

## برآورد ارزش در معرض ریسک با وجود ساختار وابستگی بین بازدهی‌های مالی: رهیافت مبتنی بر توابع کاپولا

غلامرضا کشاورز حداد<sup>۱\*</sup>، مهرداد حیرانی<sup>۲</sup>

۱. دانشیار، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مدیریت و اقتصاد G.k.Haddad@sharif.edu

۲. کارشناس ارشد علوم اقتصادی، دانشگاه صنعتی شریف Heyrani@gsme.sharif.edu

تاریخ دریافت: ۹۳/۰۳/۰۵ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۷/۰۸

### چکیده

شناسایی ساختار وابستگی بین دارایی‌های مالی و تأثیر آن در سنج‌های ریسک همچون ارزش در معرض ریسک دارایی‌های مالی از موضوعات مورد توجه محققان است. اما، یکی از چالش‌های موجود بر سر راه این هدف، مدل‌سازی توزیع‌های توأم در ادبیات اقتصاد مالی است. کاپولاها توابع توزیع توأم را به توزیع حاشیه‌ای تکین هر یک از متغیرها متصل کرده و ساختار وابستگی داده‌های چندمتغیره را به خوبی توصیف می‌کنند. در این پژوهش با انواع مختلف توابع کاپولا و مدل‌های واریانس ناهمسان شرطی تعمیم‌یافته ساختار وابستگی بین دو شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران در بازه زمانی دی ۱۳۸۳ تا اسفند ۱۳۹۱ ارزیابی می‌شود و تأثیر ساختار وابستگی در برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از آن‌ها بررسی می‌شود. نتایج تجربی پژوهش نشان می‌دهد وابستگی ساختاری نامتقارنی بین محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران وجود دارد. همچنین، یافته‌ها حاکی از دقت و کفایت بیشتر رهیافت Copula-GARCH نسبت به مدل‌های متداول در پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک سبد دارایی همچون EWMA، DCC-GARCH، M-GARCH و روش‌های شبیه‌سازی تاریخی است.

طبقه‌بندی JEL: G32، G33، C13، C58

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک، پس‌آزمایی، تابع کاپولا، ساختار وابستگی، واریانس ناهمسانی شرطی تعمیم‌یافته

\* نویسنده مسئول، تلفن تماس: ۰۲۱-۶۶۰۴۹۱۹۶

## ۱. مقدمه

برای اندازه‌گیری ریسک مالی معیارهای متعددی طی دهه‌های اخیر معرفی شده است. هر یک از این معیارها به نحوی به مقوله عدم اطمینان نگرسته‌اند و تعدادی از آن‌ها نیز مکمل یکدیگرند. یکی از معیارهایی که طی سال‌های اخیر در مدیریت ریسک بدان توجه شده ارزش در معرض ریسک (VaR)<sup>۱</sup> است. مؤسسه جی.پی. مورگان<sup>۲</sup> برای نخستین بار در سال ۱۹۹۳ از این معیار استفاده کرد. در حقیقت، ارزش در معرض ریسک حداکثر زیانی است که کاهش ارزش سبد دارایی برای دوره معینی در آینده با درصد اطمینانی معین از آن بیشتر نمی‌شود. اما ماهیت وابستگی بین بازدهی‌های مالی، شرایط بازارهای مالی، و تأثیر آن‌ها در سرمایه‌گذاری از موضوعات بااهمیت در محاسبه این سنج ریسک به‌شمار می‌رود؛ به نحوی که درک روابط بین دارایی‌های مالی تا حد زیادی درباره چگونگی سرمایه‌گذاری در این دارایی‌ها و، به تبع آن، پوشش مناسب ریسک ناشی از سرمایه‌گذاری کمک بسزایی می‌کند. بدین سبب شناسایی ساختار وابستگی بین دارایی‌های مالی و تأثیر آن در سنج ریسک دارایی‌های مالی از موضوعات مورد توجه محققان است.

اگرچه فهم روابط بین وقوع نتایج مختلف تا حد زیادی برای سرمایه‌گذاری بهینه با کمترین ریسک ممکن تأثیرگذار است، مدل‌سازی توزیع‌های توأم در ادبیات اقتصاد مالی یکی از چالش‌های موجود بر سر راه این هدف است. در این حیطه یک رهیافت جایگزین برای مدل‌سازی ساختار وابستگی بین داده‌های چندمتغیره، بدون تحمیل هرگونه فرضی بر توزیع‌های حاشیه‌ای، بر اساس توابع کاپولا<sup>۳</sup> پیشنهاد شده است که کاستی‌هایی همچون ضریب همبستگی خطی، عدم تقارن، و وابستگی دنباله‌ای در بین توزیع بازدهی‌های مالی را در نظر می‌گیرد. در توزیع توأم متغیرها، برای جداسازی توزیع حاشیه‌ای و ساختار وابستگی از توابع کاپولا استفاده می‌شود. به طور خاص، کاپولای ارشمیدسی برای لحاظ کردن عدم تقارن و وابستگی در دنباله‌های توزیع بازدهی‌ها به کار گرفته می‌شود. علاوه بر این، از توابع کاپولای ارشمیدسی برای در نظر گرفتن ساختار

1. Value at Risk (VaR)

2. J.P. Morgan

3. Copula

وابستگی بین بازده‌های سهام استفاده می‌شود (کاستینوت و دیگران<sup>۱</sup>، ۲۰۰۰؛ پاتون<sup>۲</sup>، ۲۰۰۴؛ کانلا و کولازو<sup>۳</sup>، ۲۰۰۶؛ و دیگران<sup>۴</sup>. طبق تعریف نلسن<sup>۵</sup> (۱۹۹۹)، کاپولاها توابعی هستند که توابع توزیع چندمتغیره را به توزیع حاشیه‌ای تک متغیره هر یک از آنها متصل می‌کنند. با این تفاسیر، در این مقاله سعی شده ساختار وابستگی بین دو شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی در بورس تهران با استفاده از توابع کاپولا مشخص شود و ارزش در معرض ریسک سبد متشکل از این دو شاخص، با توجه به ساختار وابستگی بین آنها تحت رهیافت Copula-GARCH برآورد گردد و با مدل‌های مشابه مقایسه شود. در این مقاله نخست مبانی نظری و پیشینه تحقیق حاضر بیان می‌شود. سپس، نویسندگان به روش‌شناسی پژوهش خواهند پرداخت. پس از معرفی داده‌های مورد استفاده، نتایج تجربی پژوهش و نتیجه این تحقیق ارائه خواهد شد.

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

ادبیات علمی مرتبط با ارزش در معرض ریسک، به طور عمده، به روش‌های برآورد مختلف تمرکز دارد. اولین آثار مرتبط با محاسبه ارزش در معرض ریسک عمدتاً در سه روش سنتی - شبیه‌سازی تاریخی<sup>۶</sup>، مونت کارلو<sup>۷</sup>، و روش واریانس - کوواریانس - خلاصه شده‌اند. هنگامی که تعداد دارایی‌های موجود در سبد دارایی افزایش یابد، در محاسبه ارزش در معرض ریسک روش سنتی فرض توزیع نرمال مشترک بین دارایی‌های موجود در سبد را با ضریب همبستگی خطی در نظر می‌گیرد. این در حالی است که شواهد تجربی نشان می‌دهد بسیاری از دارایی‌های مالی دارای توزیع با دنباله (دم) چاق و چولگی بیشتر نسبت به توزیع نرمال هستند. در نتیجه، تحمیل فرض توزیع نرمال مشترک و ضریب همبستگی خطی برای نشان دادن وابستگی بین بازدهی‌های مالی در

1. Costinot et al.

2. Patton

3. Canela and Collazo

4. Kole et al., 2005; Jondeau and Rockinger, 2006; Hu, 2006; Rodriguez, 2007; Sun et al., 2009; Ignatievay and Platen, 2010; Aloui et al., 2011; Cholletee et al., 2011; Garcia and Tsafack, 2011.

5. Nelsen

6. historical

7. Monte-Carlo

بازارهای مختلف مناسب نیست و تا حد زیادی به نتایج گمراه‌کننده منجر خواهد شد. در این میان، رویکرد کاپولا از ضعف روش‌های تحلیلی مبتنی بر ضریب همبستگی می‌کاهد و هم‌زمان دقت در خصوصیات غیرخطی و وابستگی‌های مجانبی را لحاظ می‌کند. همچنین، این توابع قادر به اندازه‌گیری وابستگی دنباله‌ای (دُمی) بالایی و پایینی توزیع‌های مختلف‌اند. بدین ترتیب، مدل‌های نام‌برده متناسب با شرایط واقعی‌اند و به مفروضات کمتری در استفاده از مدل‌ها نیاز دارند. از مهم‌ترین مقالات نوشته‌شده در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

دی‌کلمنته و رومانو<sup>۱</sup> (۲۰۰۴) یک برنامه بهینه‌سازی را برای مجموعه‌ای از ریسک‌های اعتباری، که در آن وابستگی بین ساختار دارایی‌های اعتباری توسط توابع کاپولا مدل‌سازی شده، پیشنهاد کردند. آن‌ها با در نظر گرفتن غیرنرمال بودن توزیع بازدهی‌ها با چهار مدل از توابع کاپولا - شامل کاپولای گوسی<sup>۲</sup>، تی-کاپولا<sup>۳</sup>، تی-کاپولای گروه‌بندی‌شده<sup>۴</sup>، و کاپولای کلایتون<sup>۵</sup> - ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار<sup>۶</sup> را محاسبه کردند. پالارو و هوتا<sup>۷</sup> (۲۰۰۶) در پژوهشی به برآورد ارزش در معرض ریسک پرتفوی متشکل از دو شاخص Nasdaq و S&P500 در بازه زمانی دوم ژانویه ۱۹۹۲ تا اول اکتبر ۲۰۰۳ با استفاده از برخی از توابع کاپولا، همچون کاپولای تی - استیودنت، کاپولای پلاکت، و SJC کاپولا، و مقایسه با مدل‌های مشابه برآورد ارزش در معرض ریسک پرداختند. نتایج تجربی آن‌ها نشان می‌دهد که مدل SJC-Copula<sup>۸</sup> - GARCH-E نسبت به مدل‌های مورد بررسی، همچون EWMA<sup>۹</sup>، MGARCH، DCC-MGARCH، و شبیه‌سازی تاریخی، از کفایت بیشتری برخوردار است. آزون و سیفتر<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۷) با استفاده از رهیافت Copula-GARCH در پژوهشی ارزش در معرض ریسک را برای پرتفوی متشکل از دو شاخص Bovespa و IPC مکزیک در فاصله

1. Di Clemente and Romano
2. Gaussian copula
3. Student's t-copula
4. Grouped t-copula
5. Clayton n-copula
6. Expected shortfall
7. Helder Parra Palaro and Luiz Koodi Hotta
8. Symmetrized Joe-Clayton Copula
9. Exponential Weighted Moving Average (EWMA)
10. Ozun and Cifter

زمانی ۲۰۰۷/۲/۲۸ تا ۲۰۰۱/۱/۲ پیش‌بینی کردند. نتایج آن‌ها حاکی از دقت و کفایت بیشتر رهیافت Copula-GARCH نسبت به مدل EWMA است. هانگ و همکاران<sup>۱</sup> (۲۰۰۹) به برآورد ارزش در معرض ریسک با رهیافت ترکیب توابع کاپولای ارشمیدسی و مدل‌های واریانس ناهمسان شرطی برای داده‌های روزانه سهام NASDAQ و TAIEX (شاخص سهام بورس تایوان) بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۷ پرداختند. نتایج حاصل از این پژوهش گویای این مطلب است که مدل به کار گرفته شده به نسبت مدل‌های مشابه در برآورد ارزش در معرض ریسک دارای دقت بیشتری است؛ به نحوی که در این میان کاپولای تی استیودنت با توزیع حاشیه‌ای GARCH نرمال در بین توابع کاپولا دارای بهترین عملکرد است.

در این پژوهش نیز با پیروی از مطالعات پالارو و هوتا، آزون و سیفتر، و هانگ و همکاران با استفاده از رهیافت Copula-GARCH<sup>۲</sup> به برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از دو شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران در بازه زمانی دی ۱۳۸۳ تا اسفند ۱۳۹۱ خواهیم پرداخت. راکینجر و جاندئو<sup>۳</sup> (۲۰۰۱) برای نخستین بار از این رهیافت برای مدل‌سازی وابستگی و ریسک پرتفوی استفاده کردند. میسوزی و مازالا<sup>۴</sup> (۲۰۰۵)، پاتون (۲۰۰۴)، راکینجر و جاندئو (۲۰۰۱)، پالارو و هوتا (۲۰۰۶)، هسو و دیگران<sup>۵</sup> (۲۰۰۸)، چیو و تسی<sup>۶</sup> (۲۰۰۸)، و هانگ و همکاران<sup>۷</sup> (۲۰۰۹) در تحقیقات تجربی مختلف از این رویکرد استفاده کرده‌اند.

### ۳. روش‌شناسی پژوهش

در این مقاله توزیع توأم را با استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای تک‌متغیره به دست خواهیم آورد. در این راستا از رهیافت کاپولا استفاده می‌کنیم. در مدل‌سازی توزیع‌های حاشیه‌ای از مدل‌های واریانس ناهمسانی شرطی تعمیم یافته (GARCH) استفاده خواهیم کرد. سپس، از ترکیب این دو با استفاده از رهیافت Copula-GARCH به

- 
1. Jen-Jsung Huang et al.
  2. Copula - Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity. (Copula-GARCH)
  3. Rockinger and Jondeau
  4. Micocci and Masala
  5. Hsu et al
  6. Chiou and Tsay
  7. Jen-Jsung Huang et al.

پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران خواهیم پرداخت.

### ۱.۳. مدلی برای توزیع حاشیه‌ای

مدل‌های واریانس ناهمسانی شرطی تعمیم‌یافته (GARCH) ابزاری توانمند در داده‌های سری زمانی، به‌ویژه در برنامه‌های اقتصاد مالی، هستند. این مدل‌ها به تجزیه و تحلیل و پیش‌بینی تلاطم در بازدهی‌های مالی می‌پردازند. انگل<sup>۱</sup> (۱۹۸۲) برای نخستین بار از این مدل‌ها برای پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی سهام و نرخ ارز استفاده کرد.

#### • مدل GARCH(1,1)

برای لحاظ کردن اطلاعات غیرخطی موجود در میان پسماندهای رگرسیون در هنگام تخمین پارامترهای مدل ARIMA، مدل‌های خانواده ARCH، و در حالت تعمیم‌یافته آن مدل خانواده GARCH ابزار تحلیلی مناسبی هستند و به صورت معادله ۱ و ۲ تصریح می‌شوند.

$$r_t = \Phi + \sum_{i=1}^p \Phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} + a_t ; a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2)$$

در این معادله  $\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2$  نشان‌دهنده بخش ARCH و  $\sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^2$  مشخص‌کننده بخش GARCH است. روش به‌کاربرده‌شده برای برآورد پارامترها با استفاده از تابع راست‌نمایی به روش حداکثر راست‌نمایی<sup>۲</sup> (MLE) با فرض  $\Omega_{t-1} = \{a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-n}\}$  خواهد بود. بدین ترتیب، تابع چگالی مشترک را می‌توان به شکل معادله ۳ نوشت.

$$f(a_1, \dots, a_t) = f(a_t | \Omega_{t-1}) f(a_{t-1} | \Omega_{t-2}) \dots f(a_1 | \Omega_0) f(a) \quad (3)$$

با داده‌های معین  $a_1, \dots, a_t$  تابع لگاریتم حداکثر راست‌نمایی<sup>۳</sup> (LLF) از معادله ۴ پیروی خواهد کرد.

1. Engle  
2. Maximum-Likelihood Estimation (MLE)  
3. Log-Likelihood Function

$$LLF = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{n-k} | \Omega_{n-k-1}) \quad (۴)$$

این حالت را می‌توان در هر توزیع دل‌خواه از  $\varepsilon_t$  برای مدل‌سازی تلاطم استفاده کرد. در اینجا LLF می‌تواند حداکثر مقدار عددی را با روش MLE بدهد. بدین ترتیب، با استفاده از متغیرهای  $(x_1, x_2, \dots, x_T)$  توزیع حاشیه‌ای شرطی GARCH(1,1) برای  $X_{T+1}$  به شکل معادله ۵ برای دو توزیع نرمال و تی - استیودنت تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} P(X_{T+1} \leq x | \Omega_T) &= P(a_{T+1} \leq (x - \mu) | \Omega_T) \\ &= P(\varepsilon_{T+1} \leq \frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} | \Omega_T) \\ &= \begin{cases} N\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} | \Omega_T\right), & \text{if } \varepsilon \sim N(0, 1) \\ t_d\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_1 a_t^2 + \beta \sigma_t^2}} | \Omega_T\right), & \text{if } \varepsilon \sim t_d \end{cases} \end{aligned} \quad (۵)$$

#### • مدل GJR-GARCH(1,1)

مشکل اصلی مدل‌های پایه GARCH این است که فرایند واریانس را نامتقارن در نظر می‌گیرند. بدین معنا که در این حالت پراکندگی نادیده گرفته می‌شود. به علاوه، فرض می‌شود که اطلاعات مثبت و منفی اثر یکسانی در تلاطم (معادله واریانس مدل) می‌گذارد، اما این شرایط مانند شرایط واقعی در بازارهای مالی نیست. مطالعات نشان می‌دهد زمانی که به بازارهای مالی شوک وارد می‌شود، قیمت‌ها با نوسانات شدیدتری افت می‌کنند. در مقابل، زمانی که بازارهای مالی به سمت مثبت گرایش دارند، قیمت‌ها با نوسانات کمتری افزایش می‌یابند. این پدیده به آثار اهرمی در بازدهی‌های مالی نسبت داده می‌شود.

اثر اهرمی واریانس پویا و نامتقارن، به علت وجود اثر نامتقارن در واریانس شرطی، اثر بازگشتی در مدل GARCH را نمایش می‌دهد. بدین ترتیب، مدل‌های نامتقارن GARCH رواج بیشتری یافتند. در این میان، مدل GJR-GARCH توسط گلوستن،

جاگانشن و رانل<sup>۱</sup> (۱۹۹۳) با لحاظ کردن مفروضات بالا به صورت معادله ۶ تعریف می‌شود.

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^n \gamma_j s_{t-j} a_{t-j}^2 \quad (6)$$

که در آن  $S_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{if } a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$  یعنی اینکه بسته به مقدار  $a_{t-i}$  که در بالا یا پایین مقدار آستانه قرار گیرد  $a_{t-i}^2$  دارای آثار متفاوتی بر واریانس شرطی  $\sigma_t^2$  است؛ به طوری که برای  $a_{t-i} > 0$  اثر کل به وسیله  $\alpha_i a_{t-i}^2$  تعیین می‌شود و هنگامی که  $a_{t-i} < 0$  باشد، اثر کل یک شوک وارد شده بر بازدهی به وسیله  $(\alpha_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$  اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که برای اخبار بد مقدار برآورد شده برای  $\gamma_i$  مثبت باشد. علاوه بر این،  $\alpha > 0, \alpha_i \geq 0, \beta \geq 0, \beta + \gamma \geq 0$  و  $\alpha + \beta + \frac{1}{\gamma} \leq 1$  است. توزیع حاشیه‌ای شرطی  $x_{t-1}$  تقریباً مشابه مدل GARCH است.

$$P(X_{T+1} \leq x | \Omega_t) = P(\varepsilon_{t+1} \leq \frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_i a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}} | \Omega_t) \\ = \begin{cases} N\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_i a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}} | \Omega_t\right), & \text{if } \varepsilon \sim N(0, 1) \\ t_d\left(\frac{(x - \mu)}{\sqrt{\alpha + \alpha_i a_t^2 + \beta \sigma_t^2 + \gamma s_t \varepsilon_t^2}} | \Omega_t\right), & \text{if } \varepsilon \sim t_d \end{cases} \quad (7)$$

### ۲.۳. نظریه کاپولا و روش برآورد

روشن است که ارزش در معرض ریسک سبد دارایی به وسیله بازدهی هر کدام از دارایی‌های موجود در سبد دارایی قابل تعریف است. از سوی دیگر، ساختار وابستگی<sup>۲</sup> و به‌خصوص ساختار وابستگی از توزیع دامنه‌های حدی (فرین) محاسبه ارزش در معرض ریسک را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. به عبارت دیگر، ضریب همبستگی، که از رایج‌ترین معیارهای اندازه‌گیری وابستگی در برنامه‌های کاربردی اقتصاد مالی است، در

1. Glosten, Jagannathan and Runkle  
2. Dependent Structure



اغلب موارد برای توصیف و برآورد ساختار وابستگی در زیان‌های بزرگ ناکاراست. بنابراین، غالباً به برآورد نه‌چندان دقیق ارزش در معرض ریسک منجر می‌شود.

### ۱.۲.۳. قضیه اسکلار<sup>۱</sup>

اسکلار (۱۹۵۹) برای نخستین بار توابع کاپولا را در قضیه‌ای به صورت زیر معرفی کرد: فرض کنید  $F(x_1, x_2)$  نشان‌دهنده یک تابع توزیع توأم برای دو متغیر تصادفی  $X_1, X_2$  با توابع حاشیه‌ای  $F_1(x_1), F_2(x_2)$  باشد. آنگاه یک تابع کاپولا مانند  $C$  برای هر مقادیر حقیقی  $x_1, x_2$  به صورت زیر وجود دارد.

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (۸)$$

که با مشتق گرفتن از دو طرف معادله ۸ داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1 \partial F_2} f_1(x_1) f_2(x_2) \\ &= \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \times \prod_i \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \\ &= c(\tilde{u}) \times \prod_i f_i(x_i) \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن  $f_i$  تابع چگالی  $F_i$  و  $u_i = F_i(x_i)$  برای هر  $i = 1, 2$ ،  $\tilde{u} = (u_1, u_2)$  و  $c(\tilde{u})$  تابع چگالی کاپولا است. هنگامی که متغیرها پیوسته باشند، قضیه اسکلار نشان می‌دهد که هر تابع توزیع احتمال چندمتغیره می‌تواند با یک توزیع حاشیه‌ای و یک ساختار وابستگی به صورت معادله ۹ نشان داده شود.

اگر همه حاشیه‌ها پیوسته باشند، آنگاه کاپولا یکتاست و به صورت یکتا می‌توان آن را با استفاده از مقادیر مختلف تابع توزیع حاشیه‌ای بیان کرد. مهم‌ترین ویژگی نتیجه یادشده آن است که هیچ الزامی مبنی بر تشابه توزیع‌های حاشیه‌ای وجود ندارد. همچنین، لازم نیست که انتخاب کاپولا به توزیع حاشیه‌ای محدود شود.

1. Sklar's Theorem

### ۲.۲.۳. وابستگی دنباله‌ای (دُمی)<sup>۱</sup>

ضریب همبستگی خطی ساختار وابستگی کلی را نشان می‌دهد و بر اساس تابع توزیع توأم  $F$  قابل بیان است. در حالی که گاهی اوقات علاقه‌مند به بررسی وابستگی موضعی هستیم، که در داده‌های مالی و اقتصادی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این حالت از نوعی از وابستگی، که به وابستگی دنباله‌ای (دُمی) معروف است، استفاده می‌کنیم. در حقیقت، وابستگی دنباله‌ای وابستگی بین متغیرها را در یک چهارم بالایی (چارک) سمت راست و یک چهارم پایینی (چارک) سمت چپ روی  $I^2 = [0, 1]^T$  اندازه می‌گیرد. وابستگی دنباله‌ای رابطه‌ی وابستگی بین مقادیر بزرگ (کوچک) از یک متغیر با مقادیر بزرگ (کوچک) از متغیر دیگر را توصیف می‌کند، که تحت عنوان وابستگی دنباله‌ای بالایی (پایینی) تعریف می‌شوند.

در نظر بگیرید  $X = (X_1, X_2)^T$  یک بردار تصادفی دو بُعدی باشد، گوییم  $X$  دارای وابستگی دنباله‌ی بالایی است، هر گاه:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P[X_1 > F_1^{(-1)}(u_1) | X_2 > F_2^{(-1)}(u_2)] \quad (10)$$

که در آن  $F_i^{-1}$  معکوس تابع توزیع تجمعی برای  $X_i$  است. در نتیجه  $X$  در صورت  $\lambda_U = 0$  به دنباله‌ی بالایی وابستگی نخواهد داشت. به علاوه، گوییم  $X = (X_1, X_2)^T$  دارای وابستگی به دنباله‌ی پایین است هر گاه:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P[X_1 \leq F_1^{(-1)}(u_1) | X_2 \leq F_2^{(-1)}(u_2)] \quad (11)$$

### ۲.۲.۳. کاپولای نرمال<sup>۲</sup>

سونگ<sup>۳</sup> (۲۰۰۰) تابع توزیع خانواده‌ی تابع کاپولای نرمال را به صورت معادله ۱۲ بیان کرد:

$$C^{Ga}(u_1, u_2; \rho) = \Psi_\rho(\Psi^{-1}(u_1), \Psi^{-1}(u_2)) \quad (12)$$

که در آن  $\Psi_\rho$  تابع توزیع نرمال استاندارد دومتغیره با ضریب همبستگی  $\rho \in (0, 1)$  است.

1. Tail Dependence  
2. normal copula  
3. Song

### ۴.۲.۳. تابع کاپولای تی - استیودنت

امبرجت و همکاران (۲۰۰۱) تابع توزیع تابع کاپولای تی - استیودنت<sup>۱</sup> را به صورت معادله ۱۳ بیان کردند.

$$C^T(u_1, u_2) = T_{v,p}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2)) \quad (13)$$

که در اینجا  $T_{v,p}$  توزیع دومتغیره تی - استیودنت،  $p$  ضریب همبستگی،  $v$  درجه آزادی، و  $t_v^{-1}$  معکوس توزیع تکمتغیره تی - استیودنت است. امبرجت و همکاران (۲۰۰۱) نشان دادند که تابع کاپولای تی - استیودنت بیانگر وابستگی دنباله‌ای بالایی و پایینی به طور هم‌زمان است.

### ۵.۲.۳. کاپولای ارشمیدسی

کاپولای ارشمیدسی یک دسته مهم از توابع کاپولا با ساختار ساده و خصوصیات تحلیلی فراوان است. کاپولای ارشمیدسی دومتغیره به صورت  $C(u_1, u_2) = \Phi^{[-1]}(\Phi(u_1) + \Phi(u_2))$  است، که پیوسته، اکیداً کاهشی، و دارای تابع مولد  $[0, \infty] \rightarrow [0, 1]: \Phi$  به طوری که  $\Phi(1) = 0$  و تابع شبه‌معکوس  $\Phi^{[-1]}$  به صورت معادله ۱۴ است.

$$\Phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \Phi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \Phi(0) \\ \Phi(0) & \Phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (14)$$

$\Phi$  را اکید گویند، هرگاه  $\Phi(0) = \infty$ . شایان ذکر است که از مشتقات یک‌طرفه  $\Phi$  وجود داشته و  $\Phi$  یک تابع محدب است. به طور خاص  $\Phi'(0)$  و  $\Phi'(1)$  معنی مشتقات یک‌طرفه در مرز دامنه‌های  $\Phi$  هستند.

سه نوع کاپولای ارشمیدسی به صورت رایج استفاده می‌شود: کاپولای کلایتون<sup>۲</sup> (کلایتون، ۱۹۷۸)، کاپولای فرانک<sup>۳</sup> (فرانک، ۱۹۷۹)، و کاپولای گامبل<sup>۴</sup> (گامبل، ۱۹۶۰)، که در ادامه به آن‌ها اشاره خواهد شد.

---

1. student copula  
2. Clayton copula  
3. Frank copula  
4. Gumbel copula

• کاپولای کلاپتون

این تابع کاپولا دارای توزیع نامتقارن است؛ به نحوی که در آن وابستگی به دنباله منفی بیشتر از وابستگی به دنباله مثبت است.

$$C_C(u_1, u_2) = \max[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1), 0] \quad (15)$$

تابع مولد آن به صورت معادله ۱۶ است.

$$\varphi(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta} - 1), \quad \text{where } \theta \in [-1, +\infty) \quad (16)$$

که در آن وابستگی به دنباله بالا  $\lambda_{U_C} = 0$  و وابستگی به دنباله پایین  $\lambda_{L_C} = 2^{-\theta-1}$  خواهد بود.

• کاپولای گامبل

این نوع از تابع کاپولا نیز همچون کاپولای کلاپتون دارای توزیع نامتقارن است. برخلاف کاپولای کلاپتون وابستگی دنباله مثبت در آن بیشتر از وابستگی به دنباله منفی است.

$$C_G(u_1, u_2) = \exp(-[(-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta]^{\theta^{-1}}) \quad (17)$$

این تابع کاپولا دارای تابع مولد (معادله ۱۸) است.

$$\varphi(t) = (-\ln(t))^\theta, \quad \theta \geq 1 \quad (18)$$

بنابراین، در تابع کاپولای گامبل وابستگی به دنباله بالا  $\lambda_{U_G} = 2 - 2^{-\theta}$  و وابستگی به دنباله پایین  $\lambda_{L_G} = 0$  خواهد بود.

• کاپولای فرانک

این نوع از تابع کاپولا حالت متقارن از کاپولای ارشمیدسی را به صورت معادله ۱۹ نمایش می‌دهد:

$$C_F(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (19)$$

با تابع مولد:

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \quad \theta \neq 1 \quad (20)$$

با توجه به تقارن تابع کاپولای فرانک در این تابع کاپولا وابستگی به دنباله بالا  $\lambda_{U_F} = 0$  و وابستگی دنباله پایین  $\lambda_{L_F} = 0$  خواهد بود.

## ۶.۲.۳. برآورد پارامتر کاپولا

در این بخش برخی از رایج‌ترین روش‌های برآورد پارامتر کاپولا، که در ادبیات اقتصاد مالی استفاده می‌شود، بیان خواهد شد.

## • روش حداکثر راست‌نمایی (MLE)

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی با توابع توزیع  $F_1, \dots, F_n$  باشند و پارامترهای مربوط به این توزیع‌ها به ترتیب  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  بوده و دارای تابع توزیع توأم  $F$  باشند، آنگاه با توجه به قضیه اسکلار داریم:

$$F(x_1, \dots, x_n | \alpha_1, \dots, \alpha_n, \theta) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (21)$$

در اینجا  $C$  تابع کاپولا با پارامتر  $\theta$  است. تابع چگالی توأم  $X_1, \dots, X_n$  به صورت معادله ۲۲ است.

$$f(x_1, \dots, x_n | \alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) = c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i) \quad (22)$$

$c$  تابع چگالی تابع کاپولای  $C$  است. بنابراین، تابع راست‌نمایی به صورت معادله ۲۳ است.

$$l(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) = \prod_{i=1}^n (c(F_1(x_i; \alpha_1), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i)) \quad (23)$$

مشتق عبارت بالا را نسبت به هر یک از پارامترهای  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  و  $\theta$  گرفته، با متحد قراردادن روابط حاصل با صفر پارامترها را برآورد می‌کنیم.

• روش استنتاج برای حاشیه‌ها (IFM)<sup>۱</sup>

روش حداکثر راست‌نمایی به محاسبات زیادی، به خصوص در مواردی که ابعاد زیاد باشد، نیاز دارد، زیرا در این روش باید به طور هم‌زمان پارامترهای توزیع‌های حاشیه‌ای و پارامتر وابستگی نشان داده‌شده به وسیله تابع کاپولا برآورد شوند. از این رو، دورلمن<sup>۲</sup> (۲۰۰۰) برای برآورد این مجموعه از پارامترها روش دومرحله‌ای را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

1. inference for the margins  
2. Durrelman et al.

در اولین مرحله پارامترهای حاشیه ( $\theta_1$ ) را با اجرای برآورد برای توزیع های حاشیه ای تک متغیره برآورد می کنیم.

$$\hat{\theta}_1 = \text{Arg Max}_{\theta_1} \sum_{t=1}^N \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}; \theta_1) \quad (24)$$

در دومین گام با فرض  $\hat{\theta}_1$  پارامترهای تابع کاپولا ( $\theta_2$ ) را برآورد می کنیم.

$$\hat{\theta}_2 = \text{Arg Max}_{\theta_2} \sum_{t=1}^N \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt})) \quad (25)$$

این روش روش استنتاج برای حاشیه ها (IFM) نامیده می شود.

### ۳.۳. ارزش در معرض ریسک

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، ارزش در معرض ریسک بیشترین زیان مورد انتظار یک سرمایه گذاری در افق زمانی مشخص، و در سطح اطمینان معین را اندازه گیری می نماید. بیان ریاضی ارزش در معرض ریسک به صورت معادله ۲۶ تعریف می شود.

$$\Pr[p_1 - p \leq \text{VaR}] \leq \alpha \quad (26)$$

که  $P$  ارزش سبد دارایی در زمان صفر و  $P_1$  ارزش سبد در زمان یک است و  $\alpha$  نیز سطح معناداری آماری است. حال اگر تابع توزیع تجمعی ارزش سبد دارایی در دوره آتی را به شکل  $F(p)$  نشان دهیم، معکوس تابع توزیع تجمعی نشان دهنده کوانتیل توزیع بازدهی است. بنابراین، ارزش در معرض ریسک را می توان به صورت  $\text{VaR}(\alpha) = F^{-1}(1 - \alpha)$  به دست آورد.

برای برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی با استفاده از رویکرد Copula-GARCH بازدهی سبد دارایی  $X_{p,t}$  با دو دارایی  $X_{1,t}$  و  $X_{2,t}$  در نظر گرفته شده است. بازدهی آن به صورت تجربی با وزن دهی به دو دارایی موجود در سبد به شکل معادله ۲۷ بیان شده است.

$$X_{p,t} = wX_{1,t} + (1-w)X_{2,t} \quad (27)$$

که در آن  $w$  و  $(1-w)$  نشان دهنده وزن دارایی های موجود است. در پژوهش حاضر این وزن ها مساوی در نظر گرفته شده اند؛ لازم به ذکر است، لحاظ این فرض منجر به تحمیل

قیدی برای مسئله نخواهد شد. بدین ترتیب، بازدهی سبد دارایی به شکل معادله ۲۸ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} P(X_{p,t} \leq \text{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\ = P(wX_{1,t} + (1-w)X_{r,t} \leq \text{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\ = P(X_{1,t} \leq \frac{\text{VaR}_t(\alpha)}{w} - \frac{1-w}{w}X_{r,t} | \Omega_{t-1}) = \alpha \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین، با لحاظ وزن مساوی به دارایی‌های موجود در سبد دارایی و در نظر گرفتن سطح معناداری ۱ درصد به معادله ۲۹ تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned} P(X_{p,t} \leq \text{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) = P(\frac{1}{2}X_{1,t} + \frac{1}{2}X_{r,t} \leq \text{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\ = P(X_{1,t} \leq 2\text{VaR}_t(\alpha) - X_{r,t} | \Omega_{t-1}) = 0.01 \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به پیوسته بودن بازدهی سبد دارایی برآورد ارزش در معرض ریسک به شکل معادله ۳۰ تعریف می‌شود و تئوری اسکالر معرفی خواهد شد.

$$\begin{aligned} P(X_{p,t} \leq \text{VaR}_t(\alpha) | \Omega_{t-1}) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{2\text{VaR}_t - X_{r,t}} f(x_{1,t}, x_{r,t} | \Omega_{t-1}) dx_{1,t} dx_{r,t} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{2\text{VaR}_t - X_{r,t}} c(F(x_{1,t}), F(x_{r,t}) | \Omega_{t-1}) f(x_{1,t} | \Omega_{t-1}) \\ \times f(x_{r,t} | \Omega_{t-1}) dx_{1,t} dx_{r,t} \end{aligned} \quad (30)$$

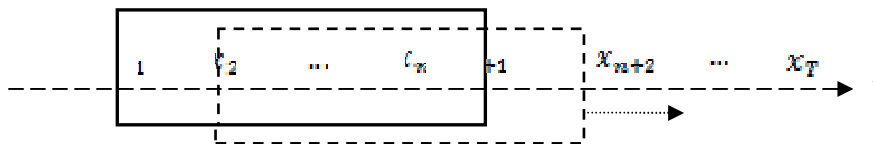
حال می‌توان ارزش در معرض ریسک سبد دارایی را محاسبه و برآورد کرد. برای ارزیابی دقت مدل‌های ارزش در معرض ریسک از چند نوع از روش‌های پس‌آزمایی همچون آزمون کوپیک<sup>۱</sup> (آزمون پوشش غیرشرطی)<sup>۲</sup>، آزمون کریستوفرسن<sup>۳</sup> (۱۹۹۸)، و پس‌آزمایی بر مبنای تابع زیان استفاده می‌شود.

#### ۴.۳. پس‌آزمایی<sup>۴</sup>

برای استفاده مطمئن از مدل‌های پیش‌بینی‌کننده ارزش در معرض ریسک، لازم است

- 
1. Kupiec Test
  2. Unconditional Coverage Test
  3. Christoffersen Test
  4. Back Testing

اعتبار آن‌ها با دقت بررسی و عملکرد آن‌ها ارزیابی شود. یک روش مفید برای سنجش عملکرد این معیار پس‌آزمایی است که با به‌کارگیری روش‌های کمی به تعیین مطابقت پیش‌بینی‌های مدل با مفروضاتی که مدل بر اساس آن‌ها بنا شده می‌پردازد. همچنین، امکان رتبه‌بندی روش‌های مختلف محاسبه ارزش در معرض ریسک را فراهم می‌کند. در فرایند پس‌آزمایی ریسک دوره‌های گذشته محاسبه می‌شود و با مقایسه ریسک به‌دست‌آمده از مدل با داده‌های واقعی می‌توان عملکرد مدل را سنجید. در پس‌آزمایی از رهیافت پنجره غلتان<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. در شکل ۱ فرایند انتخاب داده‌های تخمین توسط پنجره غلتان قابل مشاهده است.



شکل ۱. چگونگی فرایند انتخاب داده‌ها توسط پنجره غلتان

### ۱.۴.۳. آزمون کوپیک<sup>۲</sup>

برای محاسبه دقت مدل‌ها در تعیین ارزش در معرض خطر می‌توان از آزمون کوپیک (آزمون پوشش غیرشرطی<sup>۳</sup>) استفاده کرد. این آزمون در سال ۱۹۹۵ بر اساس آزمون نسبت حداکثر راست‌نمایی برای تعیین دقت مدل‌های مختلف در بازه اطمینان داده‌شده ابداع شد. با در نظر گرفتن دو حالت شکست و موفقیت یک توزیع دوجمله‌ای به‌دست می‌آید و می‌توان متغیر  $I_t(\alpha)$  را، که  $\alpha$  سطح پوشش ارزش در معرض ریسک مربوط به مشاهدات است، به صورت معادله ۳۱ تعریف نمود:

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } r_t < \text{VaR}_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

که  $r_t$  بازدهی سبد دارایی در دوره  $t$  و  $\text{VaR}_{t|t-1}(\alpha)$  ارزش در معرض ریسک درصدی

- 
1. Rolling Window
  2. Kupiec Test
  3. Unconditional Coverage Test



دوره  $t$  مشروط بر اطلاعات موجود تا دوره  $t-1$  است. بنابراین، به منظور آزمون دقت مدل، باید فرضیه صفر (مجموع شکست‌ها دارای توزیع دوجمله‌ای است) در برابر فرضیه مقابل آن (مجموع شکست‌ها دارای توزیع دوجمله‌ای نیست) آزمون شود. یک معیار مهم برای آزمون این فرضیه توجه به نسبت تخطی<sup>۱</sup> یا نسبت شکست است که از طریق نسبت تعداد تخطی‌ها بر کل تعداد پیش‌بینی‌ها به دست می‌آید. می‌توان فرضیه صفر آزمون کوپیک را به صورت برابر بودن نسبت شکست و سطح پوشش مورد انتظار تعریف نمود.

برای آزمون فرضیه اخیر می‌توان از آزمون نسبت حداکثر راست‌نمایی استفاده کرد که دارای توزیع کای دو با درجه آزادی یک است و آماره آن عبارت است از:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left( \frac{(1 - \hat{\alpha})^{T-x} \hat{\alpha}^x}{(1 - \alpha)^{T-x} \alpha^x} \right) \quad (32)$$

که در آن  $\hat{\alpha}$  نسبت تعداد دفعات تحقق شکست در پیش‌بینی مقدار خطر به کل تعداد  $Var_t(\alpha)$  محاسبه شده است. اگر آماره آزمون پوشش غیرشرطی بیشتر از مقدار بحرانی توزیع کای دو باشد، فرضیه صفر رد می‌شود و نمی‌توان پذیرفت که روش مورد نظر ارزش در معرض ریسک را به‌درستی برآورد می‌کند یا، به عبارتی دیگر، از کفایت برخوردار نیست.

### ۲.۴.۳. آزمون کریستوفرسن

کریستوفرسن (۱۹۹۸) با در نظر گرفتن یک آماره مجزا برای آزمون استقلال تخطی‌ها به توسعه آزمون کوپیک پرداخت و آزمونی برای سطح پوشش شرطی<sup>۲</sup> پیشنهاد کرد. این آزمون به بررسی دو ویژگی نرخ شکست صحیح و استقلال تخطی‌ها (که از ویژگی‌های مدل‌های VaR خوب است) می‌پردازد. بنابراین، این آزمون ترکیبی از آزمون سطح پوشش غیرشرطی و استقلال تخطی‌هاست و آماره آزمون آن از ترکیب آماره آزمون نسبت شکست‌های کوپیک<sup>۳</sup> (پوشش غیرشرطی) و آماره آزمون استقلال حاصل می‌شود، یعنی:

$$LR_{CC} = LR_{uc} + LR_{ind} \quad (33)$$

- 
1. violation ratio
  2. conditional coverage level
  3. Kupiec's Proportion of Failures (POF) -Test

بر مبنای آزمون پوشش غیرشرطی، اگر مدل دقیق<sup>۱</sup> باشد، نباید تخطی امروز وابسته به این موضوع باشد که آیا در روز قبل تخطی رخ داده است یا خیر. با ترکیب نمودن آماره آزمون نسبت شکست‌های کوپیک و استقلال تخطی‌ها می‌توان آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن را، که دارای توزیع کای دو با درجه آزادی دو است، انجام داد. در قالب آزمون کریستوفرسن می‌توان با محاسبه مجزای آماره‌های آزمون نسبت شکست‌های کوپیک ( $LR_{uc}$ ) و استقلال تخطی‌ها ( $LR_{ind}$ ) را ارزیابی نمود که علت رد شدن فرضیه صفر (تخطی‌ها به طور مستقل از هم (iid) دارای توزیع برنولی با احتمال شکست  $\alpha$  هستند) غیردقیق بودن سطح پوشش بوده یا خوشه‌ای بودن تخطی‌ها. کمپل<sup>۲</sup> (۲۰۰۵) یادآوری می‌کند که در برخی از موارد ممکن است مدل مفروض در آزمون مشترک موفق شود، در حالی که در آزمون‌های مجزای استقلال یا پوشش غیرشرطی شکست خورده است. بنابراین، حتی اگر آزمون مشترک نتیجه مثبتی داشت، باید نتیجه آزمون‌های مجزا را نیز بررسی کرد.

### ۳.۴.۳. پس‌آزمایی بر مبنای تابع زیان

روش‌هایی که این آزمون‌های کفایت را با موفقیت پشت سر می‌گذارند به مرحله دوم می‌رسند. در مرحله اول آزمون‌هایی داشتیم که صرفاً تعداد تخطی در آن مهم بود و بزرگی تخطی‌ها در انتخاب ورود مدل به مرحله دوم اثری نداشت. بنابراین، تابع زیانی را که بتواند بزرگی تخطی‌ها را دربر گیرد به صورت معادله ۳۴ تعریف می‌کنیم:

$$If_{t+1} = \begin{cases} [x_{t+1} - VaR_t]^+ & \text{if } x_{t+1} < VaR_t \\ 0 & \text{if } x_{t+1} > VaR_t \end{cases} \quad (34)$$

تابع زیان بالا بزرگی تخطی‌ها را با توان دو جریمه می‌کند. مدلی را به مدل دیگر ترجیح می‌دهیم که متوسط تابع زیان آن کمتر باشد. متوسط تابع زیان را نیز به این صورت  $\sum_{t=1}^T If_t / N$  تعریف می‌کنیم.

### ۴. داده‌های تحقیق

از اطلاعات مربوط به شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران، از

1. accurate  
2. Campbell

سایت رسمی بورس تهران، در بازه زمانی ۱۳۸۳/۱۰/۱۴ تا ۱۳۹۱/۱۲/۲۸ شامل ۱۸۹۰ داده برای هر سری زمانی استفاده شده است. از آنجایی که این شاخص‌ها در برخی از تاریخ‌ها یکسان نیستند، قبل از هر گونه مدل‌سازی، سری زمانی مربوطه را به لحاظ تاریخی همگن نمودیم. علاوه بر این، برای بررسی ارتباط بازارهای مالی از بازه روزانه به جای قیمت استفاده می‌کنیم، زیرا بازه دارایی یک شاخص کامل و بدون مقیاس برای ارزیابی فرصت‌های سرمایه‌گذاری است و همچنین تحلیل سری‌های زمانی بازدهی آسان‌تر از سری زمانی قیمت است (کمپل، ۱۹۹۷). بازه دارایی‌های مورد بررسی به صورت لگاریتمی در محاسبات با پیروی از معادله ۳۵ در نظر گرفته شده است.

$$r_t = \ln(p_t/p_{t-1}) \times 100 \quad (35)$$

که در آن  $r_t$  بازدهی لگاریتمی،  $p_t$  قیمت در زمان  $t$ ، و  $p_{t-1}$  قیمت در زمان  $t-1$  است. در جدول ۱ خصوصیات آماری داده‌های مورد استفاده خلاصه شده است. قابل استنباط است که ضریب کشیدگی بازدهی دو گروه محصولات شیمیایی و دارویی در بورس تهران بیشتر از ضریب کشیدگی تابع چگالی نرمال است. هر دو بازدهی دارای چولگی هستند و آماره جارک‌برا بیانگر آن است که تابع توزیع بازدهی دارایی‌ها نرمال نیست. همچنین، نتایج مربوط به آزمون  $R/S$  و  $GPH$  حاکی فقدان حافظه بلندمدت در بین داده‌های مورد استفاده است.

جدول ۱. ویژگی‌های آماری و آزمون وجود حافظه بلندمدت در بین بازه دو گروه محصولات شیمیایی و دارویی

شاخص گروه دارویی	شاخص گروه شیمیایی	بازده لگاریتمی	
۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۶۸	میانگین	
۰/۱۱۲۹	۰/۱۱۵۲	ماکزیمم	
-۰/۰۳۷	-۰/۲۱۴	مینیمم	
۰/۰۰۵	۰/۱۱۱	انحراف معیار	
۶/۸۳۹	-۳/۲۱۷	چولگی	
۱۳/۹۰۹	۸/۶۲۱	کشیدگی	
۱۵۵۴۱۶*	۶۲۱۳۳۵*	آماره	آزمون جارک‌برا
۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	احتمال	
۱/۵۲۳	۱/۳۶۷		آماره آزمون $R/S$
-۰/۲۰۱	-۰/۰۵۷	آماره	آزمون $GPH$
-۰/۰۱۹۶	-۰/۵۹۱۷	پارامتر $d$	

\* رد فرضیه صفر مبنی بر فرض نرمال بودن در سطح معناداری ۱ درصد

## ۵. نتایج تجربی پژوهش

### • برآورد توزیع تک‌متغیره

از آنجایی که بازدهی سری‌های زمانی مورد آزمون دارای تلاطم خوشه‌ای‌اند، برای سازگاری توزیع تجربی بازدهی‌ها لازم است توزیع حاشیه‌ای برای آن‌ها در نظر گرفت. بنابراین، مدل‌های تک‌متغیره  $GARCH(1,1)$  و  $GJR-GARCH(1,1)$  معرفی شده در بخش قبلی برای هر کدام از سری‌های زمانی مورد بررسی با توزیع‌های نرمال، تی استیودنت، و تی استیودنت چوله برآورد شد.

نتایج این برآورد برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران نشان می‌دهد که پسماندهای همه مدل‌های برآورد شده توسط آزمون یونگ - باکس خودهمبستگی ندارند. از سوی دیگر، آزمون وجود آثار ARCH (آزمون انگل) فرضیه صفر مبنی بر فقدان آثار ARCH را در سطح معناداری ۵ درصد نمی‌تواند رد کند.<sup>۱</sup> همچنین، نتایج برآوردها برای دو شاخص قیمتی محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران حاکی از این مطلب است که مدل  $GJR-GARCH(1,1)$  با کمترین معیار آکائیک و شوارتز بیزی و بیشترین مقدار تابع حداکثر راست نمایی دارای بهترین عملکرد است (جدول ۲). نکته درخور توجه وجود آثار اهرمی مدل  $GJR-GARCH(1,1)$  برای سری‌های زمانی مورد بررسی است؛ به طوری که ضریب  $\gamma$  برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس اوراق بهادار تهران در مدل‌های مختلف منفی شده است، بدان مفهوم که شوک‌های منفی به اندازه شوک‌های مثبت بازار را متلاطم نمی‌کند.

### • برآورد کاپولا

پس از برآورد توزیع حاشیه‌ای  $F_i$  برای داده‌ها به برآورد توابع کاپولای معرفی شده در بخش قبل پرداخته شد. برای تفسیر وابستگی بین دو سری زمانی تابع کاپولای گامبل با توزیع حاشیه‌ای  $GJR-GARCH-st(1,1)$  با کمترین معیارهای اطلاعاتی آکائیک و شوارتز بیزی و بیشترین مقدار تابع حداکثر راست نمایی بهترین عملکرد را میان توابع دیگر دارد. بدین ترتیب، بازدهی دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی

۱. نتایج حاصل از برآورد سایر مدل‌های  $GARCH(1,1)$  و  $GJR-GARCH(1,1)$  در پیوست قابل مشاهده است.

وابستگی بیشتری در دنباله بالایی توزیع دارند. بنابراین، بین این دو شاخص در بازدهی‌های مثبت و وابستگی بیشتر از بازدهی‌های منفی است. نتایج برآورد تابع کاپولای گامبل در جدول ۳ قابل مشاهده است.<sup>۱</sup>

جدول ۲. برآورد پارامتر مدل‌های GJR-GARCH(1,1) با توزیع تی-استیودنت چوله

پارامتر	محصولات شیمیایی	محصولات دارویی
$\mu$	-۰٫۰۰۰۴۱۹ (۰٫۰۰۰۲۳۵)	-۰٫۰۰۰۳۳۹* (-۰٫۰۰۰۸۲)
$\alpha_0$	۰٫۰۰۰۰۱۱* (۰٫۰۰۰۰۷)	۰٫۰۰۰۰۰۴* (۰٫۰۰۰۰۱)
$\alpha_1$	۰٫۷۸۸۴۵* (-۰٫۱۰۴۱۳۹)	۱٫۰۰۰۰۰* (-۰٫۱۶۷۸۹۳)
$\beta$	۰٫۴۸۵۲۷۵* (-۰٫۱۵۱۶۸۱)	۰٫۴۲۱۸۲۰* (-۰٫۷۲۴۸۹)
$\gamma$	-۰٫۵۷۰۲۳۸* (-۰٫۱۱۸۹۱۱)	-۰٫۹۱۲۷* (-۰٫۱۶۵۳۹۴)
d	۲٫۵۷۲۳	۲٫۵۸۷۹
skew	۰٫۹۵۰۳	۰٫۸۹۹۷
LLF	۶۷۹۵	۸۳۷۲
AIC	-۷٫۱۸۶۷	-۸٫۸۵۶۹
BIC	-۷٫۱۶۶۲	-۸٫۸۳۶۳
J-Box	[۱۰٫۱۸]	[۱٫۲۶۴]
آزمون انگل	۰٫۲۳۲۹ [۲٫۲۷۴۶]	۰٫۸۷۱۸ [۱٫۶۷۱۹]

اعداد داخل پرانتز () نشان‌دهنده انحراف معیار و اعداد داخل براکت [ ] نشان‌دهنده آماره  $Q$  است. همچنین،  $d$  درجه آزادی،  $skew$  چولگی در توزیع تی استیودنت چوله،  $LLF$  تابع حداکثر راست‌نمایی،  $AIC$  معیار اطلاعات آکائیک،  $BIC$  معیار اطلاعات شوارتز بیزی،  $J$ -Box آزمون یونگ باکس و آزمون انگل برای وجود آثار  $ARCH$  است.  
\* معناداری در سطح ۰/۰۵ را نشان می‌دهد.

۱. نتایج حاصل از برآورد پارامترهای سایر توابع کاپولای معرفی شده در پیوست قابل مشاهده است.

جدول ۳. برآورد پارامترهای تابع کاپولای گامبل برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی

GJR-GARCH-st	GJR-GARCH-t	GJR-GARCH-n	GARCH-st	GARCH-t	GARCH-n	تابع کاپولا
						گامبل
۱/۱۶۸	۱/۰۳	۱/۱۷۲	۱/۲۲۶	۱/۶۳۲	۱/۷۳	$\theta$
۰/۱۱۴	۰/۱۰۱	۰/۱۲	۰/۲۲	۰/۳۴	۰/۶۵	$\lambda_U$
.	.	.	.	.	.	$\lambda_L$
۷۴/۳۷۶	۷۰/۹۹۳	۶۸/۰۳۴	۷۳/۹۰۱	۶۹/۵۵۵	۶۶/۶۶۷	LLF
-۱۴۸/۴۳	-۱۴۳/۳۰۰	-۱۳۸/۱۹	-۱۴۶/۲۳	-۱۴۰/۵۴۳	-۱۲۸/۷۶۵	AIC
-۱۴۸/۲۳	-۱۴۳/۲۲۳	۱۳۸/۰۶	-۱۴۶/۰۲	-۱۴۰/۴۳۲	-۱۲۸/۶۱۹	BIC

$\theta$  ضریب وابستگی کاپولای گامبل،  $\lambda_U$  و  $\lambda_L$  به ترتیب نشان دهنده وابستگی بالایی و پایینی توزیع، LLF تابع حداکثر راست‌نمایی، AIC و BIC نیز به ترتیب معرف معیارهای اطلاعاتی آکائیک و شوارتز بیزی است.

#### • برآورد ارزش در معرض ریسک

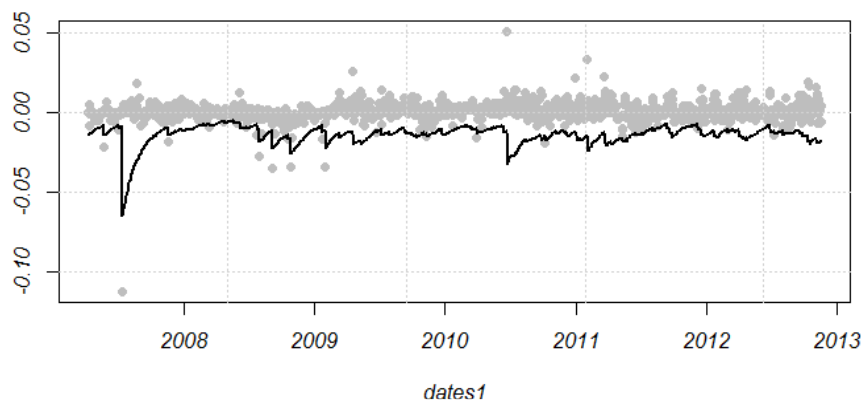
برای محاسبه ارزش در معرض ریسک سبد دارایی با در نظر گرفتن مقادیر تخمین زده شده برای واریانس شرطی دوره بعد برای مدل‌های GARCH و GJR-GARCH و فرض وجود ساختار وابستگی بین هر کدام از این دو دارایی توسط توابع کاپولا ارزش در معرض ریسک سبد متشکل از آن‌ها با پنجره غلتان (داده درون نمونه‌ای<sup>۱</sup>) به اندازه ۵۰۰ داده برآورد شده است؛ به طوری که برآورد خارج از نمونه<sup>۲</sup> شامل پیش‌بینی ۱۳۹۰ روز ارزش در معرض ریسک خواهد بود.

نتایج حاصل از پس‌آزمایی برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران برای توزیع‌های تک‌متغیره GARCH استاندارد و GJR-GARCH با فرض توزیع‌های نرمال، تی-استیودنت، و تی-استیودنت چوله برای توابع کاپولای نرمال، تی-استیودنت، کلاپتون، گامبل، و فرانک به ترتیب در جداول ۵ و ۶ خلاصه شده است. همان‌طور که از جداول قابل استنباط است، روش برآورد GJR-GARCH-st-Copula-Gambel با مقدار ۶۷/۳۲ واحد دارای کمترین مقدار تابع زیان در میان مدل‌های برآورد شده توسط این رهیافت برای سبد

1. Sample-in data  
2. Sample-out data

متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران است (شکل ۲). در این پس‌آزمایی مدل‌های  $s\text{-GARCH-t}$ ،  $\text{GJR-GARCH-st-Copula-Gumbel}$ ،  $\text{Copula-Frank}$  و  $s\text{-GARCH-t-Copula-Frank}$  در رتبه‌های دوم و سوم قرار دارند. در این آزمون مدل‌هایی چون  $s\text{-GARCH-n}$  با توابع کاپولای نرمال، تی-استیودنت، کلایتون و فرانک، مدل با توابع کاپولای نرمال، تی-استیودنت و کلایتون،  $s\text{-GARCH}$ ،  $\text{GJR-GARCH-n}$  با کاپولای نرمال، تی-استیودنت و کلایتون و  $\text{st-Copula-Clayton}$  توسط آزمون پوشش شرطی رد شدند. نتایج حاصل از پس‌آزمایی همه مدل‌های در نظر گرفته شده در پیوست مقاله قابل مشاهده است.

**Daily Returns and Value-at-Risk Exceedances  $\alpha=0.01$**



شکل ۲. ارزش در معرض ریسک محاسبه شده توسط مدل  $\text{GJR-GARCH-st-Copula-Gumbel}$

برای مقایسه عملکرد ارزش در معرض ریسک محاسبه شده توسط رهیافت  $\text{Copula-GARCH}$  با روش‌های مشابه در اقتصاد مالی، در این مقاله از مدل‌های  $\text{GARCH}$  چندمتغیره، میانگین متحرک وزنی<sup>۱</sup> (EWMA)، روش ارزش در معرض ریسک تعمیم یافته، و روش شبیه‌سازی تاریخی (HS) استفاده شد. برای این کار بهترین مدل معرفی شده در پس‌آزمایی بخش پیشین برای سبد دارایی متشکل از دو شاخص

1. Exponential Weighted Moving Average (EWMA)

محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران با مدل‌های ذکر شده در بالا مقایسه شدند. نتایج جدول ۷ حاکی از برتری رهیافت Copula-GARCH است؛ به طوری که در رتبه‌بندی روش‌های برآورد ارزش در معرض، روش پیش‌بینی با استفاده از رهیافت کاپولا (GJR-GARCH-st-Copula-Gumbel) با کمترین مقدار تابع زیان رتبه نخست را کسب کرد و روش‌های GARCH چندمتغیره و DCC-GARCH رتبه‌های بعدی را به خود اختصاص دادند. و سه آزمون EWMA، مدل شبیه‌سازی تاریخی (HS)، و شبیه‌سازی تاریخی تعمیم‌یافته (HS-Modifid) توسط آزمون پوشش شرطی رد شدند.

جدول ۷. پس‌آزمایی به روش دومرحله‌ای برای ۵ مدل برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی

HS-Modified	DCC-MGARCH	M-GARCH	Multivariate EWMA	GJR-GARCH-st-Copula-Gumbel	روش محاسبه ارزش در معرض ریسک
۸	۲۰	۱۳	۹۸	۱۴	تعداد تخطی
۰/۵۸	۱/۴۴	۰/۹۴	۷/۰۵	۱/۰۰۷	درصد تخطی
۳۰/۳۴	۰/۳۸۷	۰/۹۸۷	۲۳/۰۲	۱/۱۰۶	LRuc
۰/۰۰۰	۰/۵۵۲	۰/۰۷۵	۰/۰۰۰	۰/۶۹۸	p-value
۰/۶۵۲۱	۰/۲۶۵	۰/۲۰۳	۰/۰۰۲	۰/۷۶۳	LRind
۰/۰۰۹۸	۰/۶۹۸	۰/۶۸۲۱	۰/۰۰۵۴	۰/۲۶۷	p-value
۳۰/۹۹۲۱	۰/۶۵۲	۱/۱۹۰	۲۳/۰۲۲	۱/۸۶۹	ccLR
۰/۰۰۰	۰/۳۱۰	۰/۰۲۷	۰/۰۰۰	۰/۰۹۰	p-value
۴۳/۹۲	۱۰۴/۵۴	۹۹/۱۰۳	۱۲۱/۷۶	۶۷/۳۲۰	تابع زیان
*	۳	۲	*	۱	رتبه

در این جدول ستون‌ها به ترتیب از راست عبارت است از: اسم روش، تعداد تخطی، درصد تخطی، LR<sub>uc</sub> مقادیر مربوط به آزمون پوشش غیرشرطی، p-value مقدار آزمون پوشش غیرشرطی، LR<sub>ind</sub> آماره آزمون استقلال، p-value مقدار آزمون استقلال، ccLR آماره آزمون پوشش شرطی، p-value مقدار آزمون پوشش غیرشرطی، ستون دهم مجموع مجذورات اندازه تخطی‌ها، یعنی تابع زیان و بالاخره رتبه‌بندی بر اساس پایین‌ترین مجموع مجذورات. علامت ستاره به معنی رد شدن روش مورد نظر توسط آزمون پوشش شرطی است.

## ۶. نتیجه‌گیری

پس از آزمون‌های آماری و استفاده از روش‌های معرفی شده برای نیل به اهداف این مقاله، در مدل‌سازی واریانس دو توزیع بازدهی شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران، بهترین عملکرد توسط مدل حاشیه‌ای GJR-GRACH با فرض وجود توزیع تی-استیودنت



چوله در بازدهی‌های این سری‌های زمانی با بیشترین مقدار تابع راست‌نمایی و کمترین معیار اطلاعات آکائیک و شوارتز بیزی به‌دست آمد. در برآورد وابستگی ساختاری و دنباله‌ای بین دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران کاپولای گامبل با توزیع حاشیه‌ای GJR-GARCH با بیشترین مقدار راست‌نمایی و کمترین معیار اطلاعاتی دارای توضیح‌دهندگی بالایی در نشان‌دادن وابستگی در دنباله مثبت توزیع این دو شاخص در بورس تهران است.

در نهایت، نتایج حاصل از برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران نشان می‌دهد که در برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از دو شاخص مدل GJR-GARCH-st-Copula-Gumbel بیشترین دقت و کفایت را دارد؛ به نحوی که استفاده از رهیافت کاپولای گامبل با توزیع حاشیه‌ای GJR-GARCH و توزیع تی-استیودنت چوله با کمترین مقدار تابع زیان رتبه نخست را کسب کرد و روش‌های GARCH چندمتغیره و DCC-GARCH رتبه‌های بعدی را به خود اختصاص دادند.

بدین ترتیب، باید اظهار کرد کاربرد مدل‌های GARCH برای مدل‌سازی واریانس شرطی بازدهی‌های مالی و بهره‌گیری از توابع کاپولا برای لحاظ نوع وابستگی ساختاری به دنباله پایینی (بالایی) بین سری‌های زمانی دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران به بهبود دقت و کفایت برآورد ارزش در معرض ریسک سبد متشکل از آن‌ها منجر می‌شود.

## منابع

۱. سایت رسمی بورس اوراق بهادار تهران <http://www.irbourse.com>
۲. مفتخر دریایی‌نژاد، کبری و کشاورز حداد، غلامرضا (۱۳۹۱). اثر سرایت بازده و تلاطم در برآورد ارزش در معرض ریسک سبد دارایی متشکل از طلا، ارز و سهام. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه صنعتی شریف.
3. Aloui, A., Ben Aïssa, M.S., Nguyen, D.K., (2011). Global financial crisis, extreme interdependences, and contagion effects: the role of economic structure? *Journal of Banking and Finance* 35 (1), 130–141.

4. Ang, A. and Bekaert, G. (2002). International asset allocation with regime shifts, *Review of Financial Studies*, 15 (4), 1137–1187.
5. Ang, A., Chen, J., and Xing, Y. (2006). Downside risk, *Review of Financial Studies*, 19 (4), 1191–1239.
6. Boubaker, H. and Sghaier, N. (2013). Portfolio optimization in the presence of dependent financial returns with long memory: A copula based approach, *Journal of Banking and Finance*, 37 (2), 361-377.
7. Canela, M.A. and Collazo, E.P. (2006). *Modelling dependence in latin american markets using copula functions*, Working paper, Universitat de Barcelona.
8. Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). *Copulas methods in Finance*. Wiley.
9. Chollete, L., de la Pena, V., Lu, C-C., (2011). International diversification: a copula approach. *Journal of Banking and Finance* 35 (2), 403–417.
10. Clayton, D.G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, *Biometrika*, 65 (1), 141–151.
11. Costinot, A. and, Thierry, R and Teiletche, J.(2000). Revisiting the Dependence between Financial Markets with Copulas, *Working paper*.
12. Das, S.R. and Uppal, R. (2004). Systemic risk and international portfolio choice, *Journal of Finance*, 59 (6), 2809–2834.
13. de Melo Mendes, B.V., Kolev, N., (2008). How long memory in volatility affects true dependence structure. *International Review of Financial Analysis* 17 (5), 1070– 1086.
14. Di Clemente. A. and Romano, C. (2004). Measuring and optimizing portfolio credit risk: a copula-based approach, *Economic Notes*, 33 (3), 325–357.
15. Dias, A. and Embrechts, P.(2003). *Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance*, Working Paper, ETH Zurich: Department of Mathematics.
16. Embrechts, P., McNeil, A.J. and Straumann, D. (1999). “Correlation: pitfalls and alternatives a short, *RISK Magazine*, 69–71.

17. Embrechts, P., McNeil, A.J. and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls, In: Dempster, M.A.H. (Ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge.
18. Engle, R.F. (2002). Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20 (3), 339–350
19. Engle, R.F., (1982). Auto-regressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50 (4), 987\_1007.
20. Fantazzini, D. (2008). *Copula's conditional dependence measures for portfolio management and Value at Risk*, Working paper, SFB 649, University of Konstanz (Germany): Chair of Economics and Econometrics.
21. Garcia, R., Tsafack, G., (2011). Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets. *Journal of Banking and Finance* 35 (8), 1954–1970.
22. Giacomini, E. and Hardle, W. (2005). Value-at-Risk calculations with time varying copulae, *Discussion paper, Humboldt University of Berlin: Institute Statistics and Econometrics*.
23. Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle (1993), On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
24. Hartmann, P., Straetmans, S. and de Vries, C.G. (2004). Asset market linkages in crisis periods, *Review of Economics and Statistics*, 86 (1), 313–326.
25. He, X. and Gong, P. (2009). Measuring the coupled risks: a copula-based CVaR model, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223 (2), 1066–1080.
26. Hotta, L.K. and Palaro, H.P. (2006). Using conditional copula to estimate Value at Risk, *Journal of Data Science*, 4 (1), 93-115.
27. Hotta, L.K., Lucas, E.C. and Palaro, H.P. (2008). Estimation of VaR using copula and extreme value theory, *Multinational Financial Journal*, 12 (3/4), 205-218.

28. Hu, L., (2006). Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach. *Applied Financial Economics* 16 (10), 717–729.
29. Hung, J.J., Kuo, L., Liang, H. and Lin, W.F. (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method, *Insurance: Mathematics and Economics*, 45 (2009) 315\_324
30. Hurlimann, W. (2004). Fitting bivariate cumulative returns with copulas, *Computational Statistics & Data Analysis*, 45 (2), 355-372.
31. Ignatievay, K., Platen, E., (2010). Modelling co-movements and tail dependency in the international stock market via copulae. *Asia-Pacific Financial Markets* 17 (3), 261–302.
32. Jondeau, E., Rockinger, M., (2003). Conditional volatility, skewness and kurtosis: existence, persistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics and Control* 27 (10), 1699–1737.
33. Kole, E., Koedijk, K., Verbeek, M., (2005). Testing Copulas to Model Financial Dependence. *Working paper, RSM Erasmus University*
34. Martinelli, L. and Meyfredi, J.C. (2007). A copula approach to Value-at-Risk estimation for fixed-income portfolios, *The Journal of fixed income*, summer, 17, 1.
35. McNeil, A.J., Frey, R., and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, techniques and tools*, Princeton University Press, New Jersey.
36. Micocci, M., and Masala, G. (2005). Pricing pension funds guarantees using a copula approach. Available online at [www.ctuaries.org/AFIR/colloguia/Maastricht/Micocci\\_Masala.pdf](http://www.ctuaries.org/AFIR/colloguia/Maastricht/Micocci_Masala.pdf)
37. Necula, C. (2010). Modeling the dependency structure of stock index returns using a copula function approach, *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 13 (3).
38. Nelsen, R., (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
39. Ozun, A. and Cifter, A. (2007). Portfolio value-at-risk with time-varying copula: Evidence from the Americans, Marmara University, MPRA Paper, No. 2711.
40. Palaro, H.P. and Hotta, L.K. (2006). Using conditional copula to estimate Value at Risk, *Journal of Data Science*, 4 (2006), 93-115.

41. Patton, A. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation, *Journal of Financial Econometrics*, 2 (1), 130–168.
42. Poon, S-H., Rockinger, M. and Tawn, J. (2004). Modeling extreme-value dependence in international stock markets, *Statistica Sinica*, 13, 929–953.
43. Rockinger, M., Jondeau, E., (2001). Conditional dependency of financial series: An application of copulas. *Working paper NER # 82. Banque de France. Paris.*
44. Rodriguez, J.C., (2007). Measuring financial contagion: a copula approach. *Journal of Empirical Finance* 14 (3), 401–423.
45. Sklar, A., (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Universite de Paris* 8, pp. 229\_231.
46. Song, P. X.-K. (2000) ,Multivariate dispersion models generated from gaussian copula. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27(2):305–320
47. Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F.J., Kalem, P., (2009). A new approach to modeling comovement of international equity markets: evidence of unconditional copulabased simulation of tail dependence. *Empirical Economics* 36 (1), 201–229.
48. Susmel, R. (2001). Extreme observations and diversification in Latin American emerging equity markets, *Journal of International Money and Finance*, 20 (7), 971–986.
49. Tsafack, G. (2009). Asymmetric dependence implications for extreme risk management, *Journal of Derivatives*, 17 (1), 7–20.
50. Wang, K., Chen, Y.H., and Huang, S.W. (2011). The dynamic dependence between the Chinese market and other international stock markets: A time-varying copula approach, *International Review of Economics and Finance*, 20 (4), 654-664.
51. Wang, Y.C., Wu, J.L., and Lai, Y.H. (2013). A revisit to the dependence structure between the stock and foreign exchange markets: A dependence-switching copula approach, *Journal of Banking and Finance*, 37 (5), 1706-1719.

## پیوست

در این بخش جزئیات نتایج حاصل از برآورد مدل‌های توزیع حاشیه‌ای (جدول پ-۱)، برآورد پارامترهای توابع کاپولای معرفی شده در مقاله (جدول پ-۲) و نتایج حاصل از پس‌آزمایی مدل‌های Copula-GARCH در جدول پ-۳ و پ-۴ قابل مشاهده است.

جدول پ-۱. برآورد پارامترهای مدل‌های GARCH(1,1) و GJR-GARCH(1,1) با توزیع‌های نرمال، تی - استیودنت و تی - استیودنت چوله برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران

پارامتر	GARCH-n	GARCH-t	GARCH-st	GJR-GARCH-n	GJR-GARCH-t	GJR-GARCH-st
$\mu$	۰/۰۰۶۹ (۰/۰۰۰۲۵۵)	۰/۰۰۱۰۴* (۰/۰۰۰۱۰۳)	۰/۰۰۰۵۳ (۰/۰۰۰۲۳۱)	۰/۰۰۴۲۱* (۰/۰۰۰۲۶۳)	-۰/۰۰۰۱۹۳* (۰/۰۰۰۰۹)	-۰/۰۰۰۴۱۹ (۰/۰۰۰۲۳۵)
$\alpha_0$	۰/۰۰۰۰*	۰/۰۰۰۰۱۷ (-6e-005)	۰/۰۰۰۰۱۹* (-9e-005)	۰/۰۰۰۰* (۰/۰۰۰۰)	۰/۰۰۰۱۳* (-5e-005)	۰/۰۰۰۰۱۱* (-7e-005)
$\alpha_1$	0.00000* (-0.000102)	0.662396* (-0.08235)	0.677763* (-0.088273)	۰/۰۰۰۰ (-0.000331)	0.802286 (-0.10567)	0.78845 (-0.104139)
$\beta$	0.99900* (-0.00351)	0.336604* (-0.100289)	0.321237* (-0.140491)	0.99991 (-0.000213)	0.459643* (-0.09551)	0.485275* (-0.151681)
$\gamma$	-	-	-	-0.001998* (-0.000307)	-0.525859* (-0.103411)	-0.570238* (-0.118911)
d	-	2.5822	2.5651	-	2.5523	2.5723
skew	-	-	1.03443	-	-	0.9503
LLF	5820	6881	9781	5877	6793	6795
AIC	-6.1573	-7.1738	-7.1735	-6.2166	-7.1861	-7.1867
BIC	-6.1456	-7.1591	-7.1559	-6.2019	-7.1685	-7.1662
J-Box	0.8772 [4.273]	0.8741 [16.34]	0.8714 [17.11]	0.8338 [12.128]	0.8868 [11.22]	0.8905 [10.18]
آزمون انگل	0.9869 [5.35]	0.9742 [5.1901]	0.9731 [9.13]	0.9748 [12.21]	0.9789 [13.18]	0.2329 [2.2746]
$\mu$	-0.000164 (-9.8e-005)	-0.00063 (-4.9e-005)	-0.00012 (-0.00023)	-0.000141 (-9.5e-005)	-0.000115* (-4.8e-005)	-0.000339* (-0.00082)
$\alpha_0$	0.00007* (-1e-005)	0.00006* (-1e-005)	0.00005* (-0.000231)	0.00007* (-1e-005)	0.00004* (-1e-005)	0.00004* (-1e-006)
$\alpha_1$	0.478259* (-0.062657)	0.788798* (-0.12073)	0.431232* (-0.10432)	0.745682* (-0.103585)	1.000* (-0.192196)	1.00000* (-0.167893)
$\beta$	0.271337* (-0.043692)	0.210200* (-0.074288)	0.254324* (-0.05321)	0.264280* (-0.040358)	0.398999* (-0.07873)	0.421820* (-0.72489)
$\gamma$	-	-	-	-0.587034* (-0.000000)	-0.801131* (-0.000000)	-0.9127* (-0.000000)

محصولات شیمیایی

محصولات دارویی

ادامه جدول پ-۱. برآورد پارامترهای مدل‌های GARCH(1,1) و GJR-GARCH(1,1) با توزیع‌های نرمال، تی-استیودنت و تی-استیودنت چوله برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران

پارامتر	GARCH-n	GARCH-t	GARCH-st	GJR-GARCH-n	GJR-GARCH-t	GJR-GARCH-st
	(-0,100211)			(-0,168145)		(-0,165394)
d	-	2,6346	2,4921	-	2,5322	2,5879
skew	-	-	0,7932	-	-	0,8997
LLF	7797	8347	8443	7822	8366	8372
AIC	-8,2512	-8,8318	-8,8522	-8,2765	-8,8514	-8,8569
BIC	-8,2395	-8,8172	-8,8219	-8,2618	-8,8338	-8,8363
J-Box	0,6236	0,489	0,8631	0,6439	0,6649	0,8226
	[1,5450]	[1,4760]	[1,5321]	[1,4827]	[1,3602]	[1,264]
آزمون	0,7982	0,6622	0,9931	0,7892	0,9977	0,8718
انگل	[1,8364]	[1,7982]	[1,8713]	[1,9011]	[1,7938]	[1,6719]

اعداد داخل پرانتز ( ) نشان‌دهنده انحراف معیار و اعداد داخل براکت [ ] نشان‌دهنده آماره  $Q$  است. همچنین،  $d$  درجه آزادی،  $skew$  چولگی در توزیع تی-استیودنت چوله،  $LLF$  تابع حداکثر راست‌نمایی،  $AIC$  معیار اطلاعات آکائیک،  $BIC$  معیار اطلاعات شوارتز بیزی،  $J$ -Box آزمون یونگ باکس و آزمون انگل برای وجود آثار  $ARCH$  است.  
\*معناداری در سطح ۰.۰۵ را نشان می‌دهد.

جدول پ-۲. برآورد پارامترهای توابع کاپولا برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران

تابع کاپولا	GARCH-n	GARCH-t	GARCH-st	GJR-GARCH-n	GJR-GARCH-t	GJR-GARCH-st
نرمال						
$\rho$	۰,۳۷۶	۰,۳۷۶	۰,۳۷۷	۰,۳۷۴	۰,۳۷۵	۰,۳۷۵
$\lambda_U$	.	.	.	.	.	.
$\lambda_L$	.	.	.	.	.	.
LLF	۳۲,۸۰۴۰	۳۲,۶۵۸۷	۳۲,۸۵۱۲	۳۳,۰۴۵۳	۳۳,۰۱۲۳	۳۳,۹۸۳۰
AIC	-۶۵,۶۰۶۱	-۶۵,۳۱۵۴	-۶۵,۷۰۳۱	-۶۶,۰۸۸۷	-۶۶,۰۲۲۱	-۶۶,۱۲۳۲
BIC	-۶۵,۶۰۱۱	-۶۵,۳۱۰۵	-۶۵,۶۹۳۴	-۶۶,۰۸۳۱	-۶۶,۰۴۵۹	-۶۶,۰۵۲۱
تی-استیودنت						
$\rho$	۰,۲۹۱	۰,۳۹۲	۰,۲۱۱	۰,۲۸۱	۰,۳۴۲	۰,۲۰۰
d	۲,۲۳	۲,۳۴	۲,۱۳	۲,۴۱	۲,۴۳	۱,۱۰۱
$\lambda_U$	۰,۱۰۱	۰,۳۲۲	۰,۱۸۷	۰,۱۰۶	۰,۴۰۷	۰,۱۹۲
$\lambda_L$	۰,۱۰۱	۰,۳۲۲	۰,۱۸۷	۰,۱۰۶	۰,۴۰۷	۰,۱۹۲
LLF	۳۲,۲۶	۳۵,۶۵۸۴	۳۴,۰۷۳۹	۲۸,۵۶۴	۳۳,۶۵۴	۲۶,۶۶
AIC	-۶۴,۶۵	-۷۱,۳۱۴۹	-۶۸,۱۴۸۹	-۵۷,۰۹۷۱	-۶۶,۷۵۴	-۵۳,۳۳۲۳
BIC	-۶۴,۰۳	-۷۱,۳۱۰۰	-۶۸,۱۴۲۹	-۵۷,۰۹۰۰	-۶۶,۷۱۰۱	-۵۳,۱۲۴۲

ادامه جدول پ-۲. برآورد پارامترهای توابع کاپولا برای دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران

GJR-GARCH-st	GJR-GARCH-t	GJR-GARCH-n	GARCH-st	GARCH-t	GARCH-n	تابع کاپولا
<b>کلابتون</b>						
۰,۱۸۷۶	۰,۳۶۵	۰,۱۰۴	۰,۱۷۵	۰,۳۳۴	۰,۱۶۹	$\theta$
.	.	.	.	.	.	$\lambda_U$
۰,۱۸۲	۰,۲۵۶	۰,۱۱۳	۰,۱۶۲	۰,۲۳۴	۰,۱۷۶	$\lambda_L$
۱۹,۵۰۵	۲۲,۵۴	۱۰,۳۸۶	۲۱,۳۲۱	۲۰,۸۶۱	۱۱,۲۳۱	LLF
-۳۱,۰۰۳	-۳۴,۱۰۹	-۲۰,۹۸۷	-۳۳,۴۳۲	-۳۲,۳۹۲	-۲۲,۴۳۱	AIC
-۳۰,۷۶۰	-۳۳,۹۸۱	-۲۰,۷۶۱	-۳۳,۴۰۱	-۳۲,۳۷۶	-۲۲,۴۲۲	BIC
<b>گامبل</b>						
۱,۱۶۸	۱,۰۳	۱,۱۷۲	۱,۲۲۶	۱,۶۳۲	۱,۷۳	$\theta$
۰,۱۱۴	۰,۱۰۱	۰,۱۲	۰,۲۲	۰,۳۴	۰,۶۵	$\lambda_U$
.	.	.	.	.	.	$\lambda_L$
۷۴,۳۷۶	۷۰,۹۹۳	۶۸,۰۳۴	۷۳,۹۰۱	۶۹,۵۵۵	۶۶,۶۶۷	LLF
-۱۴۸,۴۳	-۱۴۳,۳۰۰	-۱۳۸,۱۹	-۱۴۶,۲۳	-۱۴۰,۵۴۳	-۱۲۸,۷۶۵	AIC
-۱۴۸,۲۳	-۱۴۳,۲۲۳	۱۳۸,۰۶	-۱۴۶,۰۲	-۱۴۰,۴۳۲	-۱۲۸,۶۱۹	BIC
<b>فرانک</b>						
۱,۴۴	۱,۱۳۵	۱,۱۵	۱,۴۲	۱,۱۳۲	۱,۱۳	$\theta$
.	.	.	.	.	.	$\lambda_U$
.	.	.	.	.	.	$\lambda_L$
۲۸,۳۶۴	۱۵,۰۸	۲۳,۶۵۴	۲۶,۷۷۴	۱۸,۸۷	۱۶,۲۴	LLF
-۵۵,۶۸	-۲۹,۹۱	-۴۵,۰۷	-۵۳,۴۸۶	-۳۰,۳۲۱	-۴۸,۷۶	AIC
-۶۶,۵۹	-۲۹,۷۰	-۴۴,۹۵	-۵۳,۴۳۲	-۳۰,۱۳۲	-۴۸,۱۳	BIC

$\rho$  نشان دهنده پارامتر کاپولای نرمال و تی-استیودنت،  $\theta$  ضریب وابستگی کاپولای ارشمیدسی،  $\lambda_U$  و  $\lambda_L$  به ترتیب نشان دهنده وابستگی بالایی و پایینی توزیع، LLF تابع حداکثر راست‌نمایی، AIC و BIC نیز معرف معیارهای اطلاعاتی آکائیک و شوارتز بیزی است.



جدول پ-۳. پس آزمایی توسط روش دومرحله‌ای برای سبد متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران، با توزیع تک‌متغیره GARCH استاندارد

رتبه	تابع زیان	p-value	$LR_{sc}$	p-value	$LR_{ind}$	p-value	$LR_{sc}$	درصد تخطی	تخطی	روش محاسبه ارزش در معرض ریسک
*	۱۱۳/۳۲	۰/۰۰۰	۲۱/۶۷۴	۰/۰۳۴	۰/۳۴۴	۰/۰۰۰	۲۱/۳۳	۳/۶	۵۰	s-GARCH-n-Copula-Normal
*	۱۳۲/۳۲	۰/۰۰۰	۱۶/۲۱۵	۰/۴۵۲	۰/۷۶۵	۰/۰۰۰	۱۵/۴۵	۲/۶۶	۳۷	s-GARCH-n-Copula-t
*	۱۱۴/۰۸	۰/۰۰۰	۳۴/۹۳۵	۰/۲۳۴	۰/۲۴۵	۰/۰۰۰	۳۴/۶۹	۲/۸۸	۴۰	s-GARCH-n-Copula-Clayton
۵	۷۹/۶۵	۰/۰۴۴	۰/۹۳۵	۰/۷۶۴	۰/۶۹۶	۰/۵۵۲	۰/۲۳۹	۰/۹۴	۱۳	s-GARCH-n-Copula-Gumbel
*	۱۲۰/۳۳	۰/۰۰۰	۱۱/۶۲۴	۰/۴۳۶	۰/۲۳۴	۰/۰۰۰	۱۱/۳۹	۲/۳	۳۲	s-GARCH-n-Copula-Frank
*	۱۰۵/۴۳	۰/۰۰۰	۲۳/۸۸۱	۰/۹۸۵	۰/۳۲۱	۰/۰۰۰	۲۳/۵۶	۲/۰۹	۲۹	s-GARCH-t-Copula-Normal
*	۱۲۰/۵۷	۰/۰۰۰	۱۴/۰۳۲	۰/۰۵۴	۰/۱۶۲	۰/۰۰۰	۱۳/۸۷	۲/۳	۳۲	s-GARCH-t-Copula-t
*	۱۰۶/۰۶	۰/۰۰۰	۱۵/۶۷۶	۰/۰۳۶	۰/۸۷۶	۰/۰۰۰	۱۴/۸	۱/۸۷	۲۶	s-GARCH-t-Copula-Clayton
۴	۷۷/۷۶	۰/۰۱۹	۱/۴۱۳	۰/۰۶۷	۰/۳۹	۰/۴۳۳	۱/۰۲۳	۰/۷۹	۱۱	s-GARCH-t-Copula-Gumbel
۳	۷۳/۲۱	۰/۲۳۴	۲/۰۹۶	۰/۷۲۲۳	۰/۶۷۵	۰/۶۷۱	۱/۴۲۱	۰/۸۶	۱۲	s-GARCH-t-Copula-Frank
۱۱	۹۰/۹۱	۰/۵۳۲	۰/۶۷۰۹	۰/۶۱۳	۰/۱۳۸۹	۰/۳۱۳	۰/۵۳۲	۱/۴۴	۲۰	s-GARCH-st-Copula-Normal
۱۲	۹۲/۱۴	۰/۷۴۳	۲/۰۹	۰/۵۶۹۳	۰/۱۸	۰/۷۱	۱/۹۱	۱/۳۷	۱۹	s-GARCH-st-Copula-t
۱۸	۱۰۲/۳۲	۰/۱۲۹	۱/۰۶۶	۰/۰۶۷	۰/۳۳۴	۰/۶۵۱	۰/۸۳۲	۱/۸۷	۲۶	s-GARCH-st-Copula-Clayton
۸	۸۵/۹۸	۰/۲۳۴	۰/۹۹۷	۰/۱۸۲	۰/۰۰۶	۰/۳۴۹	۰/۹۹۱	۰/۹۴	۱۳	s-GARCH-st-Copula-Gumbel
*	۱۴۳/۳	۰/۰۰۰	۲۸/۹۸۵۶	۰/۸۵۴	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۰	۲۸/۹۸	۳/۰۲	۴۲	s-GARCH-st-Copula-Frank

در این جدول ستون‌ها به ترتیب از راست عبارت‌اند از: اسم روش، تعداد تخطی، درصد تخطی،  $LR_{sc}$  مقادیر مربوط به آزمون پوشش غیرشرطی، p-value مقدار آزمون پوشش غیرشرطی،  $LR_{ind}$  آماره آزمون استقلال، p-value مقدار آزمون استقلال،  $LR_{sc}$  آماره آزمون پوشش شرطی، p-value مقدار آزمون پوشش غیرشرطی، ستون دهم مجموع مجذورات اندازه تخطی‌ها، یعنی تابع زیان و سرانجام رتبه‌بندی بر اساس پایین‌ترین مجموع مجذورات. علامت ستاره به معنای رد شدن روش مورد نظر توسط آزمون پوشش شرطی است.

جدول پ-۴. پس آزمایی توسط روش دومرحله‌ای برای سبب متشکل از دو شاخص محصولات شیمیایی و دارویی بورس تهران، و توزیع تک‌متغیره GJR-GARCH

رتبه	تابع زیان	p-value	LR <sub>sc</sub>	p-value	LR <sub>ind</sub>	p-value	LR <sub>sc</sub>	درصد تخطی	تخطی	روش محاسبه ارزش در معرض ریسک
*	۱۳۳/۲۳	۰/۰۰۰	۳۶/۵۸۷	۰/۳۶۶	۰/۴۵۶	۰/۰۰۰	۳۶/۱۳۱	۳/۵۳	۴۹	s-GARCH-n-Copula-Normal
*	۱۱۹/۱۶	۰/۰۰۰	۱۵/۱۹۳	۰/۴۳۹	۰/۸۷۳	۰/۰۰۰	۱۴/۳۲	۱/۵۸	۲۲	s-GARCH-n-Copula-t
*	۱۰۳/۰۳	۰/۰۰۰	۱۷/۹۷۴	۰/۲۰۱	۰/۵۶۴	۰/۰۰۰	۱۷/۴۱	۳/۰۲	۴۲	s-GARCH-n-Copula-Clayton
۶	۸۰/۸۱	۰/۰۵۴	۰/۳۳۳	۰/۰۰۵	۰/۱۱	۰/۳۱۳	۰/۱۲۳	۱/۱۵	۱۶	s-GARCH-n-Copula-Gumbel
۱۷	۱۰۰/۱۲	۰/۲۶	۱/۴۸۳	۰/۰۴۴	۰/۵۹۲	۰/۵۰۹	۰/۸۹۱	۱/۵۸	۲۲	s-GARCH-n-Copula-Frank
۱۶	۱۰۰/۳۴	۰/۳۱۲	۱/۶۲۹	۰/۰۰۵۴	۰/۴۴۹	۰/۷۳	۱/۱۸	۱/۷۳	۲۴	s-GARCH-t-Copula-Normal
۱۴	۹۷/۱۳	۰/۰۱۸	۰/۸۱۷۶	۰/۰۷۹	۰/۱۸۷۶	۰/۱۵۶	۰/۶۳	۱/۹۴	۲۷	s-GARCH-t-Copula-t
۷	۸۲/۸۷	۰/۶۴۳	۱۲/۳۳۷۵	۰/۴۸۲	۰/۱۲۷۵	۰/۰۰۰	۱۲/۲۱	۱/۳۷	۱۹	s-GARCH-t-Copula-Clayton
۲	۶۹/۷۱	۰/۴۹۲	۱/۵۳۱۱	۰/۴۹۲	۰/۹۸۸۱	۰/۶۹۴	۰/۵۴۳	۱/۰۸	۱۵	s-GARCH-t-Copula-Gumbel
۹	۸۷/۹۹	۰/۱۱۷	۱/۳۸۱	۰/۵۴۷	۰/۱۳۲	۰/۲۹۲	۱/۲۴۹	۲/۴۵	۳۴	s-GARCH-t-Copula-Frank
۱۰	۸۹/۰۰۷	۰/۰۶۴۳	۲/۲۱۴	۰/۴۶۱	۰/۵۶۴	۰/۸۷۴	۱/۶۵	۱/۳	۱۸	s-GARCH-st-Copula-Normal
۱۳	۹۶/۱۲	۰/۵۴۳	۱/۳۸۴	۰/۳۴۵	۰/۸۴	۰/۳۹۸	۰/۵۴۴	۱/۲۲	۱۷	s-GARCH-st-Copula-t
*	۱۱۰/۰۱	۰/۰۰۰	۲۰/۱۱۳۵	۰/۲۰۶۱	۰/۱۲۳۵	۰/۰۰۰	۱۹/۹۹	۳/۳۱	۴۶	s-GARCH-st-Copula-Clayton
۱	۶۷/۳۲	۰/۰۹	۱/۸۶۹	۰/۲۶۷۷	۰/۷۶۳	۰/۶۹۸	۱/۱۰۶	۱/۰۱	۱۴	s-GARCH-st-Copula-Gumbel
۱۵	۹۹/۱۳	۰/۵۵	۲/۸۶	۰/۵۶۳	۰/۵۱۵	۰/۴۵۶	۲/۳۴۵	۱/۸	۲۵	s-GARCH-st-Copula-Frank

در این جدول ستون‌ها به ترتیب از راست عبارت‌اند از: اسم روش، تعداد تخطی، درصد تخطی،  $LR_{sc}$  مقادیر مربوط به آزمون پوشش غیرشرطی، مقدار آزمون پوشش غیرشرطی،  $LR_{ind}$  آماره آزمون استقلال، مقدار p-value آزمون استقلال،  $LR_{sc}$  آماره آزمون پوشش شرطی، مقدار p-value آزمون پوشش غیرشرطی، ستون دهم مجموع مجذورات اندازه تخطی‌ها، یعنی تابع زیان و سرانجام رتبه‌بندی بر اساس پایین‌ترین مجموع مجذورات. علامت ستاره به معنای رد شدن روش مورد نظر توسط آزمون پوشش شرطی است.