

ارائه روشی برای محاسبه صفر ارتفاعی در شبکه ارتفاعی بر مبنای مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی، بررسی موردی: تعیین صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی درجه یک ایران

عبدالرضا صفری^۱، محمدعلی شریفی^۲، اسماعیل فروغی^۳ و هادی امین^۳

^۱دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

^۲استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

^۳دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۲/۶/۲، پذیرش نهایی: ۹۲/۱۱/۱۵)

چکیده

مبنای سامانه‌های ارتفاعی محلی و منطقه‌ای، سطح متوسط دریا در کشندنماهای مرجع است. با توجه به انطباق نداشتن سطح متوسط دریا و ژئوئید، و همچنین لزوم یکسان‌سازی شبکه‌های ارتفاعی، در این مقاله روشی برای محاسبه صفر ارتفاعی، براساس مدل‌سازی میدان گرانی با استفاده از مشاهدات گرانش و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای عرضه شده است. در این روش برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین از تابع‌های پایه شعاعی استفاده و ارتفاع شبه‌ژئوئید در پیمانۀ کشندی (تایدگیج) مبنا محاسبه می‌شود. این پیمانۀ کشندی در بندر عباس واقع شده است که در واقع با معلوم بودن ارتفاع شبه‌ژئوئید در آن، صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی ایران قابل محاسبه خواهد بود. از جمله مزیت‌های روش پیشنهادی می‌توان به استفاده از داده‌های ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای، حذف اثر جهانی میدان گرانی با استفاده از مدل ژئوپتانسیل EGM2008 تا درجه و مرتبه ۳۶۰ و استفاده از تابع‌های پایه شعاعی برای مدل‌سازی محلی نام برد. روش پیشنهادی برای تعیین موقعیت صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی درجه ۱ ایران نسبت به ژئوئید به کار رفته است، براساس نتایج حاصل، صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی درجه یک ایران ۰/۲۱۶ متر زیر ژئوئید قرار دارد.

واژه‌های کلیدی: سطح متوسط دریا، صفر ارتفاعی، تابع‌های پایه شعاعی، یکسان‌سازی مبنای ارتفاعی، شبه ژئوئید

An approach to height datum unification based on local gravity field modeling using radial base function, case study: height datum unification of leveling network of class 1 in Iran

Safari, A.¹, Sharifi, M. A.², Foroughi, I.³ and Amin, H.³

¹Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

³M.Sc. student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University College of Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 24 Aug 2013, Accepted: 04 Feb 2014)

Summary

One of the most important problems in geodesy is the unification of height datum. Generally in geodesy; there are two types of height systems, the geometrical height based on ellipsoid and the physical height based on gravity-defined surface (Zhang et al, 2009). Local height datum is determined according to Mean Sea Level (MSL). In regarding to

E-mail: e.foroughi@ut.ac.ir

نگارنده رابط: تلفن: ۰۲۱-۶۶۷۵۲۲۱۵ دورنگار: ۰۲۱-۶۶۷۵۲۲۱۴

mismatch of mean sea level and geoid, on the one hand, and height datum unification requirement on the other hand, this paper defines an approach to height datum determination of Iran based on local gravity field modeling. Although there are so many algorithms to local gravity field modeling, the radial base functions (RBF) is one of the well known methods to precise local gravity field modeling using variety of data sets. Two groups of data sets, gravity acceleration observation and satellite altimetry data, are used in this paper, to determine the quasi geoid height at reference tide gauge; then the height reference of leveling network can be calculated.

According to Runge-Kutla algorithm, potential anomaly on the earth can be defined as following:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_i(x)$$

Where α_i the expansion coefficients are (scale coefficients) and Bjerhammar sphere is a sphere with radius R, which is entirely inside the topographic masses of the earth, Φ_i are the set of radial basis functions with following representation:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \psi_k \left(\frac{R}{|x|} \right)^{k+1} P_k \left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right)$$

Where y, x are points inside and outside of the Bjerhammar respectively, p_k is the Legendre polynomial function of degree k and ψ_k are the Legendre coefficients, the point y is called the centre of the RBF.

As we can see Radial Base Functions (RBF) have some unknown parameters that should be determined precisely: the location of RBF center, shape (depth parameter) and scale coefficient. If these parameters are selected correctly we could have good representation of potential anomaly field. Examples of linear functionals used in local gravity field modeling are gravity anomalies Δg and gravity disturbances δg . After linearization and spherical approximation, these functionals are related to the potential anomaly as

$$\Delta g = -\frac{2}{r} T - \frac{\partial T}{\partial r} \qquad \delta g = -\frac{\partial T}{\partial r}$$

We used Poisson-wavelet as RBF kernel, which is defined as follows:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} (2\chi_{n+1} + \chi_n) \qquad \chi_n = \left(|y| \frac{\partial}{\partial |y|} \right)^n \frac{1}{|x-y|}$$

Where n is the order of Poisson wavelet kernel, $||$ is the operator norm.

Significant points in this paper are: precise positioning of the reference bench mark point by GPS system, calculation of geoid height of reference bench mark using both geodetic and orthometric heights by leveling method, quasi geoid height determination using potential anomaly value at bench mark and convert it to geoid height and finally height datum unification using comparison of the leveling height and the height from local gravity field modeling.

Keywords: Mean sea level, Height datum unification, Radial base Function, Quasi geoid

۱ مقدمه

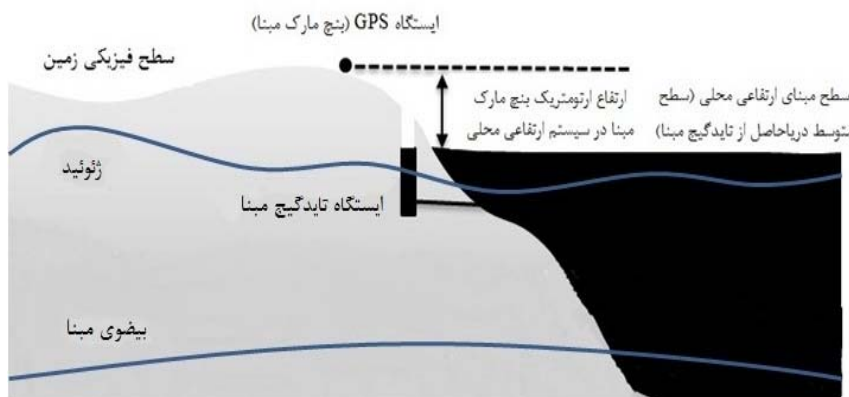
هندسی با سطح بیضوی در حکم سطح مرجع و سامانه‌های ارتفاعی فیزیکی با سطح تعریف شده بر مبنای پتانسیل گرانی به منزله سطح مرجع (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

یکی از مشکلات اساسی در دانش ژئودزی ایجاد یک سامانه ارتفاعی مرجع است. در ژئودزی به‌طور عمده دو دسته از سامانه‌های ارتفاعی وجود دارد، سامانه ارتفاعی

تعیین وضعیت صفر ارتفاعی نسبت به ژئوئید و همچنین مسئله یکسان‌سازی داده‌های ارتفاعی از سوی گروه‌های تحقیقاتی متعددی مورد بررسی قرار گرفته است که از جمله فعالیت‌های صورت گرفته در این زمینه می‌توان به پژوهش‌های زیر اشاره کرد: (فدرستون، ۱۹۹۸، ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲؛ رپ، ۱۹۸۰، ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵؛ اردلان و صفری، ۲۰۰۵؛ هیپکین، ۲۰۰۲؛ بوشا و همکاران، ۲۰۰۱؛ رومل و توینسن، ۱۹۸۸؛ مارتی و همکاران، ۲۰۰۲؛ دنیس و فدرستون، ۲۰۰۲؛ اردلان و همکاران، ۲۰۰۲؛ لمن، ۲۰۰۰؛ اکمن، ۱۹۸۹ و ۱۹۹۹؛ سانچز، ۲۰۰۲؛ بلاس‌برامانیا، ۱۹۹۴؛ بوشا و همکاران، ۲۰۰۲؛ دروس و همکاران، ۱۹۹۹؛ مارتی، ۲۰۰۲؛ رپ و بلاس‌برامانیا، ۱۹۹۲؛ میلر و همکاران، ۱۹۹۹؛ سانچز، ۲۰۰۸؛ ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹؛ گاتی و همکاران، ۲۰۱۳؛ سانسو و ونوتی، ۲۰۰۲؛ بوشا و همکاران، ۲۰۰۴؛ فدرستون و همکاران، ۲۰۱۱).

یکی از روش‌های مرسوم برای یکسان‌سازی ارتفاعی، اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل به روش ترازیبی دقیق و گرانی‌سنجی است که دارای دقت زیادی است. این روش چنانچه دو شبکه ارتفاعی با دریا از هم جدا شده باشند قابل کاربرد نخواهد بود (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹). البته روش حل این مشکل، ترازیبی اقیانوسی است که دارای دقت کمی است (ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

ارتفاع از سطح بیضوی کمیتی هندسی است و نمی‌تواند نیاز ارتفاعی طرح‌های اجرایی را تأمین کند. بدین خاطر و به‌منظور تعیین مؤلفه ارتفاعی موردنیاز، به منزله کمیت مرتبط با هندسه و میدان گرانی زمین، از دیرباز از ترازیبی و گرانی‌سنجی استفاده شده است. سطح مبنای سامانه ارتفاعی فیزیکی، ژئوئید است. اما سامانه‌های ارتفاعی منطقه‌ای و محلی به ژئوئید ارجاع داده نمی‌شوند. این ارتفاعات نسبت به سطح متوسط دریا به‌دست آمده از مشاهدات کشند نماها در یک بازه زمانی محدود و با منطبق فرض کردن سطح متوسط دریا با ژئوئید، بیان می‌شود (اردلان و صفری، ۲۰۰۵). اگرچه سطح متوسط دریا تقریب خوبی از ژئوئید است اما به‌طور دقیق بر سطح ژئوئید منطبق نیست (شکل ۱). از طرف دیگر با توجه به تغییرات سطح متوسط دریا از منطقه‌ای به منطقه دیگر، سامانه‌های ارتفاعی منطقه‌ای و محلی گوناگون را نمی‌توان در یک سامانه ارتفاعی واحد بیان کرد. برای آوردن نمونه‌ای از این وضعیت می‌توان به کشورهای با گستره آبی وسیع و جزایر زیاد دارای سطوح مبنای ارتفاعی متفاوت اشاره کرد. با این حال با تعیین وضعیت صفر ارتفاعی نسبت به ژئوئید در هر سامانه ارتفاعی مجزا امکان یکسان‌سازی شبکه‌های ارتفاعی متفاوت فراهم خواهد شد.



شکل ۱. نشانه ارتفاعی (بنج‌مارک) مینا، ایستگاه دائمی پیمانۀ کشندی مینا، سطح مبنای ارتفاعی ملی، ارتفاع ارتومتریک اندازه‌گیری شده، ژئوئید و بیضوی مینا.

دسته مهم دیگر از روش‌ها برای تعیین صفر ارتفاعی و یکسان‌سازی ارتفاعی بر مبنای حل مسائل مقدار مرزی ژئودتیک است. از جمله کارهای صورت گرفته می‌توان (رومئل و توینسن، ۱۹۸۸؛ هک و رومئل، ۱۹۹۰؛ سو و رومئل، ۱۹۹۱؛ اردلان و صفری، ۲۰۰۵ و ژانگ و همکاران، ۲۰۰۹). بنا به تحقیقات اردلان و صفری (۲۰۰۵) وضعیت صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی ایران نسبت به ژئوئید محاسبه شد. برای تعیین صفر ارتفاعی در شبکه ایران از داده‌های شتاب‌گرانش و ارتفاع ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی استفاده شده و پس از حل یک مسئله مقدار مرزی گرانی‌سنجی-ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای وضعیت صفر ارتفاعی در ایران تعیین شد. محاسبات صورت گرفته اردلان و صفری (۲۰۰۵) نشان می‌دهد که سطح هم‌پتانسیل در محل نقطه مبنای شبکه ارتفاعی ایران ۹/۴ سانتی‌متر در زیر ژئوئید قرار دارد. روش ژانگ و همکاران (۲۰۰۹) مبتنی بر حل مسئله گرانی‌سنجی با مرز معلوم خطی شده با استفاده از انتگرال هوتین است.

از طرف دیگر، مدل‌سازی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی گسترش زیادی پیدا کرده است. از جمله کارهای صورت گرفته برای مدل‌سازی محلی میدان گرانی بر مبنای استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی، می‌توان به کارهای (بیرهامر، ۱۹۷۶؛ سانکل، ۱۹۸۱؛ ورمیر، ۱۹۸۲، ۱۹۸۳، ۱۹۸۴، ۱۹۹۵؛ فریدن و روتر، ۱۹۸۳؛ شرنینگ، ۱۹۸۶؛ بالها و همکاران، ۱۹۸۶؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۷؛ مارچنکو، ۱۹۹۸؛ فریدن و همکاران، ۱۹۹۸؛ مارچنکو و همکاران، ۲۰۰۱؛ هولشنایدر و همکاران، ۲۰۰۳؛ ایگر و همکاران، ۲۰۰۴؛ اشمیت و همکاران، ۲۰۰۴، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷؛ چمبودوت و همکاران، ۲۰۰۵؛ کلیس و ویتور، ۲۰۰۷؛ صفری و همکاران، ۱۳۹۲؛ صفری و همکاران، ۲۰۱۳) اشاره کرد. بر این اساس در این تحقیق روشی جدید برای تعیین صفر ارتفاعی بر مبنای مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های

پایه شعاعی کروی عرضه شده است. داده مرزی مورد استفاده در این تحقیق شتاب‌گرانش حاصل از گرانی‌سنجی است. روش عرضه شده مراحل اساسی این تحقیق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. تعیین مختصات دقیق نشانه ارتفاعی مبنا با استفاده از سامانه موقعیت یاب جهانی GPS
۲. استفاده از ارتفاع ژئودتیک نشانه ارتفاعی مبنا و ارتفاع ارتومتریک این نقطه در تعیین ارتفاع ژئوئید در نشانه ارتفاعی مبنا
۳. استفاده از مدل‌های ژئوپتانسیلی جهانی و تابع‌های پایه شعاعی به منظور مدل‌سازی میدان گرانی با جزئیات محلی
۴. تعیین ارتفاع شبه ژئوئید با استفاده از بی‌هنجاری پتانسیل تولید شده در نشانه ارتفاعی مبنا و تبدیل آن به ارتفاع ژئوئید
۵. تعیین صفر ارتفاعی شبکه ترازبایی با مقایسه ارتفاع ژئودتیک حاصل از روش مستقیم و ارتفاع ژئوئید حاصل از مدل‌سازی محلی

ابتدا در بخش دوم این مقاله مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی بیان می‌شود. در بخش سوم از این مقاله کارایی روش عرضه شده با استفاده از داده‌های مرزی شتاب‌گرانی و ژئوئید حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای نشان داده شده است. بخش چهارم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۲ مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی

بر اساس تئوری رونگه بی‌هنجاری پتانسیل T در فضای خارج از زمین را می‌توان به سری تابع‌های غیرمتعامد Ψ به صورت رابطه (۱) بسط داد (مارچنکو، ۱۹۹۸).

$$T(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_i(P) \quad (1)$$

در رابطه (۱)، α_i ها ضرایب بسط (ضرایب مقیاس) هستند. R_i شعاع کره بیرهامر است که به طور کامل در

• موقعیت قرارگیری تابع‌ها، موقعیت مسطحاتی: نحوه قرارگیری اولیه تابع‌های پایه کروی، به‌طور معمول در یک شبکه منظم است، تراکم تابع‌ها در این شبکه با توجه به تعداد آنها و نیز نوع داده‌های ورودی تعیین می‌شود، از آنجا که ممکن است شبکه‌های متفاوت با تراکم متفاوت، تقریب خوبی از داده‌های ورودی به دست دهند، اما نمایش واقعی از میدان گرانی زمین نباشد، تعداد تابع‌های پایه و تراکم اولیه شبکه موقعیت آنها باید با توجه به انحراف معیار نقاط کنترل مستقل از مشاهدات تعیین شود. در غیر این صورت تابع‌های پایه می‌توانند مدل مناسبی از داده‌های ورودی نمایش دهند. موقعیت تابع‌های پایه در شبکه اولیه، در فرایند مدل‌سازی با الگوریتم موردنظر، برای مدل‌سازی بهینه تغییر خواهد کرد. پارامتر موقعیت مسطحاتی هسته در قالب طول و عرض جغرافیایی در پارامتر x در رابطه (۲) نهفته است.

• پارامتر شکل یا عمق، موقعیت ارتفاعی (Shape parameter)، عمق فرورفتگی تابع‌های پایه در کره بیرهامار که در شبکه اولیه آنها، قرار گرفته‌اند، حساس‌ترین پارامتر مدل‌سازی میدان گرانی است، به‌نحوی که اگر مقدار نامناسبی برای مقادیر اولیه آن در نظر گرفته شود، به هیچ عنوان به مدل مناسبی نخواهیم رسید. عمق تابع‌های پایه، تابعی از تعداد و نیز تراکم شبکه اولیه است، هرچه شبکه متراکم‌تر باشد تابع‌ها باید در عمق کمتری قرار گیرند و برعکس؛ اما همان‌طور که در بالا اشاره شد، این نکته که نحوه قرارگیری این تابع‌ها باید به گونه‌ای باشد که تقریب مناسبی از میدان گرانی زمین باشد و نه صرفاً داده‌های ورودی (بهینگی محلی)، باید در تعیین عمق آنها در نظر گرفته شود. پارامتر موقعیت ارتفاعی هسته نیز به صورت $R - d$ بیان می‌شود، که d میزان عمق فرورفتگی در R است که تحت عنوان x در رابطه (۲) نهفته است.

• پارامتر ضریب و یا مقیاس (Scale parameter): مقیاس

داخل توپوگرافی زمین قرار دارد. دسته تابع‌های Φ_n ، تابع‌های پایه شعاعی کروی هستند که دارای نمایشی به شکل رابطه (۲) هستند:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi R^2} \psi_l \left(\frac{R}{|x|} \right)^{k+1} P_k \left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \right) \quad (2)$$

که در آن، ψ_l ضرایب لژاندر و P_k چندجمله‌ای‌های لژاندر تا درجه k ، $y \in \sigma_B^{int}$ (فضای داخلی کره بیرهامار) و $x \in \sigma_B^{ext}$ (فضای خارجی کره بیرهامار) است. در جدول ۱ مثال‌هایی از تابع‌های پایه شعاعی کروی با ضرایب لژاندر آنها عرضه شده است (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸).

هسته‌های معرفی شده در جدول ۱، به منزله تابع‌های پایه، در مدل‌سازی میدان گرانی رفتار متفاوتی دارند. هر کدام از این هسته‌ها با درجات متفاوت، قابلیت سازگاری با داده‌های محلی میدان گرانی را دارند، با این تفاوت که برخی می‌توانند با توجه به نوعشان با تعداد کمتر و یا در عمق‌های گوناگون، داده‌های با نوع متفاوت را تقریب بزنند. هسته‌های تابع‌های پایه معمولاً دارای صورت تحلیلی نیز هستند که برای محاسبات ریاضی صورت مناسب‌تری‌اند (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به ویتوور (۲۰۰۷) مراجعه شود).

پارامترهای تابع‌های پایه کروی نقشی اساسی در سازگاری آنها با داده‌های میدان گرانی دارند. این پارامترها عبارت‌اند از:

• تعداد تابع‌ها: تعداد تابع‌های پایه در مدل‌سازی میدان گرانی تابعی از تعداد مشاهدات و نوع آنها هستند؛ به طوری که برای تقریب داده‌های بی‌هنجاری گرانش، به تنهایی، در مقایسه با مدل‌سازی بی‌هنجاری پتانسیل، تعداد بیشتری از تابع‌های پایه مورد نیاز است، و نیز برای تقریب ترکیبی از داده‌های جاذبی و پتانسیل، برای دستیابی به دقت مورد نیاز، تابع‌های پایه بیشتری باید در شبکه اولیه قرار گیرند.

می‌تواند توان تابع‌های پایه را برای همه خاصیت‌های محلی داده‌ها کمتر کند. لذا همان‌طور که در بالا اشاره شد، پارامترهای تابع‌های پایه باید به‌درستی و متناسب با یکدیگر تعیین شوند. بدین منظور می‌توان از راه آزمون و خطا عمل کرد و یا اینکه با یک فرایند تکراری، بهترین مکان و عمق را متناسب با داده‌ها تعیین کرد (به‌نحوی که در حالت بهینگی محلی قرار نگیریم). در حالت دقیق‌تر می‌توان رابطه این تناسب را به‌دست آورد و پارامترهای مجهول تابع‌های پایه را تعیین کرد (کلیس و ویتوور، ۲۰۰۷).

ارتباط بین بی‌هنجاری پتانسیل T و سایر تابع‌های میدان گرانی نظیر بی‌هنجاری گرانش و نوسان گرانش به‌صورت روابط (۳) و (۴) بیان می‌شود (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸):

$$\Delta g = -\frac{2}{r}T - \frac{\partial T}{\partial r} \quad (۳)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \quad (۴)$$

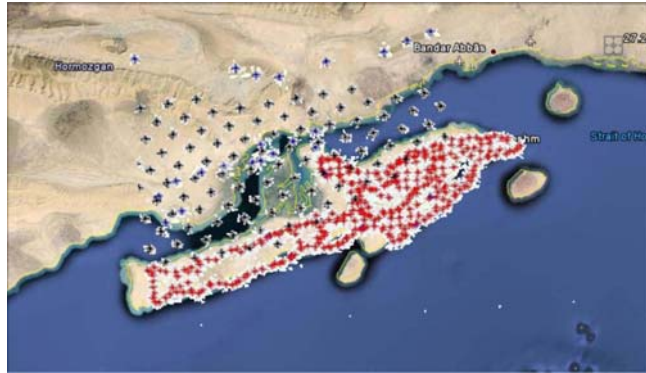
تابع‌های پایه ضریبی است که مستقل از موقعیت قرارگیری تابع‌های پایه در الگوریتم مدل‌سازی تعیین می‌شود، پس از تعیین بهینه شبکه و عمق اولیه تابع‌های، در طول فرایند مدل‌سازی ضرایب این تابع‌ها نیز برای تقریب بهینه تغییر خواهد کرد. پارامتر ضریب به‌صورت α_i در رابطه (۱) بیان شده است.

گاهی پارامتر شکل و موقعیت با هم در قالب یک پارامتر سه‌بعدی مجهول برای تابع‌های پایه در نظر گرفته می‌شوند، اما از آنجا که پارامتر شکل نقش بسیار مهم و حساسی در انطباق داده‌ها به تابع‌های پایه دارد، در اینجا این پارامتر به منزله یک پارامتر مجهول مجزا در نظر گرفته می‌شود.

همان‌طور که در بال اشاره شد، برای تقریب بهتر داده‌ها، باید موقعیت هسته با عمق آنها متناسب باشد، در غیر این صورت نتیجه مناسبی از تقریب به‌دست نخواهد آمد؛ چرا که نزدیکی بیش از حد تابع‌های به یکدیگر با عمق زیاد موجب برهم خوردن شرط تعامد برای ترکیب تابع‌های می‌شود، و فاصله زیاد تابع‌های پایه با عمق کم

جدول ۱. مثال‌هایی از تابع‌های پایه شعاعی کروی قابل استفاده در مدل‌سازی میدان گرانی.

ضرایب لژاندر	صورت تحلیلی	هسته
$\psi_l = \frac{4\pi R}{2l+1} \lambda^l, \quad \lambda = \frac{ y }{R}$	$\Phi(x, y) = \frac{1}{ x-y }$	جرم نقطه‌ای
$\psi_l = \begin{cases} \binom{l-m}{m} \frac{\lambda^{l-m}}{2l+1} & l \geq m \\ 0 & l < m \end{cases}, \quad \lambda = \frac{ y }{R}$	$\Phi(x, y) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial y } \right)^m \frac{1}{ x-y }$	چندقطبی شعاعی از مرتبه m
$\psi_l = l^m \lambda^l, \quad \lambda = \frac{ y }{R}$	$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} (2\chi_{m+1} + \chi_m)$ $\chi_m = \left(y \frac{\partial}{\partial y } \right)^m \frac{1}{ x-y }$	ویولت پواسون از مرتبه m
$\psi_l = \begin{cases} \frac{4\pi R^3}{l-1} & l \geq 2 \\ 0 & l=0,1 \end{cases}$ $\psi_l = \lambda^l$	$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \frac{ x ^2 - y ^2}{ x-y ^3}$	پواسون



شکل ۲. پراکندگی داده‌های موجود در منطقه جزیره قشم.

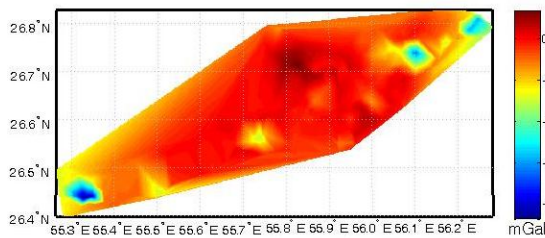
۳ بررسی موردی: تعیین وضعیت صفر ارتفاعی شبکه

ارتفاعی درجه یک ایران

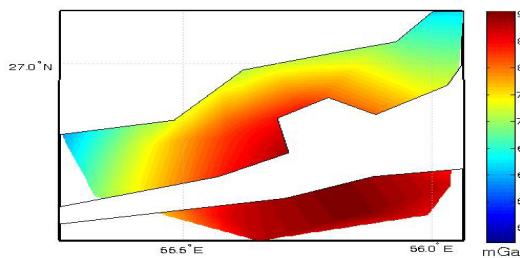
برای تعیین میدان گرانی در محدوده جزیره قشم، منطقه‌ای در محدوده $55.4 < \lambda < 56.4$ و $26.4 < \varphi < 27.4$ با ۳۴۷ مشاهده از نوع شتاب گرانی برگرفته از اطلاعات موجود در بانک جهانی گرانی BGI و مشاهدات حاصل از گرانی‌سنجی در جزیره قشم، و ۹۶ نقطه با اطلاعات بی‌هنجاری پتانسیل برگرفته از مشاهدات ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای انتخاب شد. شکل ۲ نشان‌دهنده پراکندگی نقاط مورد استفاده برای مدل‌سازی در منطقه مورد

نظراست.

برای به دست آوردن بی‌هنجاری گرانش باقی‌مانده، شتاب جاذبه نرمال براساس رابطه سومیکلیانا-پیزتی در این منطقه محاسبه و از داده‌ها حذف شد. سپس با توجه به اینکه هدف مدل‌سازی محلی میدان گرانی است، اثرات میدان جهانی با استفاده از ضرایب هم‌آهنگ‌های کروی EGM2008 تا درجه و مرتبه ۳۶۰ نیز از روی مشاهدات برداشته شد. شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب نشان‌دهنده بی‌هنجاری گرانش باقی‌مانده در جزیره قشم و بی‌هنجاری گرانش حاصل از داده‌های BGI است.



شکل ۳. نحوه تغییرات شتاب گرانش مشاهده شده در جزیره قشم.



شکل ۴. تغییرات بی‌هنجاری گرانش باقی‌مانده در منطقه جزیره قشم.

قرار گرفته است. این هسته را هولشنايدر و همکاران، ۲۰۰۳ معرفی کردند که با اصلاحی جزئی (استفاده از روش نرمال سازی و حذف ترم‌هایی از هسته) به شکل زیر تغییر یافت (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸):

$$\psi_l = \frac{2l+1}{4\pi R^3} l^n |y|^l \quad (5)$$

در این رابطه $|y|$ فاصله شعاعی و n مرتبه آن به منزله یک پارامتر آزاد معرفی می‌شود. صورت تحلیلی این هسته به صورت روابط (۶) و (۷) است (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸):

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4\pi R^2} (2\chi_{n+1} + \chi_n) \quad (6)$$

$$\chi_n = \left(|y| \frac{\partial}{\partial |y|} \right)^n \frac{1}{|x-y|} \quad (7)$$

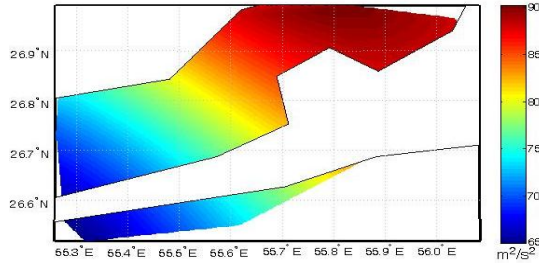
همچنین کلیس نشان داد که تابع χ_n را به صورت رابطه بازگشتی (۸) نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \chi_n &= 2|y|^{n+1} b_{n+1} + \sum_{i=1}^n \beta_{n,i} |y|^i b_i \\ \chi_0 &= 2|y| b_1 + b_0 \\ b_n &= (2n-1)|x-y| b_1 b_{n-1} - (n-1)^2 b_0^2 b_{n-2} \\ b_0 &= \frac{1}{|x-y|}, b_1 = \frac{|y|-|x|\cos\vartheta}{|x-y|^3} \end{aligned} \quad (8)$$

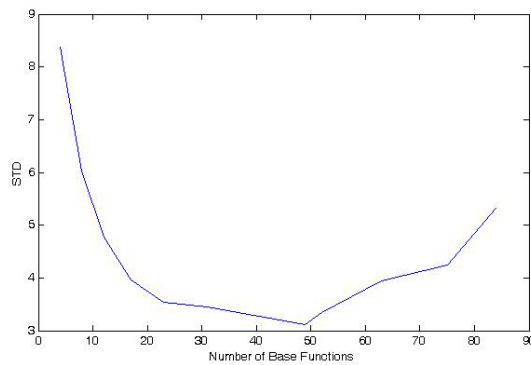
که در آن ϑ زاویه بین x و y بوده و $\beta_{3,1} = 3, \beta_{3,2} = 17, \beta_{3,3} = 13$. به منظور انتخاب بهینه تعداد تابع‌های پایه کروی و نیز مراکز آنها، شبکه‌های منظم متفاوت با تراکم متفاوت به منزله موقعیت اولیه تابع‌های پایه در نظر گرفته شد، و سپس با الگوریتم پایدارسازی غیر خطی لونبرگ-مارکواردت، انحراف معیار نقاط کنترل پتانسیل در این شبکه‌ها تعیین، و شبکه با کمترین انحراف معیار به منزله شبکه بهینه در نظر گرفته شد. این شبکه دارای ۴۹ تابع پایه است و مراکز اولیه این تابع‌های به‌طور منظم در منطقه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. جدول ۱ و شکل ۶ نحوه انتخاب شبکه بهینه نقاط را با توجه به انحراف معیار به‌دست آمده نشان می‌دهد.

مشاهدات دسته دوم که برای مدل‌سازی در این منطقه در نظر گرفته شد، بی‌هنجاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای است. محاسبه بی‌هنجاری پتانسیل با استفاده از ژئوئید دریایی، که حاصل اختلاف بین سطح متوسط دریا (MSL) و توپوگرافی سطح دریا (SST) است و به‌کارگیری عکس فرمول برونز میسر است. سطح متوسط دریا از مشاهدات ماهواره‌های Geosat، ERS-1، TOPEX/POSEIDON و Geosat به‌دست آمده است (مدل CSRMS95) (کیم و همکاران، ۱۹۹۵) و برای محاسبه توپوگرافی سطح دریا در سواحل و آب‌های اطراف جزیره قشم نیز از مدل (Global Parallel Ocean Circulation Model) (POCM-4B) استفاده شده است. این مدل از راه مشاهدات روزانه میدان استرس باد (Wind stress field) و مشاهدات ماهانه جریانات گرمایی (Mean sea surface heat fluxes) از سال ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۴ به‌دست آمده است (استامر و همکاران، ۱۹۹۶). در این دسته از مشاهدات نیز به‌منظور محلی‌سازی، بی‌هنجاری پتانسیل حاصل از بسط هم‌آهنگ‌های کروی EGM2008 تا درجه و مرتبه ۳۶۰ از مشاهدات حذف شده است. بی‌هنجاری پتانسیل تفاضلی پس از حذف اثرات میدان جهانی از روی مقادیر بی‌هنجاری پتانسیل حاصل از ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای در منطقه مورد بررسی در شکل ۵ آورده شده است. برای کنترل مستقل نتایج مدل‌سازی، حدود ۵٪ از نقاط بی‌هنجاری پتانسیل (۵ نقطه) در حکم نقاط کنترل در نظر گرفته و این نقاط از فهرست مشاهدات حذف شدند. در هر مرحله انحراف معیار باقی‌مانده این نقاط در حکم معیار مدل‌سازی بهینه مورد استفاده قرار گرفت. هسته ویولت پواسون، به منزله هسته‌ای که قابلیت سازگاری بیشتری با داده‌های از جنس گوناگون را دارد (کلیس و همکاران، ۲۰۰۸)، در این تحقیق مورد استفاده

تابع‌های پایه کروی پس از افزودن اثر جرم‌های جهانی به مقادیر بی‌هنجاری پتانسیل تفاضلی است.



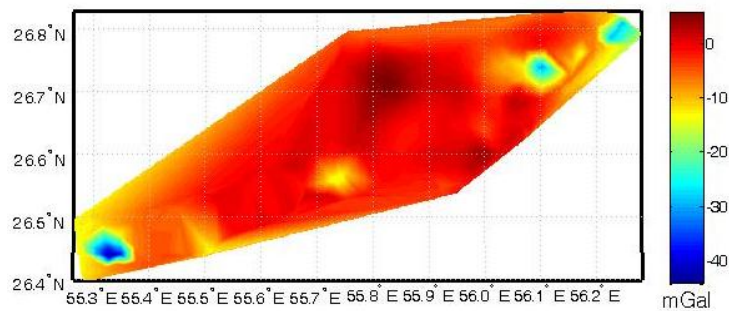
شکل ۵. نمایش تغییرات بی‌هنجاری پتانسیل باقی‌مانده در محدوده موردنظر.



شکل ۶. نحوه تغییرات انحراف معیار در برابر تعداد و تراکم شبکه اولیه تابع‌های پایه.

جدول ۱. نحوه تغییرات انحراف معیار نقاط کنترل به منظور تعیین شبکه بهینه تابع‌های پایه شعاعی.

تعداد تابع	۴	۸	۱۲	۱۷	۲۳	۳۱	۴۹	۵۲	۵۶	۸۴	۱۳۲	۱۷۶	۲۳۴
انحراف معیار	۸/۳۷	۶/۰۲	۴/۷۷	۳/۹۷	۳/۵۳	۳/۴۵	۳/۱۲	۳/۳۵	۴/۵۱	۷/۳۲	۱۴/۹۳	۲۴/۶۵	۳۳/۴۵



شکل ۷. نمایش نحوه تغییرات بی‌هنجاری گرانش باقی‌مانده برآورد شده از تابع‌های پایه کروی.

به منظور گریز از اثر لبه‌ها در این منطقه، از هر طرف ۰/۱ درجه به سمت داخل منطقه، از نمایش بی‌هنجاری‌ها حذف شد. در این مقاله از هسته ویولت پواسون به منزله تابع پایه برای مدل‌سازی، و از الگوریتم لونبرگ مارکواردت برای تعیین بهینه مکان، عمق و ضرایب این تابع‌های استفاده شده است. معیار توقف در این الگوریتم دستیابی به انحراف معیار 0.7 mGal برای نقاط کنترل شتاب گرانش و $0.3 \text{ m}^2/\text{s}^2$ برای نقاط کنترل پتانسیل در نظر گرفته شد، و در نهایت پس از ۱۳۴۶ تکرار، الگوریتم متوقف و بی‌هنجاری پتانسیل در منطقه مورد بررسی برآورد شد. نکته اساسی در این مقاله استفاده هم‌زمان از همه این داده‌ها در یک پردازش و در مکان‌های گوناگون، و در نهایت برآورد بی‌هنجاری پتانسیل برای کل منطقه موردنظر است. بی‌هنجاری گرانش باقی‌مانده برآورد شده ویولت پواسون در شکل ۷ نمایش داده شده است.

شکل ۸ نشان‌دهنده تغییرات بی‌هنجاری پتانسیل باقی‌مانده تولید شده در منطقه مورد بررسی، و در نهایت شکل ۹ نشان‌دهنده بی‌هنجاری پتانسیل برآورد شده از

حاصل شد. رابطه (۹) نشان‌دهنده فرمول برونز در میدان مرجع سومیکلیانا-پیزتی است:

$$T = - \frac{\sqrt{b^2 + e^2}}{\sqrt{b^2 + e^2 \sin^2 \varphi}} \left[- \frac{GM}{b^2 + e^2} + \omega^2 b \cos^2 \varphi + \frac{1}{6} \omega^2 a^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) \left(\frac{6b}{e^2} \operatorname{arc cot} \left(\frac{b}{e} \right) - \frac{6b^2 + 4e^2}{e(b^2 + e^2)} \right) \right] N + \frac{\left(3 \frac{b^2}{e^2} + 1 \right) \operatorname{arc cot} \left(\frac{b}{e} \right) - 3 \frac{b}{e}}{1} \quad (9)$$

در این رابطه a ، b و e به ترتیب نیم‌قطر بزرگ، نیم‌قطر کوچک و خروج از مرکز خطی بیضوی مرجع مربوط به میدان مورد نظر، $G = 6.67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ثابت جهانی گرانش (Universal Gravitational Constant)، M جرم زمین ($GM = 3986004.415 \times 10^8 m^3 s^{-2}$)، $\omega = 7292115 \times 10^{-11} rad / sec$ معرف سرعت زاویه‌ای دوران زمین و N ارتفاع ژئوئید است.

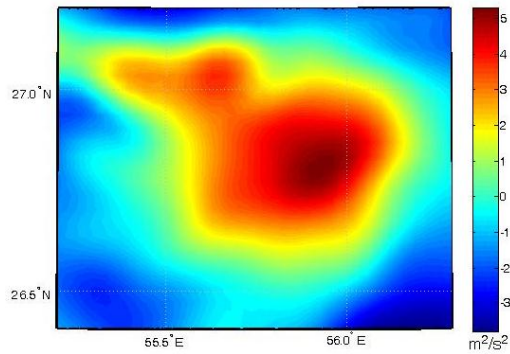
میزان اختلاف بین ارتفاع ژئوئید و شبه‌ژئوئید براساس رابطه زیر قابل محاسبه است (فدرستون و کربای، ۱۹۹۸):

$$N - \zeta \approx \frac{\Delta g^B}{\bar{\gamma}} H \quad (10)$$

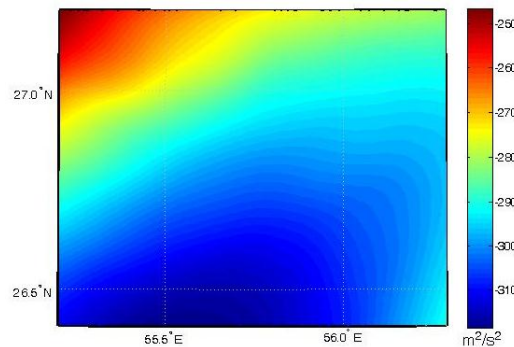
که در این رابطه H ارتفاع ارتومتریک، Δg^B بی‌هنجاری بوگه و $\bar{\gamma}$ میدان نرمال سومیکلیانا-پیزتی محاسبه شده در این نقطه است. اختلاف بین ژئوئید و شبه‌ژئوئید در نقطه کنترل، براساس رابطه (۱۰) محاسبه و به مقدار به دست آمده برای شبه‌ژئوئید اضافه شد و ارتفاع ژئوئید در این نقطه محاسبه شد. مکان و مقادیر محاسبه شده برای نشانه ارتفاعی مورد نظر در جدول ۲ آمده است:

جدول ۲. محاسبه صفر ارتفاعی در نشانه ارتفاعی ساحلی.

نقطه	بی‌هنجاری پتانسیل	ارتفاع شبه‌ژئوئید	اختلاف ارتفاع ژئوئید و شبه‌ژئوئید	ارتفاع ژئوئید
$\lambda = 56.1831, \varphi = 27.1658$	-284.202	-29.026	-0.0031	-29.029



شکل ۸. نمایش پراکندگی بی‌هنجاری پتانسیل باقی‌مانده در منطقه مورد بررسی.



شکل ۹. بی‌هنجاری پتانسیل برآورد شده توسط تابع‌های پایه کروی در سطح زمین در منطقه آزمون.

پس از مدل‌سازی میدان گرانشی در منطقه مورد نظر، از نشانه ارتفاعی ساحلی موجود در این منطقه برای محاسبه صفر ارتفاعی، استفاده شد. بدین‌منظور بی‌هنجاری پتانسیل باقی‌مانده در این نشانه ارتفاعی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی بهینه به دست آمده، محاسبه و با استفاده از رابطه برونز در میدان مرجع سومیکلیانا-پیزتی (اردلان و گرافارند، ۲۰۰۱) ارتفاع شبه‌ژئوئید در این نقطه

۴ نتیجه‌گیری

سواحل خلیج فارس، ۱۳۹۲، م. فیزیک زمین و فضا،

دوره ۳۹، شماره ۳، صفحه ۳۳-۴۸.

Ardalan, A. A., Grafarend, E. W. and Kakkuri, J., 2002, National height datum, the Gauss-Listing geoid level value W_0 and its time variation W_0 , *J. Geodesy*, **76**, 1-28.

Ardalan, A. A. and Safari, A., 2005, Global height datum unification: a new approach in gravity potential space, *J. Geod.*, **79**, 512-523.

Balasubramania, N., 1994, Definition and realization of a global vertical datum, Report No. 427, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, USA, 112 pp.

Bjerhammar, A., 1976, A Dirac approach to physical geodesy, *Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV)*, **101**, 41-44.

Blaha, G., Blessette, R. P. and Hadgigeorge, G., 1986, Global point-mass adjustment of the oceanic geoid based on satellite altimetry, *Mar Geodesy*, **10**, 97-129

Burša, M., Kenyon, S., Kouba, J., Šíma, Z., Vatrt, V. and Vojtišková, M., 2004, A global vertical reference frame based on four regional vertical datums, *Stud. Geophys Geod.*, **48**(3), 493-502, doi:10.1023/b:sgeg.0000037468.48585.e6.

Bursa, M., Kouba, J., Muller, A., Radej, K., True, S. A., Vatrt, V. and Vojtišková, M., 2001, Determination of geopotential differences between local vertical datums and realization of a world height system. *Studia geoph. Et geod.*, **45**, 127-132.

Burša, M., Kenyon, S., Kouba, J., Raděj, K., Vatrt, V., Vojtišková, M. and Šíma, Z., 2002a, World height system specified by Geopotential at tide gauge stations. IAG Symposium, Vertical Reference System, Cartagena, February 20-23, 2001, Colombia, Proceedings, Springer Vlg., 291-296.

Chambodut, A., Panet, I., Manda, M., Diament, M., Holschneider, M. and Jamet, O., 2005, Wavelet frames: an alternative to spherical harmonic representation of potential fields, *Geophysics, J. Int.*, **163**, 875-899.

Dennis, M. L. and Featherstone, W. E., 2002, Evaluation of orthometric and related height systems using a simulated mountain gravity field, Proceedings of third meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, 26-30 August 2002.

Drewes, H., Bosch, W., Kaniuth, K., Hernandez, J., N., Hoyer, M. and Wildermann, E., 1999, Realization of the vertical reference system in

در این مقاله پس از مدل‌سازی میدان گرانی در منطقه مورد بررسی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی، بی‌هنجاری پتانسیل در نشانه ارتفاعی ساحلی در منطقه بندرعباس محاسبه و با به‌کارگیری فرمول برونز، این مقدار به واحد ارتفاعی ۲۹۷/۰۲۹- متر برای ارتفاع ژئوئید در آن مختصات تبدیل شد. با استفاده از مختصات سه‌بعدی نشانه ارتفاعی مینا و ارتفاع ارتومتریک این نقطه و محاسبات صورت گرفته، صفر ارتفاعی ایران به میزان ۰/۲۱۶ متر زیر ژئوئید قرار دارد و لازم است این مقدار از همه ارتفاع‌های ارتومتریک محاسبه شده نسبت به صفر ارتفاعی موجود کم شود. این مقدار بنا به تحقیقات (اردلان و صفری، ۲۰۰۵) برابر با ۰/۰۹ متر زیر ژئوئید محاسبه شده است. اما مزایای روش مورد استفاده در تحقیق حال حاضر نسبت به تحقیقات پیشین عبارت‌انداز:

- ترکیب داده‌های شتاب گرانش و ارتفاع‌سنجی ماهواره‌ای
 - محلی‌سازی داده‌های گرانی با حذف اثر جهانی میدان گرانی در منطقه موردنظر
 - مدل‌سازی محلی میدان گرانی با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی کروی بهینه
 - برآورد بی‌هنجاری پتانسیل در منطقه و تعیین وضعیت صفر ارتفاعی
- از آنجا که در این روش میزان اختلاف ارتفاع نقطه صفر ارتفاعی از ارتفاع ژئوئید تعیین می‌شود (تعیین وضعیت صفر ارتفاعی نسبت به ژئوئید)، می‌توان از آن به مثابه ابزاری برای یکسان‌سازی ارتفاعی در کل جهان استفاده کرد.

مراجع

صفری، ع.، شریفی، م. ع. و فروغی، ا.، ۱۳۹۲، مدل‌سازی محلی میدان گرانی زمین با استفاده از تابع‌های پایه شعاعی، بررسی موردی: مدل‌سازی میدان ثقل در

- DOI 10.1007/s00190-012-0574-3.
- Hipkin, R. G., 2002, Vertical datum defined by $W_o = U_o$: theory and practice of a modern height system. in: proceedings of third meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, 26-30.
- Holschneider, M., Chambodut, A. and Manda, M., 2003, From global to regional analysis of the magnetic field on the sphere using wavelet frames, *Physical Earth Planet International*, **135**, 107-124.
- Kim, M. C., Tapley, B. D., Shum, C. K. and Ries, J. C., 1995, Center for space research mean sea surface model, presented at the TOPEX/POSEIDON working team meeting, Pasadena California.
- Klees, R., Tenzer, R., Prutkin, I. and Wittwer, T., 2008, A data driven approach to local gravity field modeling using spherical radial basis functions, *Journal of Geodesy*, **82**, 457-471.
- Klees, R. and Wittwer, T., 2007, Local gravity field modeling with multi-pole wavelets, in P. Tregoning and C. Rizos (eds), *dynamic planet – monitoring and understanding a dynamic planet with Geodetic and Oceanographic tools*, International Association of Geodesy Symposia, Springer Berlin Heidelberg, **130**, 303-308.
- Lehmann, R., 2000, Altimetry-gravimetry problems with free vertical datum, *J. Geodesy*, **74**(3-4), 327-334.
- Marchenko, A. N., 1998, Parameterization of the earth's gravity field, point and line singularities. *Leviv Astronomical and Geodetic Society*, ISBN 5-7763-4604-5.
- Marchenko, A. N., Barthelmes, F., Meyer, U. and Schwintzer, P., 2001, Regional geoid determination: an application to airplane gravity data in the Skagerrak, Scientific Technical Report, STR01/07, GFZ.
- Marti, U., 2002, Modelling of differences of height systems in Switzerland, Proceedings of third meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, Greece, August 26-30.
- Marti, U., Schlater, A., Brockmann, E. and Wiget, A., 2002, The way to a consistent national height system for Switzerland, proceedings of IAG symposium, vistas for geodesy in the new millennium, Budapest, Hungary, 2-7 September 2001, Springer Verlag, Berlin, **125**, 90-95.
- Miller, M. M., Johnson, D. J., Weldon, R. and Meertens, C., 1999, Differential vertical Venezuela, Poster, XXII IUGG Gen. Ass., Birmingham, U K, England.
- Eicker, A., Mayer-Gürr, T., and Ilk K. H., 2004, Global gravity field solutions from GRACE SST data and regional refinements by GOCE SGG observations, in: proceedings IAG international symposium gravity, geoid and space missions (GGSM2004), Porto, Portugal.
- Ekman, M., 1989, Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity, *Bull Geod*, **63**(3), 281-296.
- Ekman, M., 1999, Using mean sea surface topography for the determination of height system differences across the Baltic sea, *MarGeod*, **22**, 31-35.
- Featherstone, W. E., 1998, Do we need a gravimetric geoid or a model of the base of the Australian height datum to transform GPS heights, *Aust Surv*, **43**(4), 273-280.
- Featherstone, W. E., 2000, Towards unification of the Australian height datum between the Australian mainland and Tasmania using GPS and the AUSGeoid98 geoid model, *Geomat Res Australas*, **73**, 33-54.
- Featherstone, W. E., 2002, Prospects for the Australian height datum and geoid model, proceedings of IAG symposium, vistas for geodesy in the New Millennium, 2-7 september 2001, Budapest, Hungary, Springer Verlag, Berlin, Germany, **125**, 96-101.
- Featherstone, W. E. and Kirby, J. F., 1998, Estimates of the separation between the geoid and quasi-geoid over Australia, *Geomatics Research Australasia*, **68**, 75-86.
- Featherstone, W. E., Kirby, J. F., Hirt, C., Filmer, M. S., Claessens, S. J., Brown, N. J., Hu, G. and Johnston, G. M., 2011, The AUSGeoid09 model of the Australian height datum, *J. Geod.*, 2011, **85**, 133-150, DOI 10.1007/s00190-010-0422-2.
- Freeden, W., Gervens, T., Schreiner, M., 1998, Constructive approximation on the sphere (with applications to geo mathematics), Oxford Science Publication, Oxford University Press, New York.
- Freeden, W. and Reuter, R., 1983, Spherical harmonic splines: theoretical and computational aspects, *Meth u Verf d Math Phys.*, **27**, 79-103.
- Freeden, W., Schreiner, M. and Franke, R., 1997, A survey on spherical spline approximation, *Surv Math Ind* **7**, 29-85.
- Gatti, A., Reguzzoni, M. and Venuti, G., 2013, The height datum problem and the role of satellite gravity models, *J. Geod.*, **87**, 15-22,

- Schmidt, M., Kusche, J., Loon, J., Shum, C. K., Han, S. C. and Fabert, O., 2005, Multi-resolution representation of regional gravity data, in: Jekeli, C., Bastos, L., Fernandes, J., (eds) Gravity, geoid and space missions., Springer, Berlin, 167-172.
- Schmidt, M., Fengler, M., Mayer-Gürr, T., Eicker, A., Kusche, J., Sanchez, L. and Han, S. C., 2007, Regional gravity modeling in terms of spherical base functions, *J Geod.*, **81**, 17-38.
- Stammer, D., Tokmakian, R., Semtner, A. and Wunsch, C., 1996, How well does a 1/4 global circulation model simulate large-scale ocean observation?, *Geophys. Res.*, **101**, 25779-25812.
- Sünkel, H., 1981, Point mass models and the anomalous gravitational field, Report 328, Department of Geodetic Sciences, Ohio State University, Columbus.
- Tscherning, C. C., 1986, Functional methods for gravity field approximation, in: Sünkel, H., (ed) Mathematical and numerical techniques in physical geodesy, Lecture Notes in earth sciences, Springer, Berlin, **7**, 3-47.
- Vermeer, M., 1982, The use of mass point models for describing the Finnish gravity field, Proc. 9th meeting of the Nordic Geodetic Commission, Gävle, Sweden.
- Vermeer, M., 1983, A new SEASAT altimetric geoid for the Baltic, Finnish Geodetic Institute, Report 83:4, Helsinki.
- Vermeer, M., 1984, Geoid studies on Finland and the Baltic, Finnish Geodetic Institute, Report 84:3, Helsinki.
- Vermeer, M., 1995, Mass point geo potential modeling using fast spectral techniques; historical overview, toolbox description, numerical experiment, *Manuscr Geod*, **20**, 362-378.
- Wittwer, T., 2007, Regional gravity field modeling with radial basis functions, PhD thesis, Publications on Geodesy 72 ISBN: 978 90 6132 315 0 ISSN 0165 1706.
- Xu, P. and Rummel, R., 1991, A quality investigation of global vertical datum connection, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Number 34.
- Zhang, L., Li, F., Chen, W. and Zhang, C., 2009, Height datum unification between Shenzhen and Hong Kong using the solution of the linearized fixed-gravimetric boundary value problem, *J. Geod.*, **83**, 411-417, DOI 10.1007/s00190-008-0234-9.
- motion estimation (DIVD): simultaneous GPS monitoring of crustal deformation and tidal gauge stability along the Cascadia convergent margin. Presented at AGU Spring 1999 Meeting, Boston, Mass., **31**, May-4 June 1999.
- Rapp, R. H., 1980, Precise definition of the geoid and its realization for vertical datum applications, in: proceedings of the 2nd International Symposium on Problems Related to the Redefinition of the North American Vertical Geodetic Networks. Ottawa, Canada, 73-86.
- Rapp, R. H., 1994, Separation between reference surfaces of selected vertical datums. *Bull. Geodes.*, **69**(1), 26-31.
- Rapp, R. H., 1995, A world vertical datum proposal, *Allg Verm Nachr*, **102**(Jg.Heft 8/9), 297-304.
- Rapp, R. H. and Balasubramania, N., 1992, A conceptual formulation of a world height system, Tech. Rep. 421, Department of Geodetic Science and Surveying. Ohio State University, Columbus.
- Rummel, R. and Teunissen, P., 1988, Height datum definition, height datum connection and the role of the geodetic boundary value problem, *Bulletin Géodésique*, **62**(4), 477-498.
- Safari, A., Sharifi, M. A., Amin, H., Foroughi, I. and Tenzer, R., 2013b, A new approach for the determination of the gravity gradient tensor using satellite altimetry observations, under review *Marine Geodesy*.
- Sanchez, L., 2002, A reference surface for the unified height system in the northern part of south America. proceedings of IAG symposium, vistas for geodesy in the New Millennium, 2-7 september 2001, Budapest, Hungary, Springer Verlag, Berlin, Germany, 125, 84-89.
- Sánchez, L., 2008, Approach for the establishment of a global vertical reference level. In: Xu P, Liu J, Dermanis A (eds) VI Hotine-Marussi symposium on theoretical and computational geodesy, IAG Symposia, Springer, Berlin, **132**, 119-125.
- Sansò, F. and Venuti, G., 2002, The height datum/geodetic datum problem, *Geophys. J. Int.*, **149**(3), 768-775.
- Schmidt, M., Fabert, O., Shum, C. K. and Han, S. C., 2004, Gravity field determination using multiresolution techniques, Proceedings 2nd International GOCE User workshop, ESA-ESRIN, Frascati.