park, K.S. and Yu, G. (1999). “IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA.” *Management Science*, 45, 597–607.
14. Sohrabi, B. and Nalchigar, S. (2010). “A new DEA model for finding most efficient DMU with imprecise data.” *J. of Industrial Engineering*, 44 (1), 63-73.
15. Moheb Alizadeh, H. and Faez, F. (2009). “A Multi Objective Approach to Supplier Evaluation using Multiple Criteria Data Envelopment Analysis (MCDEA).” *J. of Industrial Engineering*, 43 (1), 67-82.
16. Ghaderi, S.F., Azadeh, M., Mirjalili, M. and Sheikhalishahi, M. (2010). “Assessment Human Resources of Banks Using DEA and Fuzzy DEA Approaches.” *J. of Industrial Engineering*, 44 (2), 213-228.
17. Ajalli, M. and Safari, H. (2011). “Analysis of the Technical Efficiency of the Decision Making Units Making Use of the Synthetic Model of Performance Predictor Neural Networks, and Data Envelopment Analysis (Case Study: Gas National Co. Of Iran).” *J. of Industrial Engineering*, 45 (1), 13-29.
18. Najafi, A.A. and Mansouri, S.M. (2013). “Portfolio Selection Problem with Eliminated Correlation between Indices Based on Fundamental Approach.” *J. of Industrial Engineering*, 47 (2), 229-240.
19. Rezaeian, J. and Asgarinezhad, A. (2014). “Performance Evaluation of Mazandaran Water and Wastewater by Data Envelopment Analysis and Artificial Neural Network.” *J. of Industrial Engineering*, 48 (2), 201-213.

20. Zhu, J. (2003). “Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application.” *European J. of Operational Research*, 144, 513–529.

21. Talluri, S. and Baker, R.C. (2002). “A multi-phase mathematical programming approach for effective supply chain design.” *European J. of Operational Research*, 141 (3), 544–558.

واژگان انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Data Envelopment Analysis (DEA)
2. Decision Making Units (DMUs)
3. Ratio Efficiency
4. Constant return to scale
5. Variable return to scale
6. Supplier evaluation and selection
7. The most efficient DMU
8. None Linear Programming (NLP)
9. Redundant
10. Outliers data
11. Imprecise data
12. Interval data
13. Weak ordinal data
14. Imprecise DEA
15. Non-Archimedean
16. Bounded Data
17. Bounded data ratio
18. Non-linear
19. Non-convex
20. Binary
21. Super-efficient
22. Infeasible
23. Total cost of shipments (TC)
24. Supplier reputation (SR)
25. Number of bills received from the supplier without errors (NB)