قطب الدین شیرازی، نیریزی و اصول موضوعه هندسه اقلیدس[۱]

فاطمه دوست قرین[۲]

چکیده

کتاب اصول اقلیدس با مقدمه ای شامل تعاریف، اصول موضوعه و علوم متعارفه (بدیهیات) آغاز شده است؛ پنج اصل موضوعه، در علم هندسه، توسط اقلیدس بدون هیچ‌گونه توضیح و استدلالی ارائه شده است؛ اما با توجه به اهمیت اصول موضوعه که پایه‌های اساسی برای اثبات قضایای هندسی هستند، بعضی از شارحان و مترجمان کتاب اصول اقلیدس برخی از اصول موضوعه را توضیح و بعضی دیگر را به گونه‌ای اثبات کرده‌اند. قطب الدین شیرازی و حاتم بن فضل نیریزی از جمله مترجمانی هستند که توضیح بعضی از اصول موضوعه و اثبات برخی دیگر را ضروری دانسته‌اند.
مقاله حاضر به مقایسه روش قطب الدین شیرازی و روش توسط فضل بن حاتم نیریزی، یکی از شارحان متقدم کتاب اصول اقلیدس، می‌پردازد.

کلیدواژه‌ها: اصول اقلیدس، اصول موضوعه، ترجمه اصول، فضل بن حاتم نیریزی، قطب الدین شیرازی، هندسه

مقدمه

کتاب اصول اقلیدس که گاهی آن را به نام مؤلفش "کتاب اقلیدس" نیز می‌نامند از کتب مهم دوره اسلامی در علم هندسه بوده است که دانشمندان مسلمان علاوه بر ترجمه آن، توضیحات مهم و مفیدی بر آن افزوده‌اند.

قطب الدین شیرازی (۶۳۴-۷۱۰ ق)، از مترجمان اصول اقلیدس است که ترجمهٔ خود را با توجه به ترجمهٔ حجاج بن یوسف بن مطر و اسحاق بن حنین (۲۸۹ق/ ۹۱۰م)

---

۱. دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۸/۲۴ - پذیرش نهایی:۱۳۹۲/۰۲/۲۳

۲. دکترای تاریخ و تمدن ملل اسلامی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران. رایانامه: Gharin.math@gmail.com

و تحریر اصول اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی(۵۹۷/ ۶۷۲ق) انجام داده است.[۱] وی به توضیح و یا اثبات اصول موضوعه، که متون مذکور فاقد آن است، پرداخته است؛ بنابراین توضیحات و راه حل‌های ارائه شده مورد توجه نگارنده قرار گرفت تا با مقایسهٔ آن با توضیحات حداقل یکی از شارحان متقدم اصول اقلیدس، بتوان به نحوهٔ نگرش ایشان به اصول موضوعه پی برد. از میان دانشمندان پیشگام، فضل بن حاتم نیریزی است که در نیمه قرن سوم و اوایل قرن چهارم هجری می‌زیسته و در سال ۳۱۰ هجری وفات یافته است (ابن ندیم، ص۳۸۹). وی یکی از نخستین ریاضی‌دانان دوره اسلامی بود که شرحی بر حداقل ده مقاله اول اصول نوشت. او شرح خود را بر ترجمه اصول اقلیدس حجاج بن یوسف مطر نوشته که از نظر تاریخ ریاضیات اسلامی و یونانی بسیار مهم است زیرا در آن قسمت‌هایی از شرح اصول هرون اسکندرانی[۲] (قرن اول میلادی) و سیمپلیکیوس[۳] (قرن ششم میلادی) و آغانیس[۴] نقل شده است که متون یونانی این شرح ها از دست رفته است (هوخندایک[۵]، ص ۶۳).

اصول موضوعه

هر علمی مشتمل بر شماری از قضایاست که اثبات آنها در آن علم امکان پذیر نیست، اما مجموعهٔ قضایایی که در آن علم اثبات می‌گردد، در آغاز متکی به آن قضایای اثبات نشده است. چنین قضایایی در آن علمِ خاص، اصول موضوعه به شمار می‌روند. اصول موضوعه به بیان ارسطو از مبادی شناخت علمی به شمار می‌آید (Aristotal, 9) که هر کس به آموختن دانشی می‌پردازد باید تا جایی که به آن دانش ارتباط پیدا می‌کند، شناختی در آن حاصل کند (ibid, 25).

اصل موضوع قضیه ای است کلی و غیر بدیهی که ذاتاً بی نیاز از اثبات نیست اما در دانشی خاص بدون استدلال پذیرفته می شود و استنتاج احکام دیگر بر پایه آن صورت

---

۱ برای آگاهی بیشتر از مقایسهٔ ترجمهٔ اصول اقلیدس قطب‌الدین شیرازی و ترجمه‌ها و تحریر ذکر شده، مراجعه کنید به مقاله نگارنده با عنوان "نگاهی به ترجمهٔ اصول اقلیدس قطب‌الدین شیرازی" در مجله تاریخ علم دانشگاه تهران که در دست چاپ است.

2 Heron Alexanderia
3 Simplicius
4 Aganis
5 Hogendijk

می‌گیرد. چنین قضیه ای در علمی که آن را اصل می‌گیرد قابل اثبات نیست زیـرا اثبـات آن مبتنی بر مقدماتی بیرون از حوزهٔ آن علم است، و اگر فرض شود که چنین مقـدماتی در آن علم وجود دارد، همانها را باید اصل تلقی کـرد. بـدین گونـه هـر نظـام علمـی یـا مجموعه استنتاجی دارای قضایایی ویژه خود است که در آن نظام از درسـتی آنهـا نمـی توان بحث کرد یعنی نمی‌توان آنها را به قضایای دیگـری از همـان مجموعـه ارجـاع داد. بنابراین کسی که به آن نظام علمی می‌پردازد ناگزیر است که آن قضایای بنیادی را بـی-مناقشه به عنوان اصل موضوع بپذیرد(ibid, 26).

نمونه‌ای از اصول موضوعه، اصول پنج گانـه ای اسـت کـه اقلیـدس در علـم هندسـه مطرح ساخته است که از این قرارند: ۱. از هر دو نقطه فقط یک خط راست می‌گـذرد. ۲. هر خط راست متناهی را می‌توان به صورت خط راست امتداد داد. ۳. به هر مرکـز و هـر شعاع می‌توان دایره ای رسم کرد. ۴. همه زوایای قائمه با هم مساوی هستند. ۵. اگـر دو خط راست را خطی راست قطع کند و مجموع دو زاویه متقابل داخلی کمتر از دو قائمـه باشد، آن دو خط راست متقاطعند (Euclid, 2).

اصول موضوعه‌ای که پذیرش آنها آسان نباشد مصادره نامیده می‌شوند. مصادره اصلی است که متعلم نسبت به درستی یا نادرستی آنها گمانی نـدارد یـا آنکـه گمـان کنـد آن اصل نادرست است. بنابراین، با آنکه مصادره نوعی از اصول موضوعه است و در آغاز علـم بدون استدلال پذیرفته می‌شود، اصطلاح اصول موضوعه اغلب به قضایایی اطلاق می‌شود که به درستی آنها گمان می‌رود (Aristotal,27). فارابی مفهـوم مصـادره را بسـط داده، آن را علاوه بر مقدماتی که در علم دیگری اثبات‌پذیرند، شامل قضایایی نیز دانسته اسـت که از مسائل علمِ مورد بحث‌اند و در مواضع دیگری از همان علـم اثبـات مـی‌شـوند، امـا متعلم چون در آغاز نمی‌تواند ادلهٔ درستیِ آنها را فراگیرد، آنها را به عنـوان مبـادی مـی-پذیرد (فارابی، ۸۸، ۹۰). ابن‌سینا نیز می‌گوید آنچه در مفهوم مصادره بر آن تأکید مـی-شود، این است که متعلم گمانی بر خلاف گفتهٔ معلم داشـته باشـد؛ از ایـن رو مـی‌تـوان گفت مصادره مطلبی است که متعلم آن را به سختی می‌پذیرد، گرچه هـیچ گمـانی هـم نداشته باشد؛ و به این اعتبار، هم شامل مقدمات علم است و هم شـامل مسـائلی از علـم که از متعلم خواسته می‌شود تا آنها را پیش از آنکه در جای خود تبیـین شـوند، مبنـای استنتاج قرار دهد. به همین گونه یک مطلب واحد که درستی آن فی‌نفسه روشن اسـت،

می‌تواند به اعتباری اصل موضوع، و به اعتبار دیگر مصادره شمرده شود (ابن سینا، ۱۱۱، ۱۱۵-۱۱۴).

فارابی با نسبی شمردن مفهوم مصادره، آن را به مقدمات بدیهی نیز، آنگاه که با شک و انکار تلقی شوند، تعمیم داده است. آنچه از اصول متعارفه به شمار می‌آید، برای متعلمی که دچار آفات ذهنی است و درستی آنها را درنمی‌یابد، بهتر است در قالب مصادره طرح شود تا او به تدریج با درک اصول بدیهی خو بگیرد (فارابی، همانجا). برخی از ریاضیدانان اسلامی اصول موضوعه را محدود به نوعی از مبادی دانسته‌اند که اثبات آنها در علم دیگری ضرورت می‌پذیرد. از این رو، مصادرات را قضایایی تعریف کرده‌اند که مبادی علم را تشکیل می‌دهند، اما نه از قضایای اولی یا اصول متعارفه‌اند و نه از قضایایی که در علم دیگری به اثبات می‌رسند، یعنی اصول موضوعه (نک: خیام، ۴؛ برای کاربردهای گوناگون این اصطلاح، نک: نصیرالدین طوسی، «تحریرالکره...»، ۶؛ همو، «تحریر مانالاوس»، ۴).

یکی از نمونه‌های مبادی علوم که عنوان مصادره بر آن اطلاق شده، اصل پنجم اقلیدس در هندسه است، بدین قرار که «هرگاه دو خط راست را خط سومی قطع کند، به طوری که مجموع دو زاویهٔ داخلی واقع در یک سوی خط قاطع کمتر از ۱۸۰ درجه است، تلاقی خواهند کرد». این اصل در شکل متداول‌تر آن چنین بیان می‌شود: «از هر نقطه‌ای می‌توان فقط یک خط راست به موازات خط دیگری رسم کرد» (Euclid, ibid). این اصل با آنکه بنیاد هندسهٔ اقلیدسی را تشکیل می‌دهد، گزاره‌ای نیست که همچون اغلب اصول موضوعه در دانشی دیگر به اثبات رسیده باشد. به همین دلیل، از دیرباز این اشکال را برانگیخته است که چنین اصل اثبات‌پذیری باید اساساً یکی از مسائل علم هندسه به شمار آید و اگر برای استنتاج پاره‌ای احکام در آغاز به عنوان اصل پذیرفته می‌شود، ناگزیر باید در جای دیگری از همین علم درستی آن اثبات گردد، کاری که خودِ اقلیدس به آن نپرداخته است.

نقطه و خط راست و دایره و زاویهٔ قائمه، پایه‌های هندسهٔ اقلیدس را تشکیل می‌دهند. اصل نخست در عین حال به این معنی نیز هست که میان دو نقطه، تنها یک خط راست می‌توان رسم کرد، و اصل دوم به این معنی است که هر پاره خط راست، در هر یک از دو انتها، تنها در یک راستا می‌تواند امتداد یابد. اصل سوم، از آنجا که در آن از «هر شعاع» سخن گفته شده، مستلزم عدم تناهی فضاست. اصل چهارم از دیدگاه

ریاضیات امروزی زائد شمرده می‌شود، زیرا برابری زوایای قائمه قابل اثبات است، اما باید توجه کرد که این اثبات تنها با فرض یکنواختی فضا و ثابت ماندن زوایا در تغییر مکان ممکن می‌شود. اقلیدس ترجیح داده است به جای توسل به این فرض، برابری زوایای قائمه را اصل موضوع قرار دهد.

در یونان باستان دربارهٔ ضرورت یا عدم ضرورت پذیرفتن این فرض که به شکل چشم‌گیری پیچیده بیان شده است، به عنوان اصل موضوع یا اصل متعارف (اثبات‌ناپذیر یا بی‌نیاز از اثبات)، مناقشات و مجادلات بسیاری جریان داشت. در سده های بعد بسیاری کسان دیگر در جهان اسلام، آن را قابل اثبات و بدین‌سان به عنوان اصل موضوع زائد شمردند و در اقامهٔ برهان بر آن کوشش‌های بسیار کردند. در حقیقت همهٔ آنان که خود را در این تلاش کامیاب یافته‌اند، در جریان اثبات از فرضی بهره جسته‌اند که خود با اصل پنجم هم ارز بوده است.

از جمله دانشمندان جهان اسلام که به توضیح یا اثبات اصول موضوعه اقلیدس پرداختند، ثابت ابن قره بود که دو رساله در اثبات توازی نوشت. وی همچنین رساله‌ای دربارهٔ علت ترتیب ویژهٔ اصول اقلیدس تألیف کرد. نیریزی نیز رساله‌ای در اثبات همین اصل نوشت (قفطی، ۱۱۶-۱۱۷). ابوجعفر خازن مقاله‌ای در اثبات اصل پنجم نوشت. ابن هیثم شرحی دربارهٔ اصول موضوعه با عنوان حل *شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول* نوشت. وی در این اثر به جای اصل توازی، اصل دیگری هم‌ارز با آن قرار داده است (ابن ندیم، ۳۲۵- ۳۵۶؛ ابن هیثم، ۲۵-۲۶). بیرونی در مقاله‌ای به بررسی اصل توازی پرداخت. خیام *رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات* اقلیدس را دربارهٔ اصل توازی و مسائل مربوط به نسبت‌ها نوشت؛ جالب توجه آن است که وی با اشاره به کوشش‌های خازن، شنی، نیریزی و دیگران در اثبات اصل توازی گوید: «هیچ یک از ایشان نتوانسته است برهان درستی بر این موضوع بیاورد، بلکه هر یک از ایشان به فرضی متوسل شده است که اثبات درستی آن از اثبات همین اصل آسان‌تر نیست»، آنگاه خیام طی ۸ گزاره از دیدگاه خود به اثبات اصل توازی می‌پردازد (خیام، ۶، ۱۳-۳۵). اثیرالدین ابهری، کتاب مفصل *اصلاح اصول اقلیدس* را نوشت و در آن به اقامهٔ برهان بر اصل توازی پرداخت. نصیرالدین طوسی رساله‌ای در اثبات اصل توازی با عنوان *الشافیة عن الشک فی الخطوط المتوازیة* دارد. وی در این رساله، نخست با ذکر براهین جوهری، ابن هیثم و خیام نشان می‌دهد که آنان در جریان اثبات از اصل دیگری که با اصل توازی هم‌ارز

بوده است، استفاده کرده‌اند و آنگاه به عرضهٔ استدلال خود می‌پردازد. محیی‌الدین مغربی *تحریر اصول اقلیدس فی الاشکال الهندسیة* را تألیف کرد. وی در این تحریر به اثبات اصل توازی کوشیده است (ابن ندیم، ۳۵۳؛ نصیرالدین طوسی، «تحریر المعطیات»، ۲).

اصول موضوعه از نظر قطب الدین شیرازی و نیریزی

قطب‌الدین شیرازی قبل از پرداختن به اصول موضوعه هندسهٔ اقلیدس به ضرورت تعریف نقطه، خط، صفحه و همچنین لزوم تعیین موقعیت نقطه، خط و سطح می‌پردازد و انطباق نقطه، خط و صفحه را بر نظایر خود از جمله مقدمات اصول موضوعه می‌شمارد: " من می‌گویم واجب آن است که اول وضع کنند که نقطه و خط و سطح مستقیم و مستوی و دایره آن‌چه از ایشان موجود است و ما را هست که تعیین کنیم نقطه بر هر خطی یا سطحی که باشد و فرض کنیم خطی بر هر سطحی که باشد یا گذرنده به نقطه کیف اتفق. و هر یکی از نقطه و خط مستقیم و سطح مستوی بر مثل خویش منطبق شوند... آن گاه مقدمات مذکور در اصل وضع کنند" (قطب‌الدین، ۶۳، ۶۴). همچنین وی معتقد است که اکثر اصول موضوعهٔ پنج‌گانهٔ اقلیدس قابل تصدیق است اما به جهت زدودن هرگونه تردیدی در پذیرش آنها می‌توان به توضیح و تبیین آن‌ها پرداخت. "و من می‌گویم که اکثر این قضایا چنان است که متعلم سلیم‌الفطره هرچند به حکم صحت فطرت و ذکاء فطنت به آن تصدیق کند، اما در باطن از انکاری خالی نباشد و او را خارخار طلب بیانی باشد، پس از جهت ازالت خارخار متعلمان سلیم الفطره، لایق نمود اشارتی خفیف و ایمائی لطیف به بیان هر یکی کردن بی استعانت به مسائل کتاب" (قطب الدین، ۶۴-۶۵). وی برای توضیح بعضی از اصول پنج‌گانه، از تبیین قضایای دیگری استفاده می‌کند که خود به نوعی علاوه بر پنج اصل، از اصول موضوعهٔ هندسهٔ اقلیدسی شمرده شده‌اند.

قطب‌الدین شیرازی نیز از جمله ریاضی‌دانانی است که جایگاه اصل پنجم را در بیان مسائل می‌داند نه در مصادرات: "و از این جهت استادان صناعت مواخذت کرده‌اند بر اقلیدس که آن را در عداد مسائل یاد کردن اولی‌تر از آن که در مصادرات، چه آن را در غیر علم هندسه بیان نتوان کرد و هیچ کس از اهل صناعت بیان آن بی معاونت بعضی از اشکال کتاب نکرده‌اند و از این جهت در اثنای مسائل یاد کنند" (همانجا).

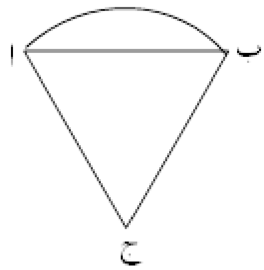
دیدگاه کلی قطب‌الدین دربارهٔ اصول اقلیدس بسیار به دیدگاه نیریزی نزدیک است زیرا نیریزی به طور مفصل توضیح داده است آنچه از اصول موضوعه از نظر استادان معلوم است برای متعلمین مجهول است: «و اما ممکن معلوم عندالاستاذین مجهول عند المتعلمین یحتاج ان یستعمل فی اول التعلیم فان الاشیاء التی تبرهن هی ایضا معلومة عند الاستاذین مجهولة عند المتعلمین...» (نیریزی، ۱۴).

علاوه بر آن نیریزی اصل پنجم را به عنوان یکی از قضایای مقالهٔ اول اصول اقلیدس اثبات کرده است.

مقایسه توضیحات و اثبات اصول موضوعه توسط قطب الدین شیرازی و فضل بن حاتم نیریزی[۱]

قطب الدین اصل موضوعهٔ اول را چنین توضیح می‌دهد:

۱. از هر دو نقطه A و B فقط یک خط راست می‌گذرد. اگر نقطه C را بر یکی از دو نقطه مثلا A منطبق فرض کنیم و C را به سمت B حرکت دهیم، CB خطی راست باشد و نقاط واقع بر CB همه بر یک راستا باشند. این اصل را نیریزی از قول سیمپلیکیوس این گونه توضیح می‌دهد: می‌توان بین هر دو نقطهٔ مفروض، کوتاه‌ترین فاصله بین آن دو را پیدا کرد و آن فاصله خط مستقیم خواهد بود و امکان ندارد که خط راست از سه نقطه بگذرد مگر آن که نقطهٔ سوم در راستای دو نقطهٔ دیگر باشد.



از مقایسهٔ توضیحات فوق معلوم می‌شود که فرض نمودن نقطه سوم، و اینکه آن نقطه در راستای دو نقطهٔ مفروض است مبنای هر دو توضیح می‌باشد.

۱. برای اطلاع از متن اصول موضوعه نک: دوست قرین، تصحیح و شرح شش مقالهٔ اول از جملهٔ چهارم درة التاج، اثر قطب الدین شیرازی، رسالهٔ دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم وتحقیقات تهران، ۱۳۹۱.

قطب الدین اصل دوم را چنین تبیین می‌کند:

۲. خط راست متناهی d را می‌توان به صورت خط راست نامتناهی d' امتداد داد.

توضیح: نقطهٔ دلخواه A را در نظر گرفته و به خط d وصل کنیم، اگر بین خط واصل و خط d زاویه ای ایجاد نشده باشد که خط راست نامتناهی d' ایجاد شده و در غیر این صورت، خط واصل را آنقدر حرکت می‌دهیم تا زاویه از بین برود و خط راست نامتناهی d' پدید آید.

توضیح این اصل نیز بنا به قول سیمپلیکیوس توسط نیریزی به صورت زیر آورده شده است: می‌توان خط راستی را چنان امتداد دهیم که یک خط راست در راستای خودش ایجاد شود، اگر امتداد هر خط با خودِ خط تشکیل زاویه دهد، در راستای آن خط نیست و در مقابل (یعنی اگر تشکیل زاویه ندهند) متصل به هم و در راستای هم می‌باشند.

تشکیل زاویه بین پاره خط مفروض و خط واصل میان یک نقطه دلخواه و پاره خط مفروض، اساس توضیحات قطب الدین و نیریزی در بارهٔ اصل موضوعه دوم است؛ اگرچه اثبات قطب الدین از چیدمانی منطقی‌تر برخوردار است. لازم به ذکر است که منظور از زاویه، زاویه ای به غیر از صفر و ۱۸۰ درجه است.

قطب الدین اصل سوم را نیز توضیح می‌دهد:

۳. به هر مرکز و به هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد. نقطه A و شعاع R را مفروض در نظر گرفته، و شعاع را حول A بطور کامل دوران می‌دهیم. شکل ایجاد شده دایره است.

این اصل را نیریزی از سیمپلیکیوس نقل کرده است: در اصل پیشین توضیح داده شد که هر دو نقطه را با خطی مستقیم می توان به هم وصل کرد، پس می توان یک نقطه را به عنوان مرکز دایره ثابت فرض کرد و نقطهٔ دیگر را حول مرکز، به طور کامل دوران داد تا دایره ایجاد گردد.

همان گونه که مشاهده می شود هر دو توضیح بر اساس در نظر گرفتن یک نقطهٔ ثابت به عنوان مرکز و دوران پاره خط مفروض وصل شده به آن نقطه است. توضیحات فوق درباره سه اصل اول، حاکی از آن است که سه اصل فوق، جزء اصول موضوعهٔ هندسه به شمار می‌روند چرا که از طرفی توضیحات مربوطه فقط برای تبیین بیشتر

اصول به کار رفته اند و از سوی دیگر قضایای هندسهٔ اقلیدسی بر مبنای این اصول، شکل گرفته‌اند.

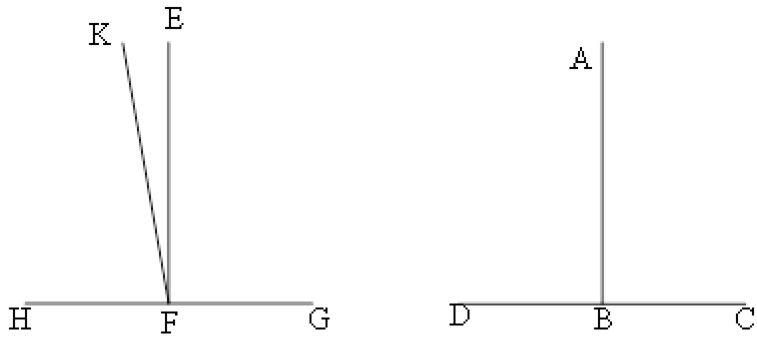
اصل چهارم را قطب الدین براساس انطباق اثبات می‌کند:

۴. همه زوایای قائمه با هم برابرند. فرض می‌کنیم که چهار زاویه ABC و ABD و EFG و EFH قائمه‌اند؛ اگر نقطه B را بر F و DC را بر HG منطبق کنیم، AB نیز بر EF منطبق می‌گردد. در غیر این صورت AB بر KF منطبق می‌گردد. چون:

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = \angle ABC\\ \angle ABD = \angle KFH\\ \angle ABC = \angle KFG\end{array}\right\} \Rightarrow \angle KFH = \angle KF$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle EFH > \angle KFH\\ \angle KFH = \angle KFG\end{array}\right\} \Rightarrow \angle EFH > \angle KFG$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle EFH > \angle KFG\\ \angle EFG = \angle EFH\end{array}\right\} \Rightarrow \angle EFG > \angle KFG$$



و این محال است، پس AB بر EF منطبق می‌گردد، پس حکم ثابت است. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که زاویه مساوی زاویه قائمه، خود قائمه است.

نیریزی این اصل را چنین اثبات کرده است: فرض می‌کنیم که دو زاویهٔ ABC و DEF قائمه‌اند؛ می‌خواهیم اثبات کنیم که این دو زاویه مساوی‌اند. اگر آن دو مساوی نباشند و مثلا $\angle DEF > \angle ABC$ در این صورت اگر نقطه B را بر E و A را بر D قرار دهیم BC داخل زاویهٔ DEF قرار می‌گیرد و BC بر خطی مانند EK منطبق می‌گردد. پس داریم:

$$\angle DEF > \angle DEK \qquad (۱)$$

حال اگر EG را در راستای FE امتداد دهیم، داریم:

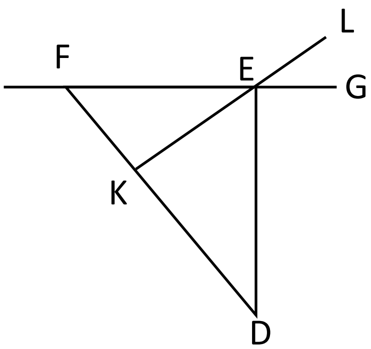
$DE \perp FG \Rightarrow \angle DEF = \angle DEG$ (۲)

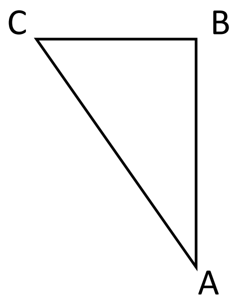
(۱) و (۲) $\Rightarrow \angle DEG > \angle DEK$ (۳)

EL را در راستای EK امتداد می‌دهیم؛ پس:

$DE \perp KL \Rightarrow \angle DEL = \angle DEK$ (۴)

(۳) و (۴) $\Rightarrow \angle DEG > \angle DEL$





و این غیرممکن است زیرا $\angle DEG < \angle DEL$. پس زوایای قائمه با هم برابرند.

اساس دو اثبات صورت گرفته در اصل فوق مبتنی بر برهان خلف و منطبق کردن دو زاویه قائمه است با اندکی تفاوت در امتداد دادن یکی از اضلاع، که در ساختار برهان تفاوت معناداری ایجاد نکرده است.

در خصوص اصل چهارم، می‌توان انطباق زاویهٔ قائمه بر زاویهٔ قائمه را مبتنی بر انطباق نقطه بر نقطه و خط بر خط در نظر گرفت که خود از مقدمات اصول موضوعه‌اند، بنابراین اصل چهارم می‌تواند از اصول موضوعه هندسه اقلیدس به شمار آید.

اصل پنجم موضوعه نیز توسط قطب الدین به ترتیب زیر اثبات شده است.

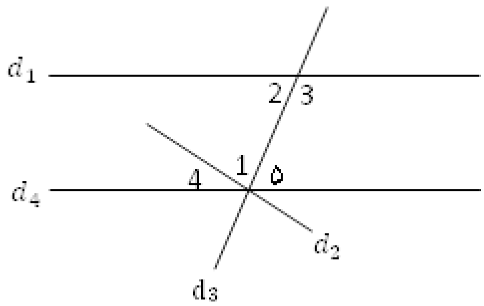
۵. اگر دو خط راست d_1 و d_2 خط راست d_3 را قطع کند و زاویه های متقابل داخلی کمتر از دوقائمه درجه باشد، d_1 و d_2 متقاطعند.

اثبات:

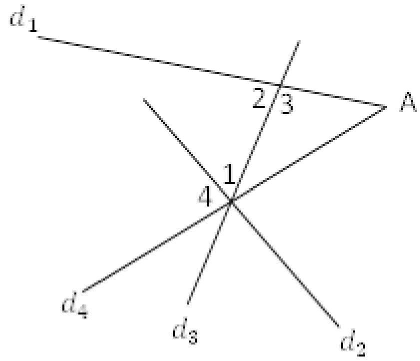
$$\left.\begin{array}{l}\angle ۲ + \angle ۱ < ۱۸۰^\circ \\ \angle ۲ + \angle ۳ = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ۳ > \angle ۱$$

زاویه ۴ + ۱ مساوی زاویه ۳ روی زاویه ۱ می‌سازیم خط d_4 پدید مـی‌آیـد. پـس در این صورت یا $d_4 \parallel d_1$ یا $d_4 \nparallel d_1$

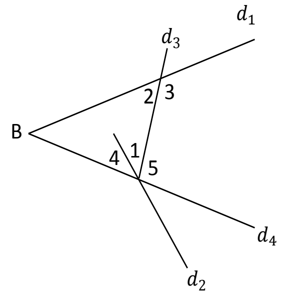
$$\text{اگر}\ \left.\begin{array}{l} d_4 \parallel d_1 \\ d_4 \nparallel d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \nparallel d_2 \qquad (1)$$



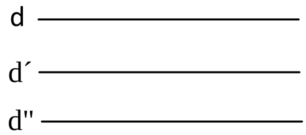
$$\left.\begin{array}{c} \text{اگر}\ d_4 \nparallel d_1\ \text{و}\ d_1 \cap d_4 = A \\ \text{چون}\ \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 \\ \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \\ \angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle 2 = \angle 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_4 \parallel d_1 \\ d_4 \nparallel d_2 \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \nparallel d_2 \qquad (2)$$



$$\text{اگر}\ d_4 \nparallel d_1\ \text{و}\ d_1 \cap d_4 = B \xrightarrow{\text{مانند فوق}} d_1 \nparallel d_2 \qquad (3)$$



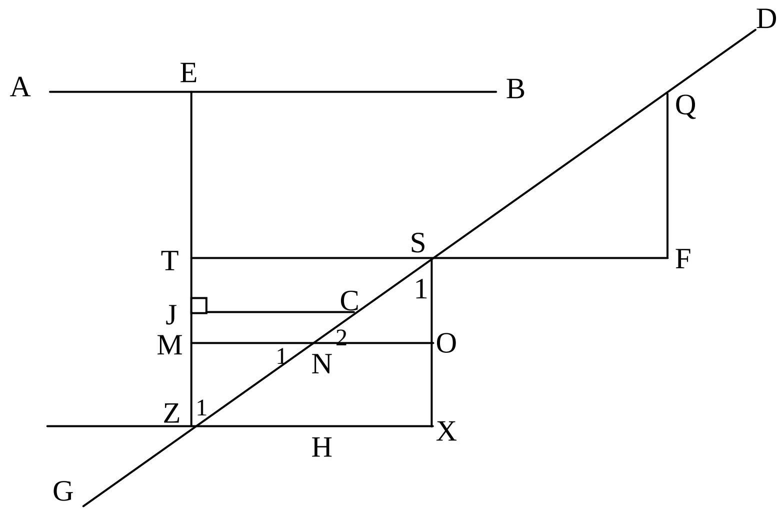
قابل ذکر است که با توجه به رابطه‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توان دریافت که قطب الدین در حقیقت اصل پنجم را با توجه به یک اصل هم ارز اصل پنجم ثابت کرده است، اصلی کـه می‌گوید: «اگر یکی از دو خط موازی خطی را قطع کند دیگری هم آن را قطع می‌کنـد». اگرچه به نظر قطب‌الدین توازی دو خط موازی با یک خط با استفاده از برهان خلف قابل اثبات است اما آنچه او ارائه داده است مبنایی کاملا شهودی دارد: "هر دو خـط مسـتقیم که خطی مستقیم میان ایشان افتد و موازی ایشان باشد، ایشان متوازی باشند. چـه اگـر متلاقی شوند، لازم آید که بعضی از احـدالمتـوازیین در یـک جانـب افتـد از آن دیگـر و بعضی در جانبی دیگر، تا یک خط، موازی دو خط متلاقی باشد و این نیـز باطـل اسـت، چه ابعاد او با یکی از ایشان به ضرورت مختلف گردد" (قطب‌الدین، ۷۱). یعنی اگر فرض کنیم d و "d با ´d موازیند ولی خود با هم متقاطعند. در این صورت فاصـله همـه نقـاط ´d با d یکسان نیست و این خلاف موازی بودن آن دو است.



جالب توجه است که قطب‌الدین اگر چه همگام با برخی صاحبنظران می‌گوید اصـل پنجم را باید در زمرهٔ مسائل هندسه مطرح کـرد و بـه کمـک دیگـر مسـائل حـل نمـود همچنان که دیگران چنین کرده‌اند (همو، ۷۰)، خود تلاش نموده است این اصل را بدون مراجعه به مسائل دیگر اثبات نماید: " ما را به توفیق باری، عزّ اسمه ... وجهی روی نمود خوب و تام، چون وجه بدر لیلة التمام بی استعانت به مسائل کتاب" (همانجـا) شـاید بـه این علت است که اثبات او بر مبنای اثبات اصلی هم‌ارز با اصل پنجم است کـه آن اصـلِ هم‌ارز را هم به صورت کاملا شهودی مطرح کرده است.

اما نیریزی اثبات این اصل موضوعه را به عنوان قضیهٔ بیست و نهم مقالـه اول اصـول اقلیدس و به نقل از اغانیس آورده است و به این ترتیب به نـوعی آن را در زمـرهٔ مسـائل دانسته است:

فرض می‌کنیم که دو خط راست AB و GD را خط EZ قطع کرده باشد بـه طـوری که مجموع دو زاویهٔ متقابل داخلی E_1 و Z_1 کمتر از ۱۸۰ درجه باشـد، در ایـن صـورت AB و GD متوازی نیستند.



اثبات: از نقطهٔ Z خطی را به موازات AB رسم می‌کنیم و آن را ZH مـی‌نـامیم. روی خط GD نقطهٔ دلخواه C را در نظر گرفته و از آن عمود CJ را بـر EZ رسـم مـی‌کنـیم. حال وسط پاره‌خط EZ را بدست آورده T می‌نامیم و وسط TZ را M مـی نـامیم؛ پـس $TM = \frac{۱}{۴} ZE$

از M خط MN را به موازات AB رسم مـی‌کنـیم، ZN را بـه انـدازه چهـار برابـرش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ Q بدست آید؛ حال ثابت می‌کنیم کـه AB و GD در نقطـهٔ Q متقاطعند. ZN را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ S بدست آید، از S پاره خـط SX را موازی و مساوی TZ رسم می‌کنیم. پاره خط MN را امتداد می‌دهیم تا پاره‌خـط SX را در نقطهٔ O قطع کند. حال در دو مثلث ZMN و NOS داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ZN = NS \\ \angle N_1 = \angle N_2 \text{ متقابل به رأس} \\ \angle Z_1 = \angle S_1 \text{ متبادل داخلی} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ZMN = \Delta NOS \Rightarrow ZM = SO \qquad (1)$$

$$\text{از طرفی } ZM = OX \quad ZMOX \text{ دو ضلع روبروی متوازی‌الاضلاع} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow SO = OX \Rightarrow SX = 2ZM$$

پس اگر از نقطهٔ Q خطی موازی EZ رسم کنیم تا امتداد TS را در F قطع کنـد، در این صورت داریم:

(3)

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} SQ = ZS \\ \angle TSZ = \angle QSF \text{ متقابل به رأس} \\ \angle FQS = \angle TZS \text{ متبادل داخلی} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta QFS = \Delta SZT \Rightarrow FQ = ZT \\ EZ \text{ وسط } T \Rightarrow TE = ZT \end{array}\right\} \Rightarrow FQ = TE$$

(4)

$$FQ \parallel TE$$

$$(3) \text{ و } (4) \Rightarrow FQTE \quad \text{متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow EQ = TF$$

پس خط AB خط FQ را در نقطهٔ Q قطع می‌کند، یعنی $AB \nparallel GD$

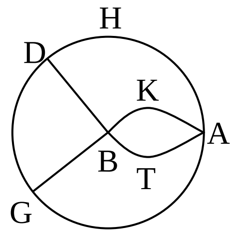
همانطور که مشاهده می‌شود نحوهٔ اثبات ارائه شده توسط قطب الـدین و نیریـزی در اصل پنجم، بطور قابل ملاحظه ای با هم تفاوت دارند و نحوهٔ اثبـات نیریـزی بـه نقـل از آغانیس مبتنی بر هم‌نهشتی مثلث‌ها و خواص متوازی‌الاضلاع اسـت کـه خـود قضـایایی مبتنی بر اصول موضوعه‌اند، بنابراین می‌توان این اصل را جزء مسائل هندسـی بـه شـمار آورد.

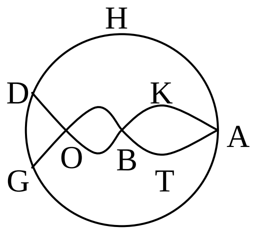
علاوه بر پنج اصل موضوعهٔ یاد شده، اصول دیگری به عنـوان مقـدماتی بـرای اصـول موضوعه از جانب برخی شارحان از جمله قطب الدین و نیریزی نیز مطرح شده است کـه در ادامه به بیان دو اصل اضافه شده از منظر قطب الدین و نیریزی پرداخته می‌شود.

۶. دو خط راست بر یک سطح محیط نمی‌شوند.

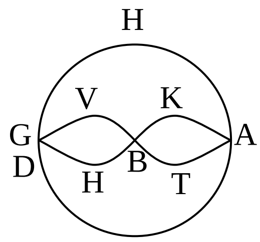
قطب الدین شیرازی این اصل را پس از توضیح این اصل کـه قطـر، محـیط دایـره را نصف می‌کند، با روش برهان خلف اثبات نموده است.

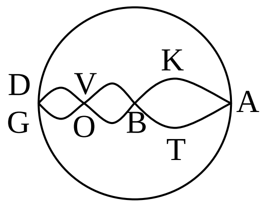
فرض می‌کنیم که AKB و ATB دو خط راست محیط به سـطح AB هسـتند. بـه مرکز B و به شعاع BA دایره AHG را رسم می‌کنـیم و AKB و ATB را در جهـت B امتداد می‌دهیم؛ اگر محل تقاطع این دو خط روی محیط دایـره نباشـد در ایـن صـورت کمان AHDG از کمان AHD بزرگتر می‌شود در حالی که هر دو نصف محیط دایره‌اند.





و اگر محل تقاطع AKB و ATB روی محیط دایـره باشـند، در ایـن صـورت زاویـه محصور بین قطر و نصف محیط دایره بزرگتر از زاویه محصور بـین همـان قطـر و نصـف محیط دیگر دایره می‌گردد که این خلاف است. پس دو خط راست بر یک سطح محـیط نمی‌شوند.

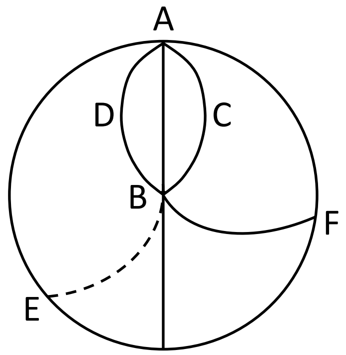




روش دیگر: اگر دو خط راست به سطحی محیط شوند در آن صـورت هـر یـک از آن دو از دیگری کوتاهتر است، چون خط راست کوتاهترین فاصله بین دو نقطه است و ایـن محال است.

نیریزی به نقل از سمپلیکیوس می‌گوید که این اصل در نسخه های قدیمی نیسـت و شاید به علت روشن بودن دلیل آن باشد و به همین علت رسما اصـول موضـوعه را پـنج اصل می دانند و این اصل را چنین اثبات کرده اند :

فرض می‌کنیم دو پاره‌خط ACB و ADB بر یک سطح محیط باشند. به مرکز B و شعاع BA دایره ای رسم می‌کنیم، ACB و ADB را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را به ترتیب در E و F قطع کنند. پس ACBE و ADBF قطرهای دایره‌اند، بنابراین کمان AF باید با کمان AFE برابر باشد چون هر دو نصف محیط دایره‌اند، در صورتی که کمان AF کوچکتر از کمان AFE است. پس دو پاره‌خط بر یک سطح محیط نمی‌شوند.

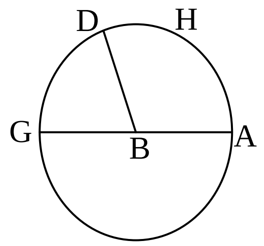


مقایسه: اثبات‌های ارائه شده بسیار شبیه می‌باشد و اثبات حالت‌های مختلف درنظر گرفته شده توسط قطب الدین، در اصل، تفاوتی با اثبات حالت کلی ندارد.

قطب الدین شیرازی از اصل اخیر به عنوان مقدمه‌ای برای ارائه اصل زیر بهره برده است.

۷. خط راست AB می‌تواند فقط در راستای یکی از دو خط غیر همراستای DB و GB قرار گیرد.

برهان خلف: فرض کنیم خط AB در راستای دو خط BD و BG قرار دارد و $BG < BD$.



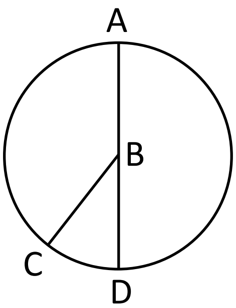
به مرکز B و به شعاع BG دایره ای رسم می‌کنیم پس:

$$\left.\begin{array}{l} BD \text{ در راستای } BA \Rightarrow DBA \text{ قطر} \\ GB \text{ در راستای } BA \Rightarrow GBA \text{ قطر} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AHD} = \overset{\frown}{ADG}$$

که محال است.

و اما نیریزی هم، خود، به اثبات این اصل، پس از توضیح اصل موضوعهٔ دوم پرداخته است:

پاره خط مفروض AB را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم بتوان دو خط راست ABD و ABC را رسم کرد. به مرکز B و شعاع BA دایرهٔ ADC را رسم می‌کنیم که در این صورت ABD و ABC قطرهای این دایره‌اند. پس کمان ACD باید با کمان AC برابر باشد و این غیرممکن است.



مقایسه: طریقه اثبات این اصل توسط قطب الدین شیرازی و نیریزی یکسان است.

نتیجه

به نظر می‌رسد که چهار اصل اول را می‌توان به واقع از اصول موضوعهٔ هندسه به شمار آورد، همانگونه که توضیحات نسبتا مشابه قطب‌الدین و نیریزی دربارهٔ آنها و همچنین مقدمات مربوط به آن‌ها، مبیّن این مطلب است. درمورد اصل چالش برانگیز پنجم، از یک سو با توجه به راه حل‌های ارائه شده می‌توان آن را جزء مصادرات شمرد که به عنوان زیر مجموعه‌ای از اصول موضوعه، اثبات ناپذیرند، چرا که آن راه حل ها، خود مبتنی بر استفاده از اصلی هم‌ارزِ اصل پنجم است همچون راه حل ارائه شده توسط قطب‌الدین شیرازی و از سوی دیگر آن را جزء مسائل هندسی شمرد که با استفاده از مسائل و قضایای هندسی می‌توان آن را اثبات نمود همان‌گونه که نیریزی به نقل از آغانیس این اصل را جزء مسائل محسوب و اثبات کرده است.

به نظر نگارنده با توجه به اهمیت استدلال استقرایی که مبتنی بر شهود است مـی‌-توان روش اثبات شهودی توازی دو خط موازی با یک خط- در یک صفحه- را به عنـوان یک روش مستدل هندسی پذیرفت و در نتیجه اصل پنجم را از اصول موضـوعهٔ هندسـهٔ اقلیدسی به شمار آورد.

منابع

۱. ابن سینا، *منطق، برهان*، به کوشش ابوالعلا عفیفی، قاهره، ۱۳۷۵ق/۱۹۵۶م.

۲. ابن ندیم، محمد، *الفهرست*، به کوشش رضا تجدد، تهران، ۱۳۵۰ ش.

۳. ابن‌هیثم، حسن‌بن‌حسن، *کتاب فی حل شکوک کتاب اقلیدس فـی الاصـول و شـرح معاینـه*، فرانکفورت: معهد تاریخ العلوم العربیة و الاسلامیة، ۱۴۰۵ ق.

۴. خیام، *رساله فی شرح مـا اشـکل مـن مصـادرات اقلیـدس*، بـه کوشـش عبدالحمیـد صـبره، اسکندریه، ۱۹۶۱ م.

۵. دوست قرین، فاطمه، *تصحیح و شرح شش مقالهٔ اول از جملـهٔ چهـارم دره‌التـاج، اثـر قطـب الدین شیرازی(د. ۷۱۰ ه)*، رسالهٔ دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی-واحـد علـوم وتحقیقـات، ۱۳۹۱.

۶. فارابی، محمد، «البرهان»، *المنطق*، به کوشش ماجد فخری، بیروت، ۱۹۸۷ م.

۷. قربانی، ابوالقاسـم، *زنـدگی‌نامـه ریاضـیدانان دورهٔ اسـلامی*، مرکـز نشـر دانشـگاهی، تهـران، ۱۳۷۵ش.

۸. قفطی، علی بن یوسف، *تاریخ الحکماء و هو مختصر الزوزنی المسمی بالمنتخبات الملتقطـات من کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء*، چاپ گولیوس لیپرت، لایپزیک، ۱۹۰۳ م.

۹. نصیرالدین طوسی، محمد، «تحریر الکـره و الاسـطوانه»، *مجمـوع الرسـائل*، حیـدرآباد دکـن، ۱۳۵۹ ق.

۱۰. نصیرالدین طوسی، محمد، «تحریر مانالاوس»، *مجموع الرسائل*، حیدرآباد دکن، ۱۳۵۹ ق.

۱۱.هوخندایک، یان.پ، «تأثیر نی‌ریزی در غرب»، *گزارش کنگره بزرگداشت فضل بن حاتم نـی-ریزی*، ترجمه محمد باقری، ۱۳۷۸.

12. Aristotal, Aristotle's posterior analytics, tr.E.S.Bouchier, B.A, London. 1901.
13. Euclid, Elements, tr. Th. Heath,1952, Britannica Great Books.
14. Sezgin, Fuat, *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol.14, Publication of the Institute for the History of the Arabic-Islamic Science, Frankfurt, 1997.