مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۴۱، شماره ۱، ۱۳۹۴، صفحهٔ ۱۱۹- ۱۲۹

انتخاب پرتو بهینه با استفاده از تبلور شبیه‌سازی شده در ردیابی به روش خمش

مریم فتحی[1*] و حمیدرضا سیاه‌کوهی[2]

[1] دانشجوی دکتری ژئوفیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران
[2] استاد، گروه فیزیک زمین، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۱/۹/۲۲، پذیرش نهایی: ۹۳/۷/۱)

چکیده

روش‌های خمش (bending) و پرتابی (shooting) دو روش متداول برای حل مسئله مقدار مرزی در ردیابی پرتوان هستند. در ردیابی به روش خمش فرض اولیه برای مسیر پرتو، یعنی خطی که چشمه و گیرنده را به هم متصل می‌کند، تا دستیابی به مسیری با کمترین زمان سیر، به‌طور تکراری خمیده می‌شود. میزان و جهت خمیدگی مسیر پرتو در هر تکرار به شیوه‌های گوناگون تعیین می‌شود. در این مقاله ضمن معرفی روشی بر مبنای تبلور شبیه‌سازی شده (simulated annealing) برای ردیابی پرتوی با کمترین زمان‌سیر طبق اصل فرما، توانمندی آن با اِعمال روی مدل‌های فرضی نشان داده می‌شود، و نتایج با روش آشفتگی سه نقطه مورد مقایسه قرار می‌گیرد. با مقایسه نتایج مشاهده می‌شود که روش معرفی شده زمان‌سیر، کمینه کلی (global minima) را بدون توجه به مسیر اولیه انتخابی یا نحوه تغییرات سرعت به‌دست می‌آورد. به عبارتی بین هر جفت چشمه و گیرنده فقط آن پرتوی را می‌یابد که زمان‌سیر آن کمینه کلی باشد. الگوریتم تبلور شبیه‌سازی شده ضعف دیگر الگوریتم‌های ردیابی پرتو را که در یک کمینه موضعی گیر می‌افتند، ندارد. همچنین نشان داده می‌شود که روش معرفی‌شده با محدود کردن نقطه سوم از مسیر انتشار روی فصل مشترک، می‌تواند مسیر پرتو با کمینه موضعی (local minima) مربوط به اموج بازتابی را نیز تعیین کند.

واژه‌های کلیدی: ردیابی پرتو، روش خمش، اصل فرما، تبلور شبیه‌سازی شده

Optimum ray determination by simulated annealing in bending ray-tracing method

Fathi, M.[1] and Siahkoohi, H. R.[2]

[1]*Ph.D. Student in Geophysics, Islamic Azad University, Science & Research Branch, Tehran, Iran*
[2]*Professor, Department of Earth Physics, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran*

(Received: 12 Dec 2012, Accepted: 23 Sep 2014)

Summary

In seismology, we use ray tracing to study subsurface geology and determine the structure of the earth. Rays are solutions of the Hamilton equations. In many cases, rays also can be obtained by following Fermat's principle of stationary travel time.

According to Fermat's principle, ray travels along a curve that renders the travel time, minimum. So the ray path can be obtained by minimizing the travel time, so that the obtained path satisfies the ray equation. Hamilton equations can be solved by specifying boundary conditions. The most important case of boundary-value ray tracing is the two-point ray tracing.

The shooting and bending methods are two commonly used numerical approaches to solve boundary-value ray-tracing problems. The shooting method is based on solving ray equations as initial-value problems by specifying the takeoff angle. The takeoff angle is varied until the ray passes through the receiver position. The shooting method works well to find rays connecting sources and receivers in simple 2D media. It breaks down in areas where ray equations break down, such as shadow zones and in complicated media where a slight variation in the takeoff angle might result in a significantly different ray, thus causing

*نگارنده رابط: E-mail: m61fathi@gmail.com

difficulty in connecting sources to receivers. The bending method addresses intrinsically the problem of connecting sources to receivers. One begins by connecting source to receiver with an initial path. This initial path is bent according to a prescribed method based on minimizing travel time (Fermat's principle) until the desired ray is obtained.

In this study, we minimized the travel time using *simulated annealing* to obtain global minima. Simulated annealing is based on the annealing process of solids in physics and is used in mathematics and physics to obtain an optimal solution to problems subjected led to constraints. Using this method, we found rays between fixed sources and receivers that render travel time globally minimal. By small change in the procedure, our algorithm can be modified to calculate rays of locally minimum travel time, such as reflected rays, by constraining the ray to pass through a set of points that are on the layers of the boundary. We formulate the concept of rays, which emerges from the Hamilton equations. Then, we show that these rays are solutions of the variation problem stated by Fermat's principle.

The proposed method is applied to the three velocity models. In all of these cases, we found that the path renders global minimum travel time. We have also tested the method to determine the path for a reflected ray from a known reflector. The results are compared to that of a ray tracing method called "*fast ray tracing algorithm*." For the first two models, the results were similar but for the third model, we had no response from fast ray tracing algorithm while we determined the correct ray path by the proposed method, which surpassed our expectations.

Our method overcomes two common shortcomings of other bending methods. First, solutions calculated using our algorithm is independent of the initial path. Second, our algorithm does not require using smoothly varying velocity models. We demonstrated the efficiency of our method by applying in to three different velocity models. The method is also generalized to a three-point problem, which is applicable for calculating rays constrained to pass through multiple interfaces.

Keywords: Ray tracing, Bending method, Fermat's principle, Simulated annealing

۱ مقدمه

بررسی مسئله ردیابی پرتو برای بسیاری از مسائل ژئوفیزیکی از جمله مسائل وارون‌سازی در ژئوفیزیک، اجرای مهاجرت در کارهای لرزه‌ای، و تعیین محل وقوع زلزله کاربرد دارد. در این مسائل مشخص ساختن مسیر پرتو ضروری است. از آنجا که در این بحث مسیر پرتو بین دو نقطه چشمه و گیرنده مدنظر است، بنابراین، به این مجموعه از مسائل، ردیابی پرتو دو نقطه نیز گفته می‌شود. معادله پرتو با استفاده از قانون دوم نیوتن، و همچنین به کمک اصل فرما به‌دست می‌آید. از حل معادله حاصل با تقریب بسامد بالا، مسیر پرتو نتیجه خواهد شد. مسئله ردیابی پرتو به دو دسته کلی مسئله مقدار اولیه، و مسئله مقدار مرزی دسته‌بندی می‌شود. روش‌های پرتابی و خمش از دسته دوم هستند. روش پرتابی با حل معادله پرتو درحکم مسئله مقدار اولیه و مشخص کردن زاویه تابش اولیه، صورت می‌گیرد. زاویه تابش اولیه در طول محاسبات، تا زمان عبور پرتو از موقعیت گیرنده موردنظر، تغییر داده می‌شود (یانگ، ۲۰۰۳). روش پرتابی برای پیدا کردن پرتو بین چشمه و گیرنده دارای دقت کافی است، اما در محیط‌هایی که در آنها معادله پرتو قابل حل نیست (ناحیه سایه (shadow zone)، و محیط‌های پیچیده‌ای که در آن تغییر ناچیز در زاویه تابش سبب ایجاد پرتوی کاملاً متفاوت می‌شود) موفقیت‌آمیز نیست. در روش خمش دو نقطه انتهایی (چشمه و گیرنده) ثابت فرض می‌شود، و مسیر پرتو بین آنها با توجه به اصل فرما به‌دست می‌آید.

روش خمش در لرزه‌شناسی به‌طور گسترده‌ای استفاده شده است. این روش را جولیان و گوبینز (۱۹۷۷) و پریرا و همکاران (۱۹۸۰) مورد استفاده قرار داده‌اند. آنها روش دیفرانسیل محدود را برای حل معادله پرتو به کار بردند. اوم

و توربر (۱۹۸۷) از یک مسیر سه نقطه شروع، و سپس از تفسیر هندسی معادله موج برای تغییر مسیر اولیه استفاده کردند. در واقع اوم و توربر (۱۹۸۷) برداشت متفاوتی کردند، آنها روشن ساختند که چگونه می‌توان پرتوها را با تغییر شکل خود پرتو ساخت. در روشی که پریرا و همکاران (۱۹۸۰) عملی ساخته است، دقت روش با افزایش ناپیوستگی‌ها در مدل سرعت کاهش می‌یابد. موزر و همکاران (۱۹۹۲) برای محاسبه مسیر پرتو، روش به حداقل رساندن زمان‌سیر با استفاده از گرادیان مزدوج و آشفتگی هم‌زمان همه نقاط واقع بر مسیر پرتو را به کار برد. همه این روش‌ها به مسیر اولیه بستگی دارند، اگر مسیر اولیه به دقت انتخاب نشود، ممکن است به پرتو دیگری، که مربوط به کمینه موضعی است، دست یابیم. در این مقاله روشی از نوع دو نقطه یا خمش معرفی می‌شود و در آن مسیر با زمان‌سیر کمینه کلی به کمک تبلور شبیه‌سازی شده به‌دست می‌آید. از تبلور شبیه‌سازی شده برای به‌دست آوردن پاسخ بهینه در مسئله کمینه‌سازی استفاده می‌شود. ولیز و اولریچ (۱۹۹۶) اولین‌بار از این روش در ردیابی پرتو استفاده کردند. الگوریتم آنها زاویه تابشی را می‌یابد که به ازای آن، پرتو کمترین زمان‌سیر را دارد. در واقع ردیابی پرتو به روش پرتابی را با استفاده از تبلور شبیه‌سازی شده عملی می‌سازد. تفاوت اساسی بین روش معرفی شده و روش آنها در این است که الگوریتم ایشان براساس روش پرتابی یا تغییر در زاویه تابش اولیه است و نقطه رسیدن موج به سطح زمین در هر تکرار تغییر می‌کند. درحالی‌که روش به کار رفته در این مقاله بر پایه تغییر خود مسیر پرتو است، و دو نقطه ابتدا و انتهای مسیر پرتو تغییر نمی‌کند. عموماً کاربرد روش‌های خمش محدود به بررسی‌هایی است که موقعیت چشمه و گیرنده در آن معلوم باشد (اغلب در لرزه‌نگاری اکتشافی این شرایط برقرار است). روش معرفی شده بر دو کاستی متداول در روش‌های خمش دیگر فائق می‌آید. اول آنکه در این الگوریتم پاسخ نهایی مستقل از مسیر اولیه یا حدس اولیه است، و دوم آنکه نیازی به ساده بودن مدل سرعت نیست.

۲ معادله پرتو

معادله دینامیک کشسان برای حرکت موج در محیط کشسان به شکل رابطه (۱) است (اودیاس، ۱۹۹۹):

$$(c_{ijkl}u_{kl})_{,j} + F_i = \rho\ddot{u}_i \qquad (۱)$$

برای حل معادله دینامیک کشسان می‌توان هر موج را به‌صورت ترکیبی از چند موج تخت در نظر گرفت.

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{U}F\big(t - T(x_i)\big) \qquad (۲)$$

که در آن، $\vec{U}$ ثابت برداری است.

محیط همگن و همسانگرد دو نوع موج تخت دارد، که در یک جهت منتشر می‌شوند؛ یکی موج تراکمی با سرعت انتشار α و دیگری موج برشی با سرعت β. برای یک محیط کشسان ناهمگن و همسانگرد نمی‌توان جبهه موج را به‌طور مشخص به‌صورت امواج تراکمی و برشی جدا کرد. اگر نتوان در یک محیط برای معادله دینامیک کشسان سه مقدار ویژه مجزا یافت، امواج تخت تراکمی و برشی قابل تفکیک نخواهند بود. در مورد محیط‌های ناهمگن فقط یک مقدار ویژه داریم، لذا جبهه موج به چند موج تخت مستقل قابل تفکیک نیست. اما در محیطی که ناهمگنی آن هموار است (پارامترهای محیط در مسافتی به اندازه یک طول موج، تغییر چندانی نشان نمی دهند) می‌توان امواج بسامد بالا را به‌صورت امواج برشی و تراکمی جدا کرد (چرونی، ۲۰۰۱).

اگر رابطه (۲) را در معادله دینامیک کشسان جایگزین کنیم، با در نظر گرفتن تقریب بسامد بالا، برای یک محیط ناهمگن دو نوع موج تخت S و p بسامد بالا خواهیم داشت، به‌طوری‌که بردار کندی مربوط به این امواج تخت در رابطه (۳) صدق می‌کند:

$$(\nabla T)^2 = {}^{1}/_{v^2} \quad , \quad \vec{p} = \nabla\vec{T} = {}^{1}/_{v} \qquad (۳)$$

رابطه بالا معادله آیکونال نام دارد ، و منجر به معادله پرتو به شکل رابطه (۴) می‌شود (چرونی، ۲۰۰۱):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left(\frac{1}{v(x_i)}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{ds}}\right) - \nabla\left(\frac{1}{v(x_i)}\right) = 0 \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) ds طول کمان در مسیر پرتو است.

۳ ردیابی به روش خمش

در روش خمش، دو نقطه انتهایی در طول محاسبات ثابت نگه داشته می‌شود، سپس مسیر پرتو بین آنها طوری پیدا می‌شود تا مسیری با کمترین زمان‌سیر به‌دست آید. از چند راه می‌توان مسیر درست را در روش خمش پیدا کرد. مجموعه‌ای از روش‌ها سعی در حل معادلات پرتو دارند، اما در سری دیگر تابع زمان‌سیر به‌طور مستقیم کمینه می‌شود. در روش خمش، معادلات دیفرانسیلی پرتو را برحسب تغییرات در مسیر پرتو بیان و خطی می سازند، سپس معادلات حاصل را به روش‌های عددی حل می‌کنند. این مطلب حل دستگاهی از معادلات جبری خطی را در بر می‌گیرد (جولیان و گوبینز، ۱۹۷۷).

پرتو در یک محیط ناهمگن از نقطه S به R با سرعت v حرکت می‌کند، با در نظرگرفتن $p = 1/v$ زمان‌سیر به شکل رابطه (۵) تعریف شده است:

$$T_S^R = \int_S^R \frac{ds}{v} \qquad (۵)$$

که در آن، انتگرال در طول مسیر پرتو است. همچنین مسیر پرتو در مختصات دکارتی چنین تعریف می‌شود.

$$x = x(u)\,, y = y(u)\,, z = z(u)$$

که در آن، پارامتر u در طول کمان، مناسب با شرایط مسئله انتخاب می‌شود. اگر پارامتر پرتو را طول کمان s در نظر بگیریم (یانگ، ۲۰۰۳):

$$\frac{ds}{du} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \equiv F$$

در این حالت معادلات اویلر به شرح رابطه (۶) هستند:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{du}(pF)_{x'} = (pF)_x \\ &\frac{d}{du}(pF)_{y'} = (pF)_y \\ &\frac{d}{du}(pF)_{z'} = (pF)_z \\ &(pF)_{x'} = \frac{\partial}{\partial x'}(pF), \quad (pF)_x = \frac{\partial}{\partial x}(pF) \end{aligned} \qquad (۶)$$

با شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_S \quad y(0) = y_S \quad z(0) = z_S \\ &x(1) = x_R \quad y(1) = y_R \quad z(1) = z_R \end{aligned} \qquad (۷)$$

ابتدا مسیر اولیه‌ای، که از دو نقطه S و R می‌گذرد، انتخاب می‌شود، سپس برآورد بهتری برای مسیر پرتو، به شکل رابطه (۸) جست‌وجو می‌شود:

$$\begin{aligned} &X^{(0)}(\lambda) \sim [x^{(0)}(\lambda), y^{(0)}(\lambda), z^{(0)}(\lambda)] \\ &X^{(1)}(\lambda) = X^{(0)}(\lambda) + \boldsymbol{\xi}^{(0)}(\lambda) \\ &X^{(n+1)}(\lambda) = X^{(n)}(\lambda) + \boldsymbol{\xi}^{(n)}(\lambda) \end{aligned} \qquad (۸)$$

$\boldsymbol{\xi}^{(0)} \equiv (\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$. معادله اول از مجموعه معادلات اویلر به شکل معادله (۹) نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{du}(pF)_{x'} - (pF)_x \equiv Q_1(X, \dot{X}, \ddot{X}) = 0 \qquad (۹)$$

با جایگزین کردن رابطه (۸) در معادله (۹) و خطی کردن عبارت حاصل برحسب ξ خواهیم داشت:

$$Q_1(X^{(n)}, \dot{X}^{(n)}, \ddot{X}^{(n)}) + \boldsymbol{\xi}^{(n)} \frac{\partial Q_1}{\partial X} + \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(n)} \frac{\partial Q_1}{\partial \dot{X}} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}^{(n)} \frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{X}} + O(\boldsymbol{\xi}^{(n)2}) = 0 \qquad (۱۰)$$

اگر $Q_2 = 0$، $Q_3 = 0$ نماینده دو معادله دیگر از مجموعه معادلات ۶ باشند، درنهایت معادلات خطی شده برحسب $\xi^{(n)}$ به شکل معادله (۱۱) نوشته می‌شود:

$$B^{(n)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{(n)}(\lambda) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^{(n)}(\lambda) \\ \ddot{\boldsymbol{\xi}}^{(n)}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1[X^{(n)}(\lambda)] \\ Q_2[X^{(n)}(\lambda)] \\ Q_3[X^{(n)}(\lambda)] \end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

عناصر ماتریس B^n مشتقات جزئی Q هستند. معادلات دیفرانسیل بالا با شرایط مرزی $\boldsymbol{\xi}^{(n)}(0) = \boldsymbol{\xi}^{(n)}(1) = 0$ به روش دیفرانسیل محدود حل می‌شوند (جولیان و گوبینز، ۱۹۷۷).

طبق اصل فرما پرتوها مسیری را انتخاب می‌کنند، که کمترین زمان برای عبور موج در آن مسیر لازم باشد. بنابراین آنچه که در اینجا موردنیاز است کمترین مقدار تابع فرما است (در این بحث تابع زمان‌سیر، همان تابع فرما است). برای این منظور دیفرانسیل زمان‌سیر (رابطه ۵) را برابر صفر قرار می‌دهیم (بونا و اسلووینسکی، ۲۰۰۳):

$$\delta T = \delta \int_S^R dT = \delta \int_S^R \frac{ds}{V} = 0$$

در بخش قبلی برای حل معادله پرتو از روش‌های حل عددی استفاده شد که عملی زمان‌بر است. همچنین دقت پاسخ به‌دست آمده، به دقت روش دیفرانسیل عددی به کار گرفته شده بستگی دارد. اگر دقت کافی نباشد، دستگاه

خطی‌شده شامل خطاهای کوچکی می‌شود، و چنانچه مدل سرعت ساده نباشد، این خطاهای کوچک ممکن است به سمت عددی با دقت موردنظر همگرا شوند، و یا آنکه واگرایی نامطلوبی را به دنبال داشته باشند. این مشکلات، هنگامی که زمان‌سیر به‌طور مستقیم به حداقل می‌رسد، اتفاق نمی‌افتند. لذا روش‌های دیگری که در آنها به‌جای حل معادله پرتو تابع زمان سیر (تابع فرما) به‌طور مستقیم کمینه می‌شود، معرفی می‌شود.

۴ ردیابی پرتو دو نقطه سریع

در الگوریتم ردیابی پرتو دو نقطه سریع (اوم و توربر، ۱۹۸۷) مسیر پرتو اولیه به‌طور تکراری آشفته (perturb) می‌شود، تا زمانی که اصل پایداری زمان سیر فرما برآورده شود، و زمان‌سیر در طول قطعات مسیر پرتو به حداقل برسد. برای محاسبه زمان‌سیر از تقریب قاعده ذوزنقه‌ای در طول قطعات پرتو استفاده می‌شود.

$$T_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(\gamma) = \sum_{k=2}^{\mathrm{n}} |\mathrm{X}_k - \mathrm{X}_{\mathrm{k}-1}| \left(\frac{1}{\mathrm{V}_{\mathrm{k}}} + \frac{1}{\mathrm{V}_{\mathrm{k}-1}}\right)/2 \qquad (۱۲)$$

که در آن، γ مسیر پرتو و n تعداد نقاط در طول مسیر است. سه نقطه مجاور مسیر، چنانچه در شکل ۱ نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود، دو نقطه انتهایی X_{k-1} و X_{k+1} ثابت‌اند، نقطه X'_k به جای نقطه قبلی X_k طوری پیدا می‌شود که زمان‌سیر در طول مسیر به حداقل برسد. دو متغیر برای یافتن نقطه جدید X'_k برآورد می‌شود، یکی جهت n و دیگری دورافت از نقطه وسط خط راست بین $\mathrm{X}_{\mathrm{k}-1}$ و X_{k+1} (اوم و توربر، ۱۹۸۷).

برای به‌دست آوردن نقطه X'_k، جهت پرتو با استفاده از جهت خط راست بین دو نقطه انتهایی $\mathrm{X}_{\mathrm{k}-1}$ و $\mathrm{X}_{\mathrm{k}+1}$ به‌دست می‌آید (شکل ۱). مولفه گرادیان سرعت عمود بر این جهت در نقطه میانی، جهت دورافت صحیح برای نقطه X'_{k} است.

$$\mathrm{n}' = \nabla \mathrm{v} - [(\nabla \mathrm{v}).(\mathrm{X}_{\mathrm{k}+1} - \mathrm{X}_{\mathrm{k}-1})](\mathrm{X}_{\mathrm{k}+1} - \mathrm{X}_{\mathrm{k}-1})/|\mathrm{X}_{\mathrm{k}+1} - \mathrm{X}_{\mathrm{k}-1}|^2$$
$$n = \frac{n'}{|n'|} \qquad (۱۳)$$

سپس مقدار صحیح R در جهت n با به حداقل رساندن معادله زمان‌سیر، رابطه (۱۲)، در طول مسیر $X_{\mathrm{k}-1}\ \mathrm{X}'_{\mathrm{K}}\ X_{\mathrm{k}+1}$ به‌دست می‌آید:

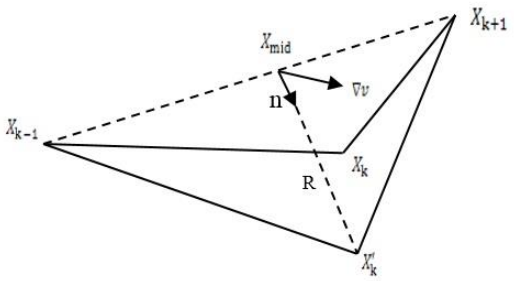
$$R_c = \frac{-(cv_{mid}+1)}{\{4cn.(\nabla v)_{mid}\}} + \left[\frac{(cv_{mid}+1)^2}{\{4cn.(\nabla v)_{mid}\}^2} + \frac{L^2}{2cv_{mid}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۴)$$

به‌منظور افزایش سرعت همگرایی، انتخاب مسیر اولیه با تعداد نقاط کم ترجیح داده می‌شود. از طرفی ازآنجاکه دقت زمان‌سیر با توجه به رابطه (۱۲) به تعداد نقاط در طول مسیر بستگی دارد، ممکن است با انتخاب تعداد نقاط کم در طول مسیر پرتو، دقت زمان‌سیر کاهش یابد. ازاین‌رو برای افزایش سرعت همگرایی و همچنین نگه داشتن دقت در زمان‌سیر، الگوریتم به‌صورت زیر مرتب می‌شود.

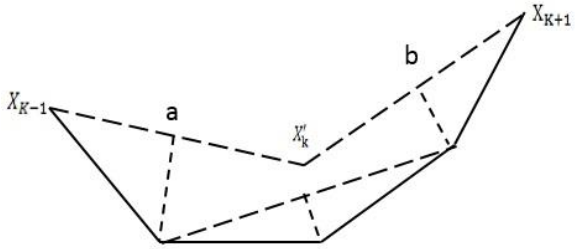
برای مدل سرعت زیر:

$$v(\tfrac{m}{s}) = 2 + 0.02 \times z \qquad (۱۵)$$

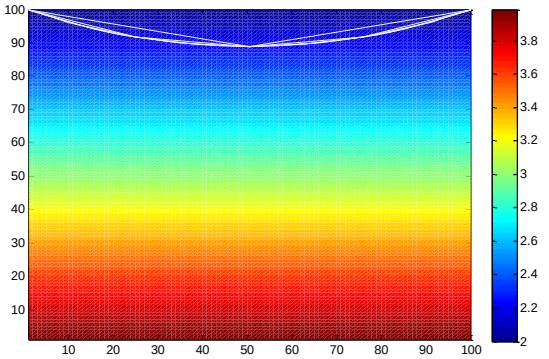
که در آن محور z در راستای قائم و جهت مثبت آن به سمت پایین است. شکل ۳ مسیر پرتو را برای مدل سرعت پیش‌گفته را (معادله ۱۵)، که به روش ردیابی پرتو سریع (آشفتگی سه نقطه) به‌دست آمده است، نشان می‌دهد.



شکل ۱. اعمال روش آشفتگی سه نقطه به مسیر اولیه‌ی سه نقطه‌ای.



شکل ۲. دو برابر کردن مسیر و تکرار آشفتگی سه نقطه.



شکل ۳. مسیر پرتو به‌دست آمده به روش آشفتگی سه نقطه در محیطی با سرعت $v = 2 + 0.02 \times z$. در شکل، رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.

روش ردیابی پرتو دو نقطه سریع برای محیطی با ناپیوستگی سرعت و همچنین با سرعت ثابت پاسخ‌گو نیست. بنابراین روش دیگری برای یافتن گرادیان زمان‌سیر، به نام روش گرادیان مزدوج پیشنهاد شده است. هدف از این کار افزایش دقت بدون افزایش زمان محاسباتی است. همچنین رویه آشفتگی عمومی جایگزین آشفتگی سه نقطه شده است (موزر و همکاران، ۱۹۹۲). گرادیان مزدوج از جمله روش‌های کمینه‌سازی است که از گرادیان تابع به‌منظور یافتن کمترین مقدار آن استفاده می‌کند. روش گرادیان مزدوج واگرا نمی‌شود، و هر بار که گرادیان غیر صفر به‌دست آید، زمان‌سیر جدیدی که کوچک‌تر از زمان سیر قبلی است، نتیجه می‌شود. گرادیان صفر به این معنی است که نقطه پایدار پیدا شده است.

با این روش نمی‌توان مطمئن شد که زمان‌سیر به‌دست آمده کمینه موضعی است یا کمینه کلی. فقط می‌توان گفت مسیری با کمترین زمان‌سیر، که به حدس اولیه نزدیک‌تر است، به‌دست آمده است.

۵ تبلور شبیه‌سازی شده

تبلور یک فرایند فیزیکی است، در این فرایند جامد در حمام گرما (heat bath) با افزایش دمای حمام ذوب می‌شود، به‌طوری‌که همه ذرات به‌صورت تصادفی در فاز مایع مرتب می‌شوند، سپس ذرات به آرامی با کاهش دمای حمام گرما خنک، و به فاز جامد برگردانده می‌شوند. همچنان که مایع سرد می‌شود، فرصت می‌یابد تا با حمام گرما به تعادل گرمایی برسد. این تعادل گرمایی سبب می‌شود که ذرات به محض رسیدن به نقطه انجماد در سطح انرژی کمینه قرار گیرند. این مطلب به آرایش حالت پایه مربوط می‌شود، در این شرایط جامد به‌صورت یک بلور شکل می‌گیرد، چنانچه سرد کردن خیلی سریع صورت گیرد، خطر وقوع یخ‌زدن وجود دارد، یا به‌عبارتی، جامد فرصت مرتب شدن در یک ساختار منظم بلوری نیافته است و به شکل شیشه در می‌آید (متروپولیس و همکاران، ۱۹۵۳).

کرکپتریک و همکاران (۱۹۸۳) حل مسائل بهینه‌سازی را با علت‌های مکانیک آماری توجیه کرد. در این مجموعه از مسائل، هدف به‌دست آوردن بهترین پاسخ (حالت پایه) برای یک مسئله خاص (سامانه) با تغییر پاسخ اولیه آزمایشی (تغییر حالت اولیه مفروض) طی سلسله مراتب به‌خصوص (ذوب کردن و سپس خنک کردن) نسبت به یک پارامتر مشخص (دما) است.

۶ ردیابی پرتو و تبلور شبیه‌سازی شده

در تبلور شبیه‌سازی شده هدف، یافتن حالت پایه سامانه مورد بررسی است. در ردیابی پرتو مسیرهای بین چشمه و گیرنده را درحکم سامانه معرفی می‌کنیم. فرض کنید γ معرف مسیری باشد، که چشمه را به گیرنده وصل می‌کند، و $T(\gamma)$ زمان‌سیر مربوط به این مسیر باشد. هدف، پیدا کردن مسیری با کمترین زمان‌سیر است. طبیعی است که در این مقایسه انرژی را معادل با زمان‌سیر بدانیم، و حالت پایه را معادل با مسیری که کمترین زمان‌سیر را دارد. بنابراین تابع هدف یا تابعی که باید کمینه شود، همان تابع زمان‌سیر است. برای روشن شدن نقش حمام گرما در ردیابی پرتو از پارامتر τ که واحد زمان دارد استفاده می‌کنیم؛ چنانچه مقدار این پارامتر را در الگوریتم کاهش دهیم مشابه آن است که دما را در حمام گرما کاهش داده باشیم. احتمال گذار از مسیر γ_i به γ_j در τ برابر است با:

$$A(\gamma_i \to \gamma_j) = \begin{cases} 1 & \Delta T \le 0 \\ exp\left(-\frac{\Delta T}{\tau}\right) & \Delta T > 0 \end{cases} \quad (۱۶)$$

که در آن، $\Delta T = T(\gamma_j) - T(\gamma_i)$ تغییر زمان‌سیر پس از تغییر مسیر است. هر تغییری که زمان‌سیر را در طول مسیر کاهش دهد قابل‌قبول است، اگرچه تغییری که زمان‌سیر را افزایش دهد نیز با یک احتمالی قابل‌قبول است، و این احتمال با کاهش دما کاهش می‌یابد (سن و استوفا، ۱۹۹۵).

۷ یافتن کمینه‌ی زمان‌سیر با تبلور شبیه‌سازی شده

یک محیط دوبُعدی با شبکه مستطیلی متشکل از $N = L_x \times L_z = 100 \times 100$ نقطه (L_x تعداد نقاط در راستای محور افقی و L_z تعداد نقاط در راستای قائم است) را در نظر بگیرید. این محیط با تعیین سرعت در هر نقطه از شبکه (اعمال مدل سرعت) مشخص می‌شود. فرض کنید S چشمه و R گیرنده باشد، و γ مسیر بین این دو نقطه، همچنین مسیر γ از M قطعه خط راست تشکیل شده است. γ_k نشان‌دهنده قطعه k اُم مسیر است.

اگر زمان‌سیر به‌صورت رابطه زیر تقریب زده شود:

$$T(v(x);\gamma) = \sum_{k=1}^{M} T(v(x);\gamma_k) \quad (۱۷)$$

که در آن $T(v(x);\gamma_k)$ زمان‌سیر در طول قطعه kاُم است. زمان‌سیر پرتو در طول قطعه خط kاُم با انتگرال‌گیری به روش عددی و با استفاده از قاعده سیمسون از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$T(v(x);\gamma_k) = \int_{s_0^k}^{s_f^k} \frac{ds}{v(x(s),z(s))} \quad (۱۸)$$

که در آن، s_0^k و s_f^k نقطه شروع و پایان قطعه kاُم هستند.

برای شروع محاسبات مسیر اولیه γ_0، که M قطعه دارد، بین دو نقطه چشمه و گیرنده رسم می‌کنیم، زمان‌سیر برای این مسیر از روابط (۱۷) و (۱۸) به‌دست می‌آید. سپس فرایند تبلور از دمای بالا شروع می‌شود، به‌طوری‌که هر تغییری برای مسیر پرتو قابل‌قبول است، پس از آن سامانه تا قرار گرفتن در حالت پایه یا رسیدن به زمان‌سیر حداقل سرد می‌شود. ازاین‌رو پاسخ به حدس اولیه که با شروع مراحل بعدی از بین می‌رود، بستگی ندارد (بونا و اسلووینسکی، ۲۰۰۹).

در اینجا مسیر با سه نقطه (نقطه ابتدایی، انتهایی و نقطه میانی) نشان داده می‌شود، که شامل دو قطعه خواهد بود، یعنی $M = 2$. دو نقطه ابتدا و انتها ثابت‌اند و نقطه میانی برای حدس مسیر اولیه به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. سپس برای تغییر مسیر در هر تکرار نقطه میانی را به نقطه‌ای دیگر حرکت می‌دهیم (شکل ۴)، پس از آن اختلاف زمان‌سیر بین دو مسیر متوالی محاسبه می‌شود. پذیرفتن یا نپذیرفتن مسیر جدید با ضابطه متروپولیس تعیین می‌شود. این عمل در هر τ تکرار می‌شود.

در اینجا تعداد تکرارها مضربی از تعداد نقاط شبکه انتخاب می‌شود، تا هر نقطه به‌طور میانگین حداقل یک بار انتخاب شود. اگر v کوچک انتخاب شود، سامانه به تعادل نخواهد رسید؛ و اگر v را بزرگ انتخاب شود، زمان و هزینه محاسباتی را افزایش خواهیم داد. برای شروع ۱۰۰ پرتو بین چشمه و گیرنده رسم می‌شود. برای دقت بیشتر می‌توان عملیات را بار دیگر تکرار، و این بار از مسیر به‌دست آمده پیشین، درحکم مسیر اولیه استفاده کرد.

برای نحوه کاهش دما می‌توان از روند کاهش دما با سرعت ترمودینامیکی ثابت، نمایی، لگاریتمی و روند کاهش دمای خطی استفاده کرد. مقایسه براساس میزان بی‌نظمی طی فرایند تبلور است، بهترین رویه برای کاهش دما آن است که کمترین بی‌نظمی را ایجاد کند (نورانی و اندرسون، ۱۹۹۸). در اینجا دما به نسبت عکس شماره گام، در هر مرحله کاهش داده شده است.

$$\tau(i) = \frac{\tau_0}{i}, \qquad i = 0,1,2,\ldots \quad (۱۹)$$

که در آن i نشانه مرحله سرد کردن، و τ_0 دمای اولیه است. مقدار τ_0 طوری انتخاب می‌شود که میزان پذیرش برای هر مدل در شروع فرایند برابر یک باشد. در اینجا τ_0 را برابر ۱۰۰ انتخاب کردیم.

انتخاب مناسب پارامترهای تبلور بسیار حائز اهمیت است. برای مشاهده این موضوع، تاثیر روند کاهش دمای نمایی به‌جای رابطه (۱۹) در الگوریتم تبلور شبیه‌سازی شده،

بررسی شده است (شکل ۸).

$$\tau(i) = \tau_0 exp(-\alpha i) \qquad (۲۰)$$

در اینجا $\alpha = 1$ انتخاب و سامانه را طی ۵۰ مرحله (گام) خنک کردیم. مقادیر بزرگ α به سرد شدن سریع می‌انجامد. چنانچه مقادیر کوچک‌تر برای α انتخاب شود، فرایند تبلور طی تعداد درجه حرارت‌های بیشتری صورت می‌گیرد، لذا زمان محاسباتی بیشتری برای سرد شدن سامانه لازم است.

۸ ارزیابی کارایی روش

الگوریتم تبلور شبیه‌سازی شده سریع را نگارندگان در محیط مَت‌لَب نوشته‌اند (شکل ۵).

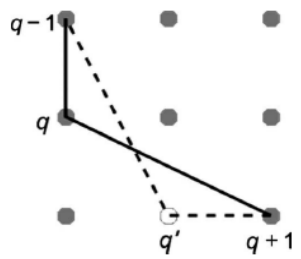
برای ارزیابی عملکرد روش سه مدل زمین فرضی به شرح زیر در نظر گرفته شد:

۸-۱ مدل فرضی ۱.

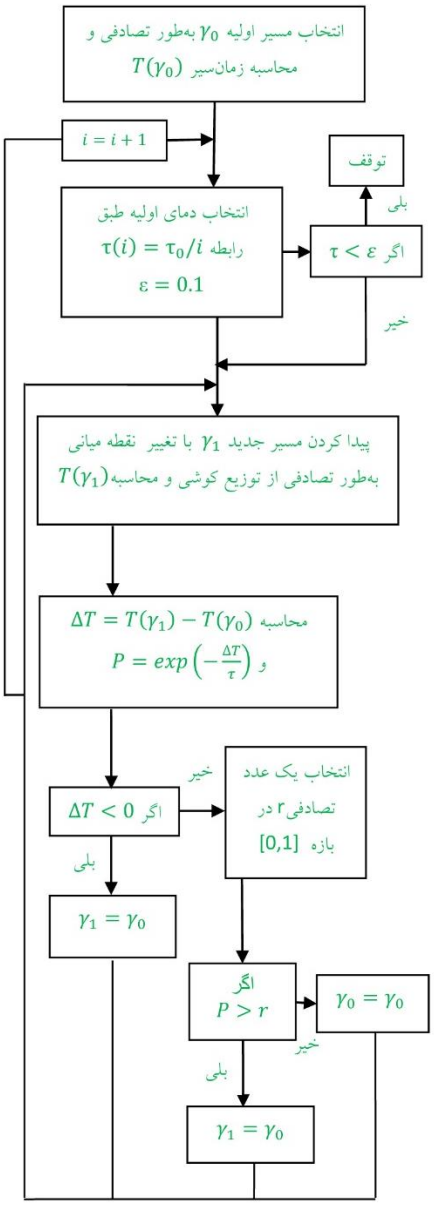
محیط ناهمگن و همسانگرد که با رابطه (۲۱) تعریف می‌شود:

$$v = 2 + 0.02 * z \qquad (۲۱)$$

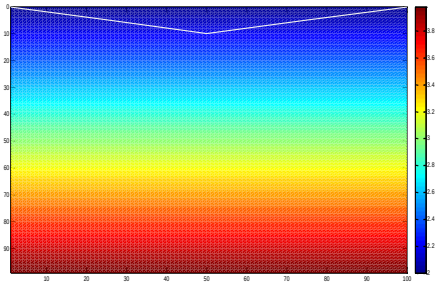
در این مدل، v سرعت برحسب m/s است که با گرادیان ثابت در عمق افزایش می‌یابد، و z عمق برحسب متر است (مثبت z در راستای قائم و به سمت پایین است). مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر در این محیط، به روش تبلور شبیه‌سازی شده در شکل ۶ نشان داده شده است. همچنین شکل ۷ مسیر به‌دست آمده با روش آشفتگی سه نقطه را نشان می‌دهد، که در آن مسیر منحنی شده است.



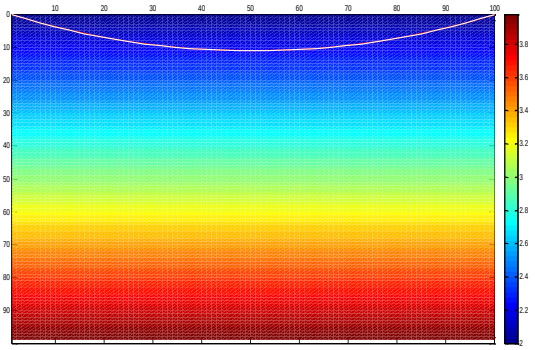
شکل ۴. ایجاد تغییر در مسیر با انتقال نقطه q به نقطه q' (بونا و اسلووینسکی، ۲۰۰۹).



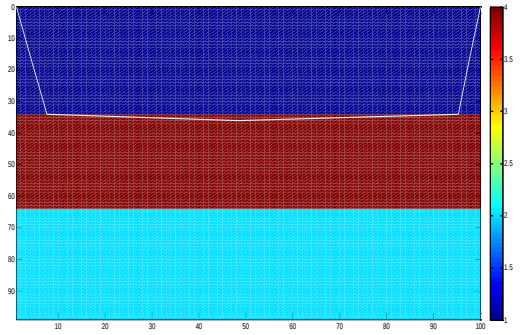
شکل ۵. نمودار گردشی الگوریتم تبلور شبیه‌سازی شده.



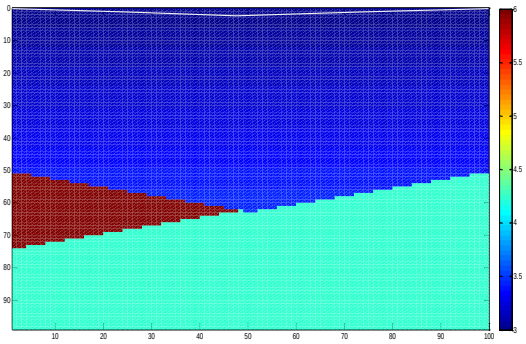
شکل ۶. مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر برای مدل سرعت $v = 2 + 0.02 * z$ به روش تبلور شبیه‌سازی شده سریع FSA. در شکل، رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.



شکل ۷. مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر برای مدل سرعت $v = 2 + 0.02 * z$ به روش آشفتگی سه نقطه. در شکل رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.



شکل ۸. مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر برای مدل سرعت ۲ به روش تبلور شبیه‌سازی شده. در شکل، رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.



شکل ۹. مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر به روش FSA ($T = 32.938\ s$) برای مدل سرعت ۳. در شکل، رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.

۸-۲ مدل فرضی ۲.

محیط لایه‌ای که در آن هر لایه دارای سرعت ثابت به شکل رابطه (۲۲) است:

$$v(x,z) = \begin{cases} 1 & z < z_1(x) \\ 4 & z_1(x) < z < z_2(x) \\ 3 & z > z_2(x) \end{cases}$$

$$z_1 = 35 \quad , \quad z_2 = 65 \qquad (۲۲)$$

در این محیط، با توجه به سرعت بالای لایه دوم نسبت به دو لایه دیگر، مسیر نشان داده شده در شکل ۸ دارای کمینه کلی است. به علت نیاز روش آشفتگی سه نقطه به گرادیان سرعت در هر نقطه، این روش برای مدل سرعتی فوق پاسخی نخواهد داشت.

۸-۳ مدل فرضی ۳.

در این محیط سرعت با رابطه (۲۳) تعریف شده است:

$$v(x,z) = \qquad (۲۳)$$

$$\begin{cases} 3 + 0.0075z & z < z_1(x) \ , \ z < z_2(x) \\ 6 & z_1(x) < z < z_2(x) \\ 4.25 & z > z_2(x) \end{cases}$$

$$z_2(x) = 0.75 - 0.25x \text{ و } z_1(x) = 0.5 + 0.25x$$

معادله خطوط مربوط به فصل مشترک دو محیط‌اند.

شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب مسیر پرتو با کمترین زمان-سیر به‌دست آمده از روش‌های تبلور شبیه‌سازی شده‌ی سریع و آشفتگی سه نقطه را نشان می‌دهند. همچنین در شکل ۱۱ نتیجه روش تبلور شبیه‌سازی شده را، در حالی که روند کاهش دما در الگوریتم به روند نمایی تغییر کرده است، مشاهده می‌کنید.

مزیت روش خمش آن است که فقط به مشخص کردن نقاط انتهایی برای محاسبه پرتو و زمان‌سیر مربوطه‌اش نیاز دارد. بنابراین چنانچه قبلاً هم ذکر شد، می‌توان با محدود کردن یک نقطه از مسیر پرتو (درحکم نقطه سوم) روی فصل مشترک، زمان‌سیر کمینه موضعی مربوط به پرتو بازتابی را به‌دست آورد (شکل ۱۲). مسیری که کمترین زمان‌سیر را با توجه به حدود تعیین شده بدهد، جواب مسئله خواهد بود.

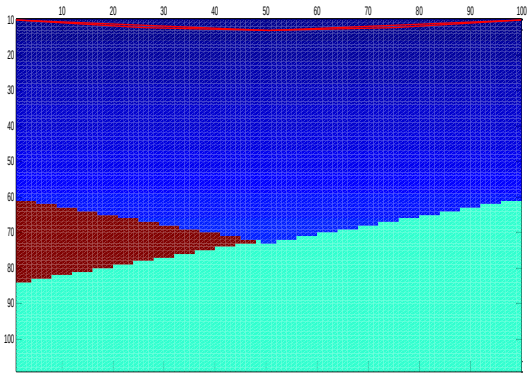
حدودی که در اینجا اِعمال می‌شوند معادله خطوط $z_1(x)$ و $z_2(x)$ هستند؛ به این معنی که نقطه میانی وادار به

عبور از یک نقطه واقع بر فصل مشترک پیش گفته می‌شود.

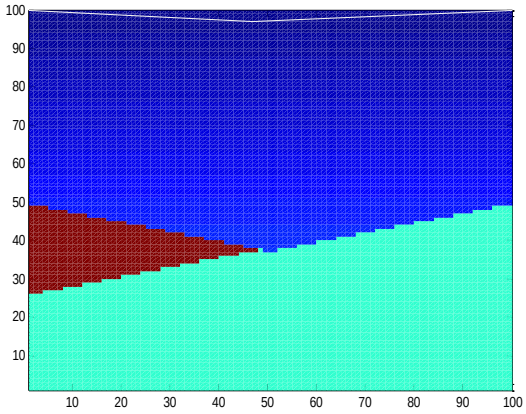
چنانچه تعداد نقاط در طول مسیر افزایش یابد، دقت انتگرال زمان‌سیر نیز افزایش می‌یابد. برای تحقیق صحت این مطلب، زمان‌سیر را که در اینجا به روش قاعده سیمسون محاسبه شده است، در نظر بگیرید:

$$T = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{v_i}+\frac{4}{v_{i+1}}+\frac{1}{v_{i+2}}\right) \qquad (۲۴)$$

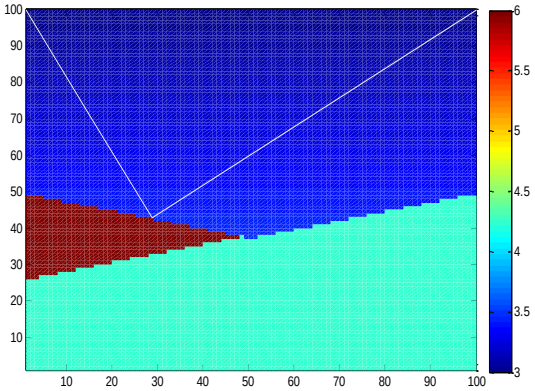
تعداد نقاط در طول مسیر پرتو k است، چنانچه تعداد این نقاط افزایش یابد، دقت تقریب قاعده سیمسون برای انتگرال زمان‌سیر افزایش می‌یابد (شکل ۱۳). مقایسه نتایج در شکل‌های ۹ و ۱۳ درستی این مطلب را نشان می‌دهد.



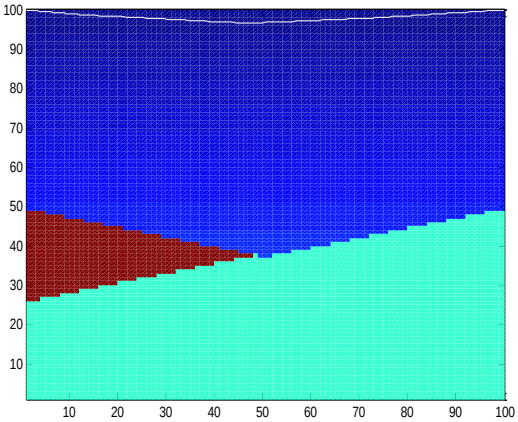
شکل ۱۰. مسیر پرتو با کمترین زمان‌سیر به روش آشفتگی سه نقطه برای مدل سرعت ۳.



شکل ۱۱. مسیر پرتو که در آن از روند کاهش دمای نمایی استفاده شده است ($T = 32.939\ s$).



شکل ۱۲. مسیر پرتو موج بازتابی که به کمک الگوریتم FSA به‌دست آمده است. در شکل، رنگ معرف مقدار سرعت لایه است.



شکل ۱۳. افزایش دقت زمان‌سیر با افزایش تعداد نقاط در طول مسیر پرتو ($T = 32.924$).

۹ نتیجه‌گیری

در بسیاری از موارد ردیابی پرتو به روش خمش ترجیح داده می‌شود، اما میزان دقت آن به روشی که برای اجرای آن به کار گرفته شده است بستگی دارد. روش‌های خمشی که به‌طور مستقیم از کمینه‌سازی زمان‌سیر بهره می‌برند، سرعت کافی دارند، اما دقت آنها به نوع روش کمینه‌سازی بستگی دارد. همه روش‌های خمش با یک مشکل مشترک مواجه‌اند، و آن به دام افتادن آنها در یک کمینه موضعی است. به‌منظور برطرف کردن این مشکل در این مقاله از روش تبلور شبیه‌سازی شده به منزلهٔ یکی از روش‌های کمینه‌سازی استفاده شد. روش عرضه شده در این مقاله، این مزیت را دارد که از یک کمینه موضعی گذر می‌کند و به

کمینه کلی دست یابد. توانمندی روش با اِعمال روی مدل‌های فرضی نشان داده شد و نتایج با روش آشفتگی سه نقطه مورد مقایسه قرار گرفت.

روشن شد که می‌توان به‌جای مشخص کردن صرفاً دو نقطه ابتدایی و انتهایی مسیر پرتو، سه نقطه ابتدا، انتها و نقطه‌ای محدود به فصل مشترک دو لایه در محیط را مشخص کرد. در این حالت زمان‌سیرهای کمینه موضعی مربوط به پرتوهای بازتابی، شکست مرزی، و مانند آن یافت می‌شود.

با ارزیابی کارآیی روش روی سه مدل سرعت فرضی نشان داده شد که روش معرفی شده بر دو کاستی متداول در روش‌های خمش دیگر فائق می‌آید. اول آنکه در این الگوریتم پاسخ نهایی مستقل از مسیر اولیه یا حدس اولیه است، و دوم آنکه نیازی به ساده بودن مدل سرعت نیست.

مراجع

Bóna, A. and Slawinski, M. A., 2009, Ray tracing by simulated annealing: bending method, Geophysics, **74**, N.2.

Bóna, A. and Slawinski, M. A., 2003, Fermat's principle for seismic rays in elastic continua, Journal of Applied Geophysics, **54**, 445-451.

Červený, V., 2001, Seismic ray theory, Cambridge University Press.

Julian, B. R. and Gubbins, D., 1977, Three-dimensional seismic ray tracing, Journal of Geophysics, **43**, 95-114.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. Jr. and Vecchi, M. P., 1983, Optimization by simulated annealing, Science, **220**, 671-680.

Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A. and Teller, E., 1953, Equation of state calculations by fast computing machines, Journal of Chemical Physics, **21**, 1087-1092.

Moser, T. J., Nolet, G. and Snieder, R., 1992, Ray bending revisited, Bulletin of the Seismological Society of America, **82**, 259-288.

Nourani, Y. and Andersen, B., 1998, A comparison of simulated annealing strategies, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **23**, 8373-8385.

Pereyra, B., Lee, W. H. K. and Keller, H. B., 1980, Solving two-point seismic ray tracing problems in a heterogeneous medium: Part 1 - a general adaptive finite difference method, Bulletin of the Seismological Society of America, **70**, 79-99.

Sen, M. and Stoffa, P. L., 1995, Global optimization methods in geophysical inversion, University of Texas at Austin, Elsevier.

Udias, A., 1999, Principle of seismology, Cambridge University Press.

Um, J. and Thurber, C., 1987, A fast algorithm for two-point seismic ray tracing, Bulletin of the Seismological Society of America, **77**, 972-986.

Velis, D. and Ulrych, T., 1996, Simulated annealing two-point ray tracing, Geophysical Research Letters, **23**, 201-204.

Yang, W., 2003, A basical study on two-point seismic ray tracing, Science direct.