

تعیین سرعت سینماتیک ماهواره‌های مدار پایین با استفاده از فیلتر کالمن تعمیم یافته؛

بررسی موردی: زوج ماهواره GRACE

عبدالرضا صفری^۱، محمدعلی شریفی^۲ و سعید فرزانه^{۳*}

^۱دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۲استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۳دانشجوی دکتری، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۱/۹/۲۲، پذیرش نهایی: ۹۳/۱)

چکیده

گیرنده‌های سامانه موقعیت‌یاب جهانی موجود در ماهواره‌های گرانی‌سنجی اطلاعات ارزشمند موقعیت سه‌بعدی ماهواره را به صورت تقریباً پیوسته اندازه‌گیری می‌کنند. با این حال سرعت ماهواره را که کاربردهای بسیار مهمی در ژئودزی ماهواره‌ای دارد نمی‌توان به طور مستقیم اندازه‌گیری کرد. برای نمونه به منظور بازیابی میدان گرانش زمین به روش ماهواره‌ای نیاز به سرعت و یا شتاب ماهواره است تا با به کارگیری روش انتگرال انرژی یا روش‌های مبتنی بر معادله حرکت، میدان گرانش زمین تعیین شود، بنابراین لازم است سرعت ماهواره را به روش‌های دیگری تعیین کنیم. روش متداول در برآورد بردار سرعت، استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی است. در تحقیق حاضر روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته برای محاسبه بردار سرعت با استفاده از سری زمانی بردار موقعیت ماهواره معرفی و با روش مشتق‌گیری عددی نیوتن-رافسون که به‌منزله بهترین روش عددی در تحقیقات پیشین معرفی شده است، مورد مقایسه قرار می‌گیرد. نتایج عددی این مقاله نشان می‌دهد که روش پیش‌گفته در مقایسه با سایر روش‌های عددی مشتق‌گیری، دقت قابل‌قبول‌تری نتیجه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ماهواره‌های مدار پایین، میدان گرانش زمین، سامانه فاصله‌یابی باند K، فیلتر کالمن تعمیم‌یافته، مشتق‌گیر عددی

Kinematic velocity determination for the low-Earth-orbit satellites using the extended Kalman filter: a case study, the GRACE twin satellites

Safari, A.¹, Sharifi, M.² and Farzaneh, S.³

¹Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

³Ph.D. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 12 Dec 2012, Accepted: 23 Sep 2014)

Summary

Global Positioning System (GPS) receivers in gravimetric satellites continuously measure valuable information about 3D satellite position. However, the velocity of satellites, which has important applications in the satellite geodesy such as gravity field recovery, cannot be directly measured. These data are used in the energy integral method or other methods based on the Earth gravity field motion equation to determine the velocity or acceleration of satellite. In this study, the velocity vector is computed using the numerical differentiation and the Kalman filtering for the Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE) twin satellites. The Numerical results show that the Kalman filtering yields more accurate results

than numerical differentiation when they are compared with the intersatellite range-rate measurements.

In the wake of the New Gravity Satellite era due to the launch of Challenging Minisatellite Payload (CHAMP), GRACE and GOCE, processing methods of enormously large orbit data has become the focus of the geodetic interest. The input data are different from earlier times as they contain some millions of continuous position data per satellite per year. The huge number of data arises from continuous observation from these satellites to the GPS system. This can be done due to the much higher altitude of the GPS satellites (20,000 km) compared to that of the gravity satellites (between 250 and 500 km). The latter is often referred to as Low Earth Orbiter, i.e. LEO. The GPS-LEO constellation as described above in technical terms is called High-Low Satellite to Satellite Tracking (High-Low SST). Thus some million position-data of the LEOs are the basis of the global gravity field determination techniques. The concept behind the Solutions is that satellites are in free-fall in the gravity field of the Earth. After modeling and removing all further force sources (e.g. gravitation of the Sun and the Moon and other planets, direct and indirect tides, surface forces (atmospheric drag, solar radiation pressure)) the remaining orbit is a trajectory in space, which is governed purely by the gravity field of the Earth. Therefore, the task is only to determine the force behind the motion. Conservation laws can be applied for satellites successfully. The Newton's equation of law states the conservation of forces in a closed system. Applying it for a satellite requires information of the acceleration along the orbit. In this article the velocity vector is derived as a part of the unknown vector in Kalman filter algorithm.

Kalman filter is a well-known mathematical tool, which gives the answer to the most frequent engineering question: how can we get the best estimate of the system state from the noisy measurements? The Kalman filter is a data processing algorithm that estimates the state of a system from noisy measurements using least-squares. It gives the optimal system state estimate together with a measure of how precise is the state estimate compared to true state. The Kalman filter performs optimal solution for a linear process with uncorrelated, white, zero mean Gaussian process and measurement disturbances. The Kalman filter is a "one-step back recursive filter", meaning that there is no need to store past measurements for the purpose of computing the present time.

We assume that the discrete random kinematic process to be estimated can be modeled with two main Kalman filter equations:

$$\text{Process equation } x_t = A_t x_{t-1} + W_t$$

$$\text{Measurement equation } y_t = H_t x_t + r_t$$

Where x is the system state vector, A is the state transition matrix and W is the process noise. From this discrete time linear formation of the Kalman filter, the discrete time nonlinear formation of the Extended Kalman Filter is based. For the state space model for the Extended Kalman Filter (EKF), the above linear equations are replaced by one nonlinear function:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, \sigma_{k-1})$$

$$y_k = h(x_k, \rho_k)$$

In this study, the velocity vector is computed using numerical differentiation and the Kalman filtering for the GRACE twin satellites. The numerical analysis shows that the Extended Kalman filtering yields the optimal solution. The comparison is performed based on the intersatellite range-rate measurements.

Keywords: Low earth orbit, Gravity field, K-band ranging, Extended Kalman filter, Numerical differentiation

۱ مقدمه

روش‌های قدیمی تعیین میدان گرانش دارای محدودیت‌هایی هستند که برای بهبود بخشیدن به آنها باید از روش‌های فضایی استفاده کنیم، زیرا این روش‌ها داده‌ها را به صورت جهانی و منظم و متراکم با کیفیت مطلوب و بدون آربیتی جمع‌آوری می‌کنند. مشاهدات تقریباً همگن و همچنین پوشش جهانی مشاهدات، مزیت‌های اصلی روش‌های ماهواره‌ای هستند. در نتیجه از زمان پرتاب اولین ماهواره‌ها، جزئیات زیادی از زمین، هم از لحاظ هندسی و هم از لحاظ فیزیکی جمع‌آوری شده است. روش رایج بازایی میدان گرانش از داده‌های مداری، انتگرال‌گیری عددی از معادلات حرکت است که با عنوان Variational equation، نیز شناخته می‌شوند (ویگلت، ۲۰۰۷). پارامترهای مدار و میدان گرانش به صورت ترکیبی و به همراه هم مدل می‌شوند بنابراین دستگاه معادلات نرمال بسیار بزرگ و پر است که باید وارون شود (ریگبر، ۱۹۸۹). این روش بسیار پرهزینه و وقت‌گیر است و نیاز به رایانه‌های بسیار کارآمد دارد.

سامانه موقعیت‌یاب جهانی (GPS) باعث تحولات شگرفی در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی شده است. مهندسی نقشه‌برداری به طور عام و ژئودزی به طور خاص بیشترین بهره را از این سامانه موقعیت‌یاب برده است. به طوری که در زمینه موقعیت‌یاب و یا به عبارت دیگر ژئودزی هندسی این تحولات باعث جایگزینی کامل سامانه‌های موقعیت‌یاب سنتی با سامانه ماهواره‌ای شده است. ژئودزی فیزیکی نیز از وجود این سامانه بی‌بهره نیست و تغییرات عظیمی را به نسبت خود شاهد بوده است.

با پرتاب ماهواره‌های گرانی‌سنجی نقش سامانه موقعیت‌یاب GPS در شناخت بهتر میدان گرانش زمین به وضوح مشخص شده است به طوری که دقت مدل‌های جهانی میدان گرانش و قدرت تفکیک آنها به مراتب بهتر از قبل از پرتاب این ماهواره‌ها است (دیتمار و اسلوجس،

۲۰۰۴). اهمیت سامانه موقعیت‌یاب GPS در مبحث گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، در امکان‌پذیر شدن موقعیت‌یابی ماهواره گرانی‌سنجی درحکم یک ماهواره مدار پایین (LEO) (Low Earth Orbiting) در کل مسیر حرکت آن است، به عبارت دیگر موقعیت ماهواره گرانی‌سنجی به صورت یک سری زمانی تقریباً پیوسته قابل حصول است، این در حالی است که سایر روش‌های موقعیت‌یاب ماهواره‌ها نظیر فاصله‌یابی لیزری (SLR) (Satellite Laser Ranging) بیشتر ماهیت محلی دارند، لذا امکان ردیابی ماهواره به صورت مستمر و دستیابی به اطلاعات در کل مدار میسر نیست (شریفی، ۲۰۰۴).

معلوم بودن موقعیت ماهواره در کل مدار آن، اطلاعات ذی‌قیمتی است که در هر لحظه موقعیت حس‌گرهای موجود در آن را برای ما معلوم می‌سازد. باین حال باید توجه داشت که در بحث گرانی‌سنجی ماهواره‌ای، خود ماهواره به منزله یک حس‌گر در میدان گرانش عمل می‌کند و از تحلیل تغییرات مدار آن می‌توان به جزئیات میدان گرانش پی برد. لذا باید به نحوی بتوان اطلاعات موقعیت حاصل از GPS را با خصوصیات فیزیکی میدان حاکم بر حرکت ماهواره مرتبط ساخت. در صورتی که فرض کنیم اثر همه نیروهای غیرجاذبی و جاذبی با منشأ غیر از میدان گرانش زمین با مدل‌های ریاضی از موقعیت مشاهداتی ماهواره گرانی‌سنجی حذف شده و یا به عبارتی مسئله از حالت چندجسمی (n-body) به حالت دوجسمی تبدیل شده است، می‌توان با استفاده از یکی از دو روند زیر به کمک ماهواره‌های ارتفاع پایین گرانی‌سنجی کرد.

۱- استفاده از بقاء انرژی جنبشی و یا به عبارت دیگر روش انتگرال انرژی، که اساس آن بر به کارگیری سرعت لحظه‌ای ماهواره درحکم کمیت مشاهداتی برای تعیین میدان گرانش است (جکلی، ۱۹۹۹).

۲- استفاده از قانون دوم نیوتن که در واقع کمیت مشاهداتی

در این روش شتاب ماهواره خواهد بود (شریفی، ۲۰۰۶).

لذا در بحث گرانی‌سنجی آنچه که مورد نیاز خواهد بود موقعیت و سرعت یا شتاب ماهواره است. با استفاده از سامانه GPS تنها بردار موقعیت لحظه‌ای ماهواره در دسترس خواهد بود پس باید بردار سرعت یا شتاب ماهواره را نیز از اطلاعات موقعیت تعیین کرد که این مهم عمدتاً به کمک روش‌های عددی صورت می‌گیرد. از طرف دیگر فیلتر کالمن روشی است که در چند دهه گذشته به‌طور گسترده برای برآورد پارامترها و متغیرهای حالت در سامانه‌های دینامیکی به کار می‌رود. از جمله سامانه‌های دینامیکی، ژنودزی ماهواره‌ای است. مشاهده گر کالمن با فرض یک مدل خطی از سامانه، به برآورد متغیرهای حالت می‌پردازد. فیلتر کالمن یک فیلتر بازگشتی کارآمد است که حالت سامانه پویایی را از مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های همراه با خطا برآورد می‌کند.

برای حل مسائل فیلترینگ غیرخطی و دارای نوفه، الگوریتم فیلتر کالمن تعمیم‌یافته از مناسب‌ترین روش‌ها است. این فیلتر بر اساس اصل خطی‌سازی اندازه‌گیری‌ها و توسعه مدل با استفاده از بسط سری تیلور بنا نهاده شده است. فیلتر کالمن تعمیم‌یافته می‌تواند در سامانه‌های تصادفی غیرخطی که اغتشاش در فرایند و نوفه در اندازه‌گیری‌های حس‌گرها موجود است، متغیرهای حالت سامانه را به‌صورتی بهینه برآورد کند. در حالت خاص، ورودی یا پارامتر مجهول را می‌توان با تبدیل کردن آنها به منزله متغیرهای حالت مکمل برآورد کرد. در عوض فیلتر کالمن دارای محاسبات پیچیده‌تری نسبت به روش‌های عددی است که باعث افزایش حجم و زمان محاسبات خواهد شد. علاوه بر آن انتخاب مدل دینامیکی مناسب و تعیین درست ماتریس‌های کوواریانس اهمیت زیادی دارد، چرا که انتخاب نادرست آنها باعث نتایج نامطلوب خواهد شد.

هدف از نگارش این مقاله معرفی روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته به‌منظور تعیین سرعت با استفاده از

اندازه‌گیری‌های موقعیت است. برای این منظور ابتدا در بخش دوم در خصوص روش‌های فضایی تعیین میدان گرانش مطالبی بیان می‌شود. سپس در بخش سوم اساس نظریه فیلتر کالمن و فیلتر کالمن تعمیم‌یافته عرضه شده است. در بخش چهارم دقت روش عرضه شده به‌صورت عددی ارزیابی می‌شود. در نهایت در بخش آخر نتیجه‌گیری عرضه می‌شود.

۲ روش‌های فضایی تعیین میدان گرانی

هدف رسیدن به دقت زیاد برای ضرایب پتانسیل میدان گرانش زمین با استفاده از تفکیک مراحل تعیین مدار و بازیابی میدان گرانش است. در مرحله اول، موقعیت‌ها و سرعت‌ها از مشاهدات GPS به دست می‌آیند (ویگل، ۲۰۰۷). در مرحله دوم، موقعیت‌ها و سرعت‌ها به پارامترهای میدان گرانش مرتبط می‌شوند. این روش‌ها، روش‌های تناوبی بازیابی ضرایب هماهنگ (هارمونیک) کروی هستند که بر پایه مسئله مقدار مرزی بنا شده‌اند (مانند روش انتگرال انرژی). مقادیر اختلاف شتاب و اختلاف پتانسیل بین دو ماهواره در مدار، با ترکیب داده‌های موقعیت، سرعت، شتاب و اختلاف فاصله دو ماهواره به دست می‌آید (جکلی، ۱۹۹۹) اختلاف شتاب و اختلاف پتانسیل محاسبه شده، درحکم مقادیر مرزی روی مرز مشخص (همان مدار) به شمار می‌روند. بر پایه این اصل و توسعه آن چندین ماموریت فضایی طراحی شده است که از این میان ماهواره‌های GRACE و CHAMP و GOCE به فضا پرتاب شده‌اند، در اینجا خلاصه‌ای از ساختار و عملکرد این ماهواره‌ها عرضه می‌شود. در این زمینه می‌توان به تحقیقات صورت گرفته مایر و همکاران (۲۰۱۰)، خادمی و همکاران (۱۳۹۱) و کورتناخ و همکاران (۲۰۱۱) اشاره کرد.

۱- ماهواره CHAMP دارای شتاب‌سنج سه محوره و قابلیت ردیابی توسط سامانه‌های موقعیت‌یاب ماهواره‌ای

وضعیت آب‌وهوا دارند، کمک کند. می‌توان امیدوار بود که دانشمندان با کمک همین داده‌ها بتوانند پیش‌بینی دقیق‌تر و طولانی‌تری از وضعیت آب‌وهوا و تغییرات اقلیمی داشته باشند. داده‌های ماهواره گاوس به شناخت نحوه تغییر و تحول آتشفشان‌ها و حرکت پوسته زمین با توجه به گسل‌ها نیز کمک می‌کند. مهم‌ترین دستاورد ماهواره گاوس، انتشار نقشه تمام‌نمای گرانش در کل زمین یا به عبارتی دیگر، نقشه دقیق گرانش زمین‌واره است. دانشمندان قصد دارند از مدل زمین‌واره مرجع برای اندازه‌گیری فعالیت‌های اقیانوسی استفاده کنند و این می‌تواند در تشخیص دقیق جریان‌های گردشی اقیانوسی و تغییر ارتفاع سطح آب‌های اقیانوس موثر واقع شود. اصلی‌ترین ابزار گاوس، شیب‌پیما است که شامل سه جفت شتاب‌سنج یکسان برای آشکارسازی تغییرات بسیار جزئی گرانش به کوچکی یک در ده هزار میلیارد می‌شود. شتاب‌سنج‌ها با سه بازوی خود در سه جهت گذر ماهواره گاوس، عمود بر مسیر پرواز و به سوی مرکز زمین قرار گرفته‌اند تا کوچک‌ترین تغییرات گرانشی را به دقت ثبت کنند. با گذر ماهواره گاوس با سرعت ۸ کیلومتر بر ثانیه از فراز زمین، میزان کشش هرکدام از شتاب‌سنج‌ها ثبت می‌شود. شتاب‌سنج‌های ماهواره گاوس ۱۰۰ بار حساس‌تر از حس‌گرهای ماموریت امریکایی-آلمانی گریس است و اطلاعات گردآوری شده آن هزار بار دقیق‌تر از ماهواره آلمانی چمپ است (ایسا، ۲۰۱۰).

به‌طور کلی در بازیابی میدان گرانش با استفاده از روش‌های ماهواره‌ای از یکی از دو ساختارهای زیر استفاده می‌شود به‌نحوی که اولین ساختار در ماهواره CHAMP و دومین ساختار در ماهواره GRACE مورد استفاده قرار می‌گیرد:

(High-Low Satellite-to-) HL-SST :Satellite Tracking

در این روش یک ماهواره (LEO) (Low Earth

GNSS) است. همچنین از راه‌های گوناگون می‌توان برای مشاهدات آن معادله نوشت که یکی از آنها معادله مشاهداتی است که براساس آن می‌توان مقدار پتانسیل (یا به عبارت بهتر بی‌هنجاری پتانسیل) را در طول مدار ماهواره به‌دست آورد (جکلی، ۱۹۹۹؛ گرلک و همکاران، ۲۰۰۳).

۲- ماموریت فضایی GRACE شامل دو ماهواره است که در یک مدار همدیگر را تعقیب می‌کنند و فاصله بین دو ماهواره در مدار به‌طور پیوسته اندازه‌گیری می‌شود. این سامانه که به یک شتاب‌سنج سه‌بعدی مجهز است همچنین دارای قابلیت ردیابی به کمک سامانه‌های موقعیت‌یاب ماهواره‌ای (GNSS) نیز است و این در حالی است که حساسیت آن بیشتر از شتاب‌سنج CHAMP است (رومل و همکاران، ۲۰۰۹). خروجی ماهواره‌های GRACE یک تابع از مشتق‌های مرتبه دوم مولفه‌های مداری در راستای طولی و شعاعی است (میگلیاچیو و همکاران، ۲۰۰۸).

۳- ماموریت GOCE، کاوش گرانش زمین و پیش‌بینی‌های آب‌وهوایی و اقیانوس‌شناسی است. این ماهواره در ارتفاع ۲۶۰ کیلومتری سطح زمین، توزیع گرانش را در سراسر زمین می‌سنجد و به کمک آن، نحوه شارش جریان‌های اقیانوسی را معلوم می‌سازد. این ماهواره با باله‌های خود، شکل عجیب‌تری نسبت به دیگر ماهواره‌ها دارد. علت داشتن این باله‌ها، گذر ماهواره از ارتفاع بسیار پایین ۲۶۰ کیلومتری است که جو زمین هم‌چنان به‌صورت رقیق وجود دارد؛ بنابراین باله‌های ماهواره گاوس به همراه موتور یونی پیشران آن، سعی در پایدار کردن مسیر حرکت این ماهواره دارند. ماهواره گاوس همچنین جزو بزرگ‌ترین ماهواره‌های ارسالی به حساب می‌آید و علی‌رغم این که در سازمان فضایی اروپا طراحی شده، با موشک بالستیک اصلاح‌شده قاره‌پیمای روسی راه فضا را در پیش گرفت. گاوس هم‌چنین می‌تواند با داده‌های ارسالی خود به تعیین نحوه شارش جریان‌های اقیانوسی که نقشی عمده در تغییر

در مقایسه با روش HL-SST قابل ارزیابی است (شریفی ۲۰۰۶). در شکل ۱ دو مفهوم LL-SST و HL-SST به صورت نمادین به نمایش گذاشته شده است. اختلاف شتاب در راستای خط دید دو ماهواره GRACE، تابعی از فاصله نسبی دو ماهواره یعنی ρ و تغییرات زمانی آن $\dot{\rho}$ است. سامانه KBR مورد استفاده در ماهواره‌های GRACE مشاهدات ρ و $\dot{\rho}$ را درحکم مشاهدات LL-SST با بسامد نمونه‌برداری ۱۰ هرتز تامین می‌کند درضمن گیرنده سامانه موقعیت‌یاب جهانی دوبسامده Blackjack که روی جفت‌ماهواره GRACE نصب شده است، بردار موقعیت را به منزله مشاهدات HL-SST با بسامد نمونه‌برداری کمتری نسبت به سامانه KBR یعنی با بسامد ۰٫۱ هرتز تامین می‌کنند. مشاهدات هر دو روش با استفاده از رابطه (۱) با همدیگر ارتباط پیدا می‌کنند (شریفی، ۲۰۰۴):

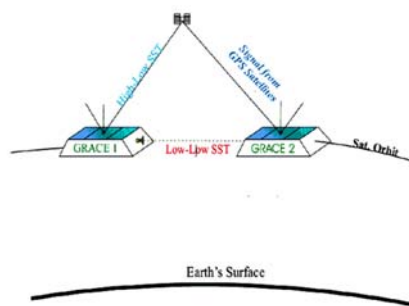
$$\langle \ddot{r}_2 + \ddot{r}_1, r_2 - r_1 \rangle = \dot{\rho}^2 + \rho \ddot{\rho} - \langle \dot{r}_2 + \dot{r}_1, \dot{r}_2 + \dot{r}_1 \rangle \quad (1)$$

که در آن، \dot{r}_1 و \dot{r}_2 بردار سرعت دو ماهواره‌اند و با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی و یا با استفاده از فیلتر کالمن تعمیم‌یافته از مشاهدات بردار موقعیت ماهواره‌ها به‌دست می‌آیند. تغییرات $\dot{\rho}$ میان دو ماهواره GRACE یعنی $\ddot{\rho}$ نیز با استفاده از روش‌های پیش‌گفته از مشاهدات $\dot{\rho}$ به‌دست می‌آیند. همچنین $\langle \rangle$ بیانگر ضرب داخلی دو بردار است.

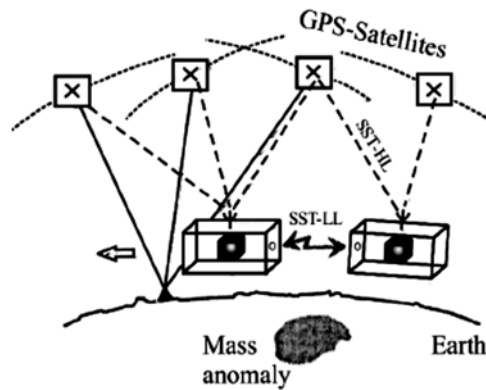
(Orbiter) به منزله حس‌گر میدان گرانش زمین با یک یا چند گروه از ماهواره‌های ارتفاع بالا (High Earth) (HEO) (Orbiter) درحکم نقاط کنترل ثابت که در حال گردش بدور زمین هستند، ردیابی می‌شوند. این مفهوم با پرتاب ماهواره CHAMP اولین بار به واقعیت پیوست. با استفاده از این روش اطلاعات بسیار ارزشمندی برای بازیابی طول موج‌های بلند و متوسط میدان گرانش (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۷۰) قابل دستیابی است (شریفی، ۲۰۰۶).

High-Low Satellite-to-LL-SST (Satellite Tracking)

در این روش دو ماهواره ارتفاع پایین با یک یا چند گروه از ماهواره‌های ارتفاع بالا (ماهواره‌های با ارتفاع بالا درحکم نقاط کنترل ثابت که در حال گردش به دور زمین هستند)، ردیابی می‌شوند. این دو ماهواره ارتفاع پایین شبیه به هم هستند و در یک مدار مشابه به دنبال هم به دور زمین می‌گردند. فاصله بین این دو ماهواره در حدود چندین صد کیلومتر است و با حس‌گرهایی فاصله بین این دو ماهواره (ρ) و تغییرات این فاصله ($\dot{\rho}$) اندازه‌گیری می‌شود. این دو ماهواره مشابه، نقش یک حس‌گر را در میدان گرانش زمین ایفا می‌کنند. این مفهوم اولین بار با پرتاب ماهواره GRACE محقق شد. با استفاده از مشاهدات حاصل از این روش، طول موج‌های کوتاه‌تری از میدان گرانش زمین (ضرایب هماهنگ‌های کروی با درجه و مرتبه کوچک‌تر از ۲۰۰)



شکل ۱. ساختارهای LL-SST و HL-SST (شریفی، ۲۰۰۴).



شکل ۲. سامانه‌های موقعیت ماهواره GRACE (ناسا، ۲۰۰۲).

علاوه بر مشاهدات KBR، هرکدام از ماهواره‌های GRACE مجهز به یک شتاب‌سنج سه محوری در مرکز جرم خود هستند که شتاب‌های غیرجاذبی وارد بر ماهواره را اندازه‌گیری می‌کنند. سری زمانی حاصل از مشاهدات سامانه موقعیت‌یاب جهانی و مشاهدات KBR اطلاعات بسیار ارزنده‌ای از موقعیت، سرعت و شتاب نسبی دو ماهواره به‌دست می‌دهند.

۳ فیلتر کالمن

این فیلتر از زمانی که کالمن در ۱۹۶۰ آن را معرفی کرد تا امروز، به‌ویژه در دستگاه‌های خودکار و نیز ناوبری، کاربردهای گسترده‌ای دارد و موضوع تحقیقات علمی بسیاری بوده است. به علت گستردگی موضوع، شرح کامل فیلتر کالمن از حوزه این مقاله خارج است و در این بخش به توضیح مختصری در مورد آن بسنده می‌کنیم. برای بررسی بیشتر رجوع کنید به (براون و هانگ، ۱۹۹۲؛ گروال و آندروس، ۱۹۹۳؛ ولچ و بیشاپ، ۲۰۰۴).

فیلتر کالمن فیلتری بازگشتی برای پردازش داده‌ها است که با کمک مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های ناقص و دارای نوفه و نیز با استفاده از دینامیک حاکم بر مدل، حالت سامانه دینامیکی را برآورد می‌کند. اساس این فیلتر

به‌منظور عملی ساختن محاسبات عددی در این مقاله، ماهواره GRACE انتخاب شده است. ماموریت GRACE یک طرح مشترک بین سازمان NASA و سازمان DLR آلمان با هدف تعیین میدان گرانش زمین با توان تفکیک زیاد و تغییرات زمانی آن و همچنین تعیین ظرفیت الکترون‌ها با استفاده از اندازه‌گیری‌های GPS برای به‌دست آوردن دانشی درخصوص شکست در جو و یونسپهر است. دو ماهواره این ماموریت در روز ۱۷ مارس ۲۰۰۲ به فضا پرتاب شده‌اند. این سامانه ماهواره‌ای اولین نسل از ماهواره‌های خوشه‌ای است که در آن از دو ماهواره مشابه در یک مدار با ارتفاع ۴۵۰ کیلومتری زمین که دارای مدار تقریباً دایره‌ای و نزدیک قطب هستند، استفاده شده است (شکل ۲). اطلاعات مدار این ماهواره از دو کانال متفاوت حاصل می‌شود. موقعیت دو ماهواره از راه سامانه موقعیت‌یاب جهانی GPS با استفاده از گیرنده‌هایی که روی جفت‌ماهواره قرار دارند ثبت می‌شود و نرخ ثبت اطلاعات موقعیتی ماهواره در آن ۶۰ ثانیه است.

فاصله نسبی بین این دو ماهواره ρ و تغییرات این فاصله $\dot{\rho}$ به‌صورت پیوسته با دقت زیادی به کمک سامانه KBR (K-band Ranging System) که در ماهواره‌ها تعبیه شده است، اندازه‌گیری می‌شود (شکل ۲) (ناسا، ۲۰۰۲).

t مرتبط می‌کند و وابسته به زمان است.

اگر y_t حالت معلوم و اندازه‌گیری شده در زمان t باشد، رابطه آن با x_t به کمک معادله (۳)، موسوم به معادله اندازه‌گیری یا دیدبانی داده می‌شود:

$$y_t = H_t x_t + r_t \quad (3)$$

که در آن، r_t بردار نوفه اندازه‌گیری و H_t ماتریسی است که حالت x را به اندازه‌گیری y در همان زمان مرتبط می‌کند و متغیر با زمان است. W_t و r_t نوفه‌های سفیدند، توزیع نرمال دارند و مستقل از هم هستند. یعنی $\forall s, t \in N, E(W_s r_t) = 0$ همچنین، هر یک از این نوفه‌ها برای زمان‌های متفاوت مستقل از هم‌اند. یعنی $E(W_s W_t) = 0$ و $E(r_s r_t) = 0$ $\forall s \neq t$ ، امید ریاضی است.

در فیلتر کالمن ابتدا پیش‌حالت t یعنی $(x_{t/t-1})$ براساس مقدار متغیر در زمان $t-1$ و نیز پیش برآورد کوواریانس خطا $(P_{t/t-1})$ محاسبه می‌شود:

$$x_{t/t-1} = F_t x_{t-1} \quad (4)$$

$$P_{t/t-1} = F_t P_{t-1} F_t^T + Q \quad (5)$$

که در آن، Q کوواریانس خطای فرایند (W_t) و F_t ماتریس گذر هستند. دو معادله بالا را معادله پیش‌بینی می‌نامند. وقتی دیدبانی جدید در زمان t (y_t) صورت می‌گیرد، می‌توان برآورد حالت جدید (x_t) را با ترکیب خطی از پیش برآورد $x_{t/t-1}$ و خطای پیش‌بینی، یعنی $(y_t - H_t x_{t/t-1})$ روزآمد کرد:

$$x_t = x_{t/t-1} + K_t (y_t - H_t x_{t/t-1}) \quad (6)$$

که در آن ماتریس بهره کالمن، K_t ، با رابطه (۷) داده می‌شود:

$$K_t = \frac{P_{t/t-1} H_t}{H_t P_{t/t-1} H_t^T + R} \quad (7)$$

جبر خطی و مدل مخفی مارکوف است. سامانه دینامیکی موردنظر به صورت یک زنجیره مارکوف مدل سازی می‌شود. این زنجیره با عملگرهای خطی آمیخته شده با نوفه گاوسی ساخته شده است. در این فیلتر، حالت سامانه با برداری از اعداد حقیقی نمایش داده می‌شود. فیلتر کالمن برای محاسبه مقدار متغیرها بدون توجه به دقت اطلاعات ورودی از همه آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد و همه اندازه‌گیری‌های موجود را پردازش می‌کند؛ همچنین اطلاعات مربوط به دینامیک سامانه و دستگاه‌های اندازه‌گیری، نوفه‌های سامانه، خطاهای اندازه‌گیری، عدم قطعیت مدل‌های دینامیکی و هر اطلاعات موجود در مورد شرایط اولیه پارامتر موردنظر را در نظر می‌گیرد. این فیلتر مجموعه‌ای از معادلات ریاضی است که نوعی برآوردکننده پیش‌بینی -تصحیح‌کننده محسوب می‌شود؛ بدین معنی که مقدار پارامتر موردنظر در گام اول پیش‌بینی، و سپس تصحیح می‌شود. الگوریتم فیلتر کالمن، بهینه است؛ زیرا حالت سامانه طوری برآورد می‌شود که کوواریانس خطای برآوردشده کمینه باشد (زارچان، ۲۰۰۵).

فیلتر کالمن انواع متفاوتی دارد؛ در فیلتر کالمن ساده فرض بر این است که رابطه بین حالت نامعلوم متغیر در زمان t و حالت آن در زمان $t-1$ رابطه‌ای خطی است؛ اگر این رابطه غیرخطی باشد، فیلتر از نوع فیلتر کالمن تعمیم‌یافته (EKF, Extended Kalman Filter) است.

فرض کنید x_t بردار مربوط به حالت نامعلوم سامانه در زمان t و x_{t-1} بردار حالت معلوم سامانه در زمان $t-1$ ، رابطه این دو بردار با معادله (۲) که معادله سامانه نام دارد داده می‌شود:

$$x_t = A_t x_{t-1} + W_t \quad (2)$$

که در این رابطه W_t بردار نوفه فرایند و A_t ماتریسی است که حالت $t-1$ بردار حالت را به حالت فعلی آن در زمان

(۲۰۰۹):

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, \sigma_{k-1}) \quad (۹)$$

$$y_k = h(x_k, \rho_k) \quad (۱۰)$$

که متغیرهای تصادفی σ_{k-1} و ρ_k به ترتیب نوفه‌های گاوسی فرایند و اندازه‌گیری با میانگین صفر و دارای ماتریس کواریانس Q و R هستند. تابع غیر خطی f رابطه متغیر حالت در مرحله زمانی $k-1$ و مرحله زمانی k را نشان می‌دهد. u_k تابع محرک سامانه است و h رابطه غیرخطی بین متغیر حالت x_k و متغیر اندازه‌گیری y_k را نشان می‌دهد. متغیر حالت برآورد شده \hat{x} را می‌توان از معادلات (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) به دست آورد:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}^-, u_k, 0) \quad (۱۱)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (۱۲)$$

گام تصحیح،

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (۱۳)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (۱۴)$$

$$P_k = (1 - K_k H_k) P_k^- \quad (۱۵)$$

که \hat{x}_{k-1}^- برآورد حالت در مرحله زمانی $k-1$ ام، \hat{x}_k برآورد حالت در مرحله زمانی k ام، P_k ماتریس کواریانس خطای برآورد حالت در مرحله زمانی $k-1$ ام، P_k^- ماتریس کواریانس خطای برآورد حالت در مرحله زمانی k ام، A_k ماتریس ژاکوبی مشتق‌های جزئی f نسبت به x ، که در آن، $W_k; A_k[i, j] = \frac{\partial f[i]}{\partial x[j]}(\hat{x}_{k-1}^-, u_k, 0)$ ماتریس ژاکوبی مشتق‌های جزئی f نسبت به σ که در آن $H_k; W_k[i, j] = \frac{\partial f[i]}{\partial \sigma[j]}(\hat{x}_{k-1}^-, u_k, 0)$ جزئی h نسبت به x ، که در آن، $V_k[i, j] = \frac{\partial h[i]}{\partial \rho[j]}(\hat{x}_k, 0)$ ماتریس ژاکوبی مشتق‌های جزئی h نسبت به ρ ، که در آن، $V_k[i, j] = \frac{\partial h[i]}{\partial x[j]}(\hat{x}_k, 0)$ تقریب حالت در مرحله

در رابطه (۷)، R کواریانس خطای اندازه‌گیری (r_t) است. بهره کاملن چگونگی تنظیم فیلتر را با شرایط جدید تعیین می‌کند. کواریانس خطای x_t نیز از معادله (۸) به دست می‌آید:

$$P_t = (I - H_t K_t) P_{t/t-1} \quad (۸)$$

سه معادله (۶)، (۷) و (۸) معادلات تصحیح‌کننده نام دارند و از آنها برای روزآمدسازی فیلتر کاملن از زمان $t-1$ به t استفاده می‌شود.

برای شروع و اجرای فیلتر، باید مقادیر اولیه x_0 و P_0 به فیلتر داده شود. x_0 خطای سامانمند اولیه است و می‌توان آن را صفر در نظر گرفت. P_0 نیز واریانس اولیه است که مقدار ابتدایی آن بزرگ فرض می‌شود. مقدار اولیه این پارامترها مهم نیست. زیرا خیلی زود و پس از چند تکرار به مقدار تعیین شده با فیلتر میل می‌کنند و نتیجه به دست آمده مستقل از مقدار اولیه آنها است. اما تعیین بردارهای r_t و W_t مهم است و مقدار آنها می‌تواند خروجی را به شدت تحت تاثیر قرار دهد. شکل ۳ نحوه کارکرد فیلتر کاملن و شرایطی که در آن می‌تواند مفید باشد را نشان می‌دهد. سامانه برخی دسته‌بندی‌ها را از تعدادی از کنترل‌کننده‌های شناخته شده استخراج می‌کند. ابزارهای اندازه‌گیری نیز ارزش مقادیر قطعی را فراهم می‌کنند. دانش ورودی و خروجی‌های این سامانه، همه آن چیزی است که به‌طور مستقیم از سامانه فیزیکی برای اهداف برآورد فراهم شده است.

۳-۱ فیلتر کاملن تعمیم‌یافته

فیلتر کاملن تعمیم‌یافته از فیلتر کاملن مشتق می‌شود و در مشاهده حالت‌های سامانه غیرخطی به کار می‌رود. با فرض $x \in R^n$ درحکم بردار حالت فرایند و متغیر اندازه‌گیری (خروجی) $y \in R^n$ ، فرایند را می‌توان با معادله دیفرانسیل غیرخطی اتفاقی (۹) و (۱۰) توصیف کرد (چو و چن،

علت اینکه حرکت ماهواره در مدار یک حرکت شتابدار با شتاب متغیر است، بنابراین با یک مسئله غیرخطی در معادله حرکت ماهواره روبه‌رو هستیم. به کارگیری الگوریتم EKF شامل دو فاز اصلی است، در مرحله اول، متغیرهای حالت با استفاده از یک مدل محاسباتی پیش‌بینی می‌شوند و در مرحله دوم مقادیر به‌دست آمده از مرحله اول با استفاده از طرح تصحیح بازخور به‌طور پیوسته مورد اصلاح قرار می‌گیرند. مراحل EKF در برآورد سرعت سینماتیک مدار عبارت‌اند از:

-انتخاب مدلی در حوزه زمان

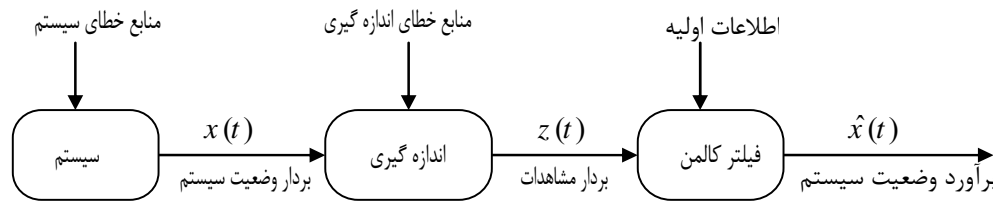
-گسسته‌سازی مدل

-تعیین ماتریس‌های کواریانس و نوفه‌های ورودی و خروجی

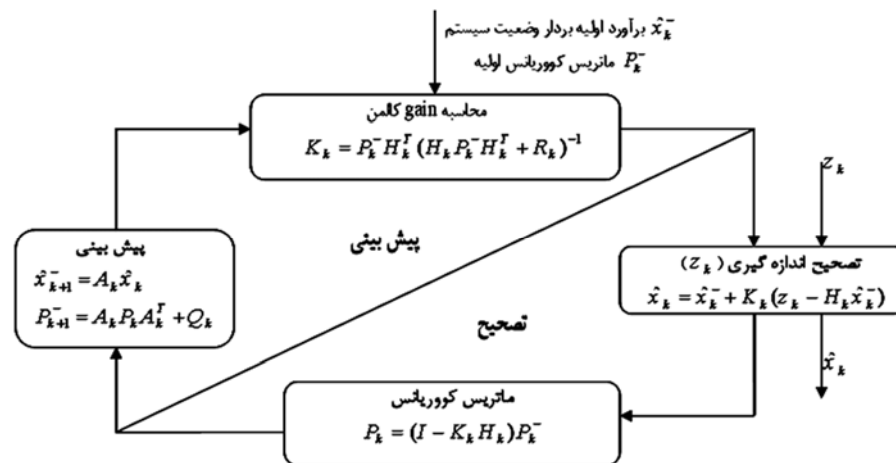
زمانی k ام، که در آن $\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0)$ است. شکل ۴ چهار مرحله عمل یک فیلتر کالمن با ذکر روابط مورد استفاده نشان داده شده است. لازم به ذکر است که فیلتر کالمن تعمیم‌یافته چیزی جز به کارگیری فیلتر کالمن استاندارد برای مدل‌های خطی شده نیست. به عبارت دیگر ماتریس‌های ژاکوبی، جایگزین ماتریس‌های تبدیل خطی مورد استفاده در فیلتر کالمن استاندارد می‌شوند.

۲-۳ اعمال و کاربرد EKF در برآورد سرعت سینماتیک مدار

همان‌طور که گفته شد هدف اصلی این مقاله تعیین سرعت سینماتیک ماهواره با استفاده از مشاهدات GPS است. به



شکل ۳. تحلیل پویایی حاکم بر یک الگو و نحوه کارکرد فیلتر کالمن.



شکل ۴. فلرچارت فیلتر کالمن تعمیم‌یافته.

برای مدل دینامیکی و L ماتریس ثابتی است که مشخص‌کننده نحوه شرکت نوفه سفید در سامانه است. همچنین $W(t)$ نوفه فرایند با ماتریس کواریانس Q_c است. ۳- معادله مشاهدات: همان‌طور که ذکر شد اگر y_t حالت معلوم و اندازه‌گیری شده در زمان t باشد (موقعیت ماهواره که توسط GPS ثبت شده است)، رابطه آن با x_t به کمک معادله (۱۹)، موسوم به معادله اندازه‌گیری یا دیدبانی داده می‌شود:

$$y_t = H_t x_t + V_t \quad (19)$$

به‌طوری‌که ماتریس طرح سامانه به‌صورت رابطه (۲۰) است:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

۲-۲-۳ گسسته‌سازی مدل

حالت خاصی از سامانه‌های دینامیک خطی، سامانه‌های دینامیکی با ضریب‌های ثابت هستند که می‌توان به‌صورت معادلات (۲۱)، (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) بیان کرد (سارکا، ۲۰۰۷؛ بار-شالوم، ۲۰۰۱):

$$x_K = A_{K-1} x_{K-1} + q_{K-1} \quad (21)$$

$$y_k = H_k x_k + r_k \quad (22)$$

$$A = \exp(FT) = I + FT + \frac{(FT)^2}{2!} + \frac{(FT)^3}{3!} + \dots \quad (23)$$

$$Q_k = \int_0^{\Delta t_k} \exp(F(T-\tau)) L Q_c L^T \exp(F(T-\tau))^T d\tau \quad (24)$$

به‌طوری‌که A ماتریس انتقال (گذر) سامانه یعنی ماتریسی که حالت $t-1$ بردار حالت را به حالت فعلی آن در زمان t مرتبط می‌کند و وابسته به زمان است و Q_k ماتریس کواریانس سامانه است. لازم به تذکر است که در رابطه (۲۳) به علت ثابت بودن ماتریس گذر مدل دینامیکی (F)، ماتریس انتقال به‌صورت سری

۱-۲-۳ انتخاب مدلی در حوزه زمان

مدل‌های گوناگونی را می‌توان در برآورد (پیش‌گویی) بردار سرعت به کار برد ولی در اینجا به علت خصوصیات مسئله، از مدل وینر در برآورد بردار سرعت استفاده شده است.

معادلات تحت مدل پیش‌گفته به‌صورت معادله (۱۶) است: ۱- بردار وضعیت سامانه: همان‌طور که می‌دانیم بردار وضعیت یا بردار حالت در بحث ناوبری شامل بردار موقعیت، سرعت و شتاب است:

$$X_k = (x_k \ y_k \ z_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k \ \ddot{x}_k \ \ddot{y}_k \ \ddot{z}_k) \quad (16)$$

به‌طوری‌که بردار موقعیت ماهواره که با GPS ثبت شده است و بردار سرعت ماهواره و ($\dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k$) بردار شتاب ماهواره است

۲- مدل دینامیکی سامانه: سامانه‌های خطی حالت خاصی از سامانه‌های دینامیکی هستند که در حالت کلی با دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۱۷) و (۱۸) قابل بیان‌اند (برون و هوانگ، ۱۹۹۸):

$$\frac{dX(t)}{dt} = FX(t) + LW(t) \quad (17)$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W(t) \quad (18)$$

به‌طوری‌که $X(t)$ بردار وضعیت سامانه، F ماتریس گذر

نمایی نوشته شده است (سارکا، ۲۰۰۷؛ بار- شالوم ۲۰۰۱) که با استفاده از دستور expm نرم افزار مت‌کب قابل محاسبه است (هایم، ۲۰۰۵). با استفاده از روابط بالا ماتریس‌های انتقال و کواریانس به ترتیب با روابط (۲۵) و (۲۶) بیان می‌شوند (سارکا، ۲۰۰۷؛ بار- شالوم ۲۰۰۱):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}dt^5q & 0 & 0 & \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{6}dt^3q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}dt^5q & 0 & \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{6}dt^3q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20}dt^5q & 0 & 0 & \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{6}dt^3q \\ \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{3}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{3}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}dt^4q & 0 & 0 & \frac{1}{3}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q \\ \frac{1}{6}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q & 0 & 0 & dtq & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q & 0 & 0 & dtq & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}dt^3q & 0 & 0 & \frac{1}{2}dt^2q & 0 & 0 & dtq \end{pmatrix} \quad (26)$$

که واریانس برآورد حالت‌ها را کمینه سازد. بخش مهم الگوریتم، مقداره‌ی به ماتریس‌های کواریانس است که آن‌را می‌توان از ملاحظه مشخصات آماری نوفه‌های موجود بررسی کرد.

۴ بررسی موردی: پیاده‌سازی الگوریتم گسسته‌سازی شده EKF و تنظیم پارامترهای آن برای زوج ماهواره GRACE به‌منظور ارزیابی روش پیشنهادی ابتدا سرعت ماهواره را روی یک مدار واقعی (موقعیت توسط GPS ثبت شده است) مربوط به تاریخ ۲۰۰۵/۱/۱ که از سایت <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html> قابل دسترسی است با استفاده از الگوریتم پیشنهادی محاسبه و

در رابطه (۲۶) dt و q به ترتیب بیانگر گام زمانی بین مشاهدات و مقدار نوفه سامانه هستند.

۳-۲-۳ تعیین ماتریس‌های کواریانس حالت و نوفه در مرحله اول فیلتر کالمن (پیشگویی حالت‌ها) مقادیر جدید حالت یعنی x_k با استفاده از مدل ریاضی و مقادیر قبلی حالت به دست می‌آید. علاوه بر آن، ماتریس کواریانس پیش‌بینی شده P قبل از اندازه‌گیری‌های جدید تولید می‌شود و به این منظور، مدل ریاضی و ماتریس کواریانس سامانه Q مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مرحله دوم (فیلترینگ) حالت‌های برآوردی جدید یعنی \hat{x}_k از برآورد پیشگویی شده x_k به علاوه یک عبارت اصلاحی به دست می‌آید. ماتریس بهره کالمن طوری تعیین می‌شود

این حالت، علاوه بر اختلاف موقعیت ماهواره که از مشاهدات GPS به دست می‌آید، مشتق‌های آنها را که با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی قابل حصول است، در بردار اندازه‌گیری در نظر می‌گیریم (رابطه ۲۹):

$$y = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z}) \quad (29)$$

به طوری که $(\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z})$ بردار مشتق محاسبه شده از بردار موقعیت است که به صورت عددی به دست آمده است. لازم به ذکر است که در مشتق‌گیری عددی از روش نیوتن که به منزله بهترین روش مشتق‌گیری عددی معرفی شده، استفاده شده است (خادمی و همکاران، ۱۳۹۱). به عبارت دیگر در این مرحله قصد داریم روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته را با روش‌های عددی مشتق‌گیری تلفیق کنیم. در شکل ۶ بردار اختلاف حاصل از این روش نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود هرچند این روش بردار سرعت را به خوبی برآورد شده است اما روش مرحله قبل از دقت بیشتری برخوردار است (شکل ۷).

پ) مقایسه روش مشتق‌گیری عددی و روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته، به این معنی که ابتدا بردار سرعت را با استفاده از روش مشتق‌گیری عددی (روش نیوتن) محاسبه می‌شود. سپس از رابطه (۲۷) تغییرات فاصله بین دو ماهواره محاسبه می‌شود و اختلاف آن با مقدار مشاهده شده به دست می‌آید (شکل ۸). در ادامه بردار اختلاف حاصل از روش مشتق‌گیری عددی با نتایج به دست آمده از روش فیلتر کالمن (قسمت الف) مقایسه می‌شود (شکل ۹).

سپس از رابطه (۲۷) تغییرات فاصله بین دو ماهواره محاسبه می‌شود، به طوری که $\dot{\rho}$ نرخ تغییرات فاصله بین دو ماهواره است. با معلوم بودن بردار موقعیت ماهواره‌ها و سرعت محاسبه شده به دست می‌آید:

$$\dot{\rho} = \frac{\Delta x \Delta \dot{x} + \Delta y \Delta \dot{y} + \Delta z \Delta \dot{z}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \quad (27)$$

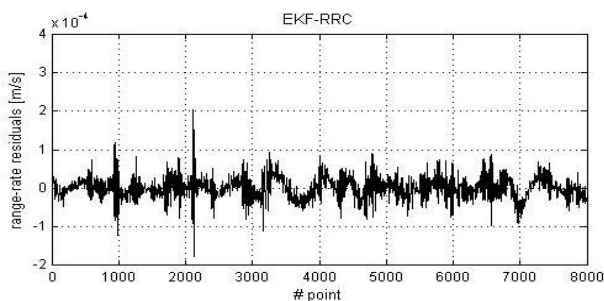
به طوری که $\Delta \dot{x}$ و $\Delta \dot{y}$ و $\Delta \dot{z}$ با استفاده از الگوریتم پیشنهادی محاسبه شده‌اند. در نهایت می‌توان بردار اختلاف (محور y در نمودارهای زیر که ملاکی جهت ارزیابی روش پیشنهادی است) را با استفاده از $\dot{\rho}$ و مقدار مشاهده شده به کمک KBR که با دقت بسیار زیادی مشاهده شده است، محاسبه کرد. برای محاسبه بردار سرعت، چندین حالت متفاوت در نظر گرفته شده است که در ادامه به بیان آن خواهیم پرداخت:

الف) تعیین بردار سرعت در حالتی که بردار مشاهدات فقط شامل اختلاف موقعیت‌های مشاهده شده با GPS است، یعنی بردار اندازه‌گیری به صورت رابطه (۲۸) فرض شده است:

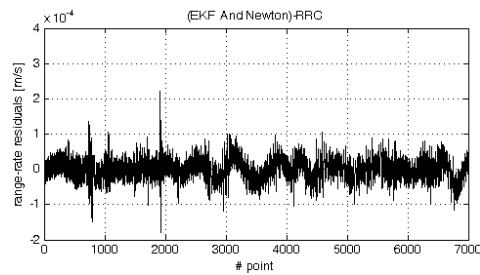
$$y = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (28)$$

بردار اختلاف حاصل از این مرحله در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته به خوبی قادر به محاسبه بردار سرعت (و در نتیجه تغییرات فاصله بین دو ماهواره) است.

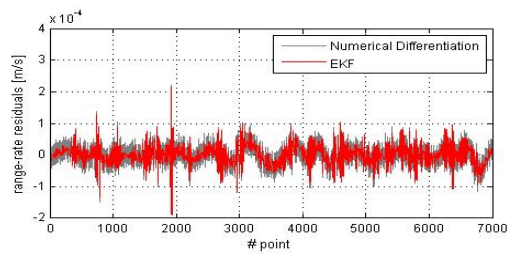
ب) استفاده از مشتق‌گیری عددی به همراه فیلتر کالمن: در



شکل ۵. بردار اختلاف تغییرات فاصله محاسبه شده و مشاهده شده، بدون دخالت دادن مشتق‌گیری عددی.



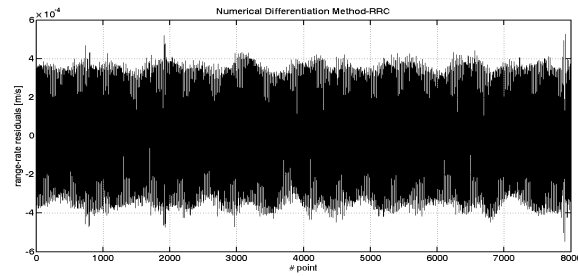
شکل ۶. بردار اختلاف تغییرات فاصله محاسبه شده و مشاهده شده با دخالت دادن مشتق گیری عددی.



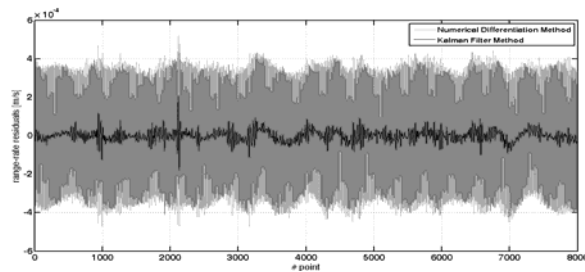
شکل ۷. مقایسه بردار سرعت محاسبه شده با فیلتر کالمن در دو حالت (الف) بردار مشاهدات فقط شامل اختلاف موقعیت‌های مشاهده شده با GPS است (نمودار سرخ)، (ب) بردار مشاهدات علاوه بر اختلاف موقعیت‌های مشاهده شده با GPS شامل بردار سرعت ناشی از مشتق گیری عددی نیز هست (نمودار مشکی).

سرعت ماهواره از سری زمانی مشاهدات موقعیت GPS، نسبت به روش نیوتن-رافسون، که در تحقیقات گذشته در حکم بهترین روش مشتق گیری عددی معرفی می‌شد، روش بهتری است.

خلاصه اطلاعات آماری شکل‌های ۸ و ۹ را می‌توان در جدول ۱ و شکل ۱۰ مشاهده کرد. با توجه به انحراف معیارهای به‌دست آمده و خصوصیات هر روش می‌توان نتیجه گرفت که روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته، برای محاسبه



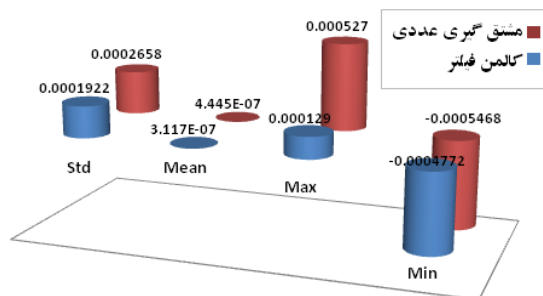
شکل ۸. بردار اختلاف تغییرات فاصله محاسبه شده و مشاهده شده با استفاده از مشتق گیری عددی.



شکل ۹. مقایسه سرعت به‌دست آمده از روش فیلتر کالمن و مشتق گیری عددی.

جدول ۱. مقایسه روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته و مشتق‌گیری عددی به روش نیوتن-رافسون.

روش به کاررفته	انحراف معیار (m/s)	میانگین (m/s)	ماکزیمم (m/s)	مینیمم (m/s)
فیلتر کالمن تعمیم‌یافته	۰/۰۰۰۱۹۲۲	۳,۱۱۷e-۷	۰/۰۰۰۱۲۹	-۰/۰۰۰۰۴۷۷۲
مشتق‌گیری نیوتن	۰/۰۰۰۲۶۵۸	۴,۴۵e-۷	۰/۰۰۰۰۵۲۷	-۰/۰۰۰۰۵۴۶۸



شکل ۱۰. مقایسه روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته و مشتق‌گیری عددی به روش نیوتن-رافسون.

۵ نتیجه‌گیری

در بازسازی بردار سرعت ماهواره‌های مدار پایین به علت به کارگیری مدل دینامیکی است. علاوه بر دقت زیاد روش می‌توان به کاهش حجم محاسبات به واسطه حل مرحله‌ای مسئله اشاره کرد. پیشنهاد می‌شود که برای تحقیقات آینده می‌توان به اضافه کردن مدل نیروی‌های وارد بر ماهواره (گرانش زمین، اصطکاک جو، نیروی جسم سوم ناشی از ماه و خورشید، کشند (جزر و مد) و تابش‌های خورشیدی) به مدل دینامیکی مسئله اشاره کرد.

مراجع

خادمی، م.، نجفی علمداری، م. و شریفی، م. ع.، ۱۳۹۱، تأثیر روش‌های مختلف مشتق‌گیری عددی در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی، م. فیزیک زمین و فضا، ۳۸(۴)، ۸۹-۱۰۳.

Bar-Shalom, Y., Li, X.-R. and Kirubarajan, T., 2001, Estimation with applications to tracking and navigation, Wiley Interscience.

Brown, R. G. and Hwang, P. Y. C., 1992, Introduction to random signals and applied

برای بازیابی میدان گرانش زمین به روش انتگرال انرژی و یا روش‌های مبتنی بر معادله حرکت لازم است که سرعت یا شتاب ماهواره از اطلاعات موقعیت سه‌بعدی ماهواره تعیین شود. اطلاعات موقعیت ماهواره با کمک گیرنده‌های سامانه موقعیت‌یاب جهانی و به صورت گسسته در اختیار کاربران قرار می‌گیرد. در این مقاله با استفاده از مشاهدات گیرنده‌های سامانه موقعیت‌یاب جهانی نصب شده روی ماهواره گریس، بردار سرعت و شتاب ماهواره با استفاده از روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته و روش نیوتن-رافسون که در تحقیقات گذشته در حکم بهترین روش مشتق‌گیری عددی معرفی شده است به دست آمد (لازم به ذکر است که در کاربرد توضیح داده شده، روش متداول تعیین سرعت و شتاب، استفاده از روش‌های عددی است لذا روش پیش‌گفته گشایشی در استفاده از روش فیلتر کالمن و بهره‌گیری از مزایای آن در این زمینه است) مقایسه روش‌های گوناگون بیانگر توانایی زیاد روش فیلتر کالمن تعمیم‌یافته

- missions, *Geophys. J. Int.*, **172**, 56-66.
- NASA, 2002, GRACE MISSION Twins in orbit fly linked by microwaves reveal earth mass in motion, Goddard Space Fligth Center, Greenbelt, Maryland, NP-2002-2-427-GSFC.
- Reigber, Ch., 1989, Gravity field recovery from satellite tracking data. In F. Sans'ò and R. Rummel eds. *Theory of satellite geodesy and gravity field determination*, Lecture notes in Earth Sciences, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, **25**, 197-234.
- Särkkä, S., 2007, On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**(9), 1631-1641.
- Sharifi, M. A., 2004, Satellite gradiometry using a satellite pair, Diploma Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.
- Sharifi, M. A., 2006, Satellite to satellite tracking in the space-wise approach, Ph.D. thesis, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.
- Weigelt, M. L., 2007, Global and local gravity field recovery from satellite-to-satellite tracking, Ph.D. dissertation, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, Number 20248.
- Welch, G. and Bishop, G., 2004, An introduction to the Kalman Filter, Updated, 5.4.2004 <http://www.cs.unc.edu/welch/media/pdf/kalman-intro.pdf>.
- Zarchan, P., Musoff, H., Frank, K. Lu., 2005, *Fundamental of kalman filtering; A practical approach*, (Progress in Astronautics and Aeronautics), third edition, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Kalman filtering, second edition, Electrical Engineering Department, Iowa State University, Rockwell International Corporation.
- Chui, C. and Chen, G., 2009, *Kalman filtering: with Real-Time application*, Springer-Verlag.
- Ditmar, P., and van Eck van der Sluijs, A. A., 2004, A technique for modeling the Earth's gravity field on the basis of satellite accelerations, *Journal of Geodesy*, **78**(1-2), 12-33.
- ESA., 2010, GOCE giving new insights into Earth's gravity, retrieved 29 June.
- Gerlach, Ch., Sneeuw, N., Visser, P. and Svehla, D., 2003, CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach, *Advances in Geosciences*, **1**, 73-80.
- Grewal, M. S. and Andrews, A. P., 2001, *Kalman Filtering, theory and practice using MATLAB*, Wiley Interscience.
- Higham, N. J., 2005, The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **26**(4), 1179-1193.
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking, *Celestial Mechanics and Dynamical Astromomy*, **75**, 85-101.
- Kurtenbakh, E., Eicker, A., Mayer-Gurr, T., Holschneider, M., Hayn, M., Fuhrmann, M. and Kusche, J., 2011, Improved daily gravity field solutions using a kalman smoother, *J. Geodyn.*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jog.2012.02.006>.
- Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kurtenbach, E. and Ilk, K. H., 2010, ITG GRACE: global static and temporal gravity field models from GRACE data, system earth via geodetic geophysical space techniques, 159-168.
- Migliaccio, F., Reguzzoni, M., Sanso, F., Dalla Via, G. and Sabadini, R., 2008, Detecting geophysical signals in gravity satellite