

بهبود مدار دینامیکی تبدیل یافته ماهواره‌های ارتفاع کم به کمک مدار مبنای بهینه

محمد رضا سیف^{۱*}، محمد علی شریفی^۲ و مسعود عباس هادی^۳

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

^۳ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۰/۶/۱۶، پذیرش نهایی: ۹۲/۷/۱۶)

چکیده

روش فیلتر کالمن یکی از الگوریتم‌های متداول و پُرکاربرد در تعیین مدار ماهواره‌ها است. این روش یک برآوردگر خطی است و به منظور به کارگیری آن برای مدل‌های دینامیکی و مشاهدات غیرخطی، باید از مدل‌ها خطی‌شده آنها استفاده کرد. در حل همه مسئله‌های غیرخطی به روش خطی‌سازی (روش‌های گرادیان-مبنا) به مقدار اولیه مجهول‌ها نیاز است که این مقدار اولیه در مسئله تعیین مدار، همان مدار مبنا است. هرچه مقادیر اولیه (مدار مبنا) به جواب نهایی نزدیک‌تر باشد، خطای خطی‌سازی در فرایند تعیین مدار کاهش می‌یابد. هدف اصلی این تحقیق بهبود مقادیر اولیه مورد نیاز برای خطی‌سازی مدل‌های دینامیکی و مشاهداتی روش فیلتر کالمن و رسیدن به یک مدار مبنای بهینه است که کمترین اختلاف را با مدار مشاهده شده داشته باشد. این مدار به کمک الگوریتم بهینه‌سازی کمترین مربعات تعیین شد. استفاده از مدار مبنای بهینه در تعیین مدار، منجر به بهبود مجذور متوسط مربعات سه‌بعدی (دستگاه مختصات دکارتی) جواب نهایی تعیین مدار دینامیکی تبدیل یافته تا حد یک متر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ماهواره‌های ارتفاع کم، فیلتر کالمن، مدار مبنای بهینه، تعیین مدار ماهواره، کمترین مربعات

The improvement of reduced-dynamic orbit of LEO satellites using best-fitting reference orbit

Seif, M. R.¹, Sharifi, M. A.² and Abbas Hadi, M.³

¹Ph.D. Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatic Engineering, University of Tehran, Iran

²Assistant Professor, Department of Surveying and Geomatic Engineering, University of Tehran, Iran

³Graduate Student of Geodesy, Department of Surveying and Geomatics Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 07 Sep 2011, Accepted: 08 Oct 2013)

Summary

Satellite orbit determination is a method of determining the state vector, i.e., position and velocity, of a Low Earth Orbiting (LEO) satellite or interplanetary spacecraft. During the past two decades, many satellites with various applications including geodetic applications have been launched at low altitudes. For instance, TOPEX / POSEIDON, CHAMP, GRACE and GOCE are the examples of the geodetic LEO satellites. They are dominantly affected by the disturbances forces, i.e., the Earth's gravity field anomalies and the atmospheric drag. Therefore, the LEO satellites orbit determination has special complexity and challenges which needs particular consideration.

In many researches, three techniques namely dynamic, kinematic and reduced dynamics approaches are implemented for LEO satellite orbit determination. In the dynamic approach, the satellite's motion is modeled by the equation of motion which is expressed in the Earth Centered Inertial (ECI) frame. In this method, all forces acting on a

satellite are computed using the dynamical model and numerically integrated to propagate the state vector to the subsequent epochs from an initial state vector. The dynamic model describing the satellite motion with time is constructed using the forces acting on the satellite. The gravitational forces such as the Earth and the Sun and Moon and any other third body gravitational attraction and their indirect effect and non-gravitational forces such as atmospheric drag and solar radiation pressure have been modeled for orbit determination procedure.

Kinematic orbit determination is a purely geometrical approach based on the observations that requires neither dynamic force models nor the physical information. The kinematic orbit is derived from observations. In the classical implementation of this approach, the orbital elements are derived from angular observations, e.g., azimuth and elevation of satellite.

Nowadays, Global Navigation Satellite Systems (GNSS) especially Global Positioning System (GPS) could represent independent continuous kinematic orbit. The kinematic orbit derived from GPS observations is a dense and accurate orbit. It provides necessary information for many applications in satellite geodesy. However, the accuracy of kinematic orbit is limited to noise, systematic and gross errors of observations.

The mismodeling of dynamic orbit and GPS measurement errors of kinematic orbit are both reduced when dynamic and geometrical information is combined in the reduced-dynamic orbit. The reduced dynamic orbit is generated by incorporating dynamic models as the dynamic model of the dynamic system of the orbital motion with the kinematic orbit in dynamic filtering process. Using the dynamic model, the effects of observation errors, noise, systematic and gross errors, will be reduced.

Kalman filtering is the most widely used method in satellite reduced-dynamic orbit determination process. It is useable for linear dynamic system with linear observation equations. However, the Extended Kalman Filter (EKF) or the linearized form the system equations should be used. In the case of linear form application, the initial value of unknowns is required.

The problem of orbit determination is one the highly nonlinear problem in engineering applications. For the implementation of the standard form of the Kalman filter for orbit determination, the initial orbit has to be computed. Different orbit determination methods are introduced for this purpose. In this article the idea of reference orbit determination based on the numerical integration is introduced.

The reference orbit is an initial approximation of the observed satellite orbit that can be used for linearizing purposes. The reference orbit is determined using numerical integration methods. It deviates from the real orbit because of using erroneous initial values and difference in the Earth's real and reference gravitational field. Consequently, the reference positions of satellites, derived from the reference orbit, are different from the actual positions. The differences in positions are called the location errors. In order to minimize the location errors, the reference orbit should be computed as close as possible to the real orbit.

In this paper, the least squares approach is proposed for selecting the initial conditions in a way that the total misfit of the reference orbit and to the observed orbit is minimized. When integrating a reference orbit in a time interval, the location error is zero at the initial time and it increases linearly to a maximum at the end of time interval or the so-called the v-shaped pattern of the error. It may be better to uniformly distribute the differences over the interval. In other words, the v-shaped pattern of the differences is changed in such a way that the deviation of two orbits remains constant. This orbit is called the best-fitting reference orbit.

The more accurate reference orbit the less linearization error occurs. By using the best-

fitting reference orbit instead of initial one in Kalman filter algorithm, 3D RMS of reduced-dynamic orbit is reduced to 1 meter over a full day.

Keywords: Low Earth Orbiting (LEO) satellite, Kalman filtering, Best-fitting reference orbit, Satellite orbit determination, Least square

۱ مقدمه

در میدان گرانی یکی از مدل‌های جهانی میدان گرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما به علت اختلاف میدان گرانی واقعی با مدل‌های گرانی موجود، اختلاف مدار مبنا و مدار مشاهداتی به صورت تجمعی افزایش می‌یابد، حتی اگر اختلاف این دو مدار در نقطه اولیه صفر باشد. علاوه بر نوع میدان گرانی، نتیجه انتگرال‌گیری عددی (مدار مبنا) به شدت وابسته به مقدار اولیه است و با تغییر این مقدار اولیه، اختلاف مدار مبنا و مشاهداتی تغییر خواهد کرد. در نتیجه می‌توان گفت که اختلاف بین مدار مشاهداتی و مدار مبنا به دو علت اختلاف در مدل‌های گرانی و اختلاف در مقدار اولیه است. برای کم کردن اختلاف این دو مدار، هم می‌توان مدل میدان گرانی را به میدان واقعی نزدیک کرد و هم مقدار اولیه را تغییر داد. در این تحقیق برای تعیین مدار مبنا بهینه با ثابت فرض کردن میدان گرانی، مقدار اولیه را چنان تغییر می‌دهیم که اختلاف مدار مبنا و مشاهداتی کمینه شود. فرض ثابت بودن میدان گرانی در مورد این تحقیق فقط متوجه دوره‌های بلند است. بخش متغیر در میدان گرانی با دوره کوتاه روزانه و یا کمتر از روزانه با مدل کشندی (جزرومدی) در محاسبه مدار دینامیک محاسبه شده است. در نتیجه با توجه به مورد این تحقیق که فقط ۲۴ ساعت اطلاعات مداری است، این فرض (ثابت تغییرات با دوره بلند) خللی در محاسبات وارد نمی‌کند. با انتخاب مناسب و بهینه مقدار اولیه می‌توان به مناسب‌ترین مدار مبنا دست یافت.

مناسب‌ترین مدار مبنا، مدار مبنایی است که مجموع مربعات اختلاف آن با مدار مشاهداتی کمینه باشد (شریفی، ۲۰۰۶). براساس این تعریف همان‌طور که روشن است برای تعیین مناسب‌ترین مدار مبنا با یک مسئله بهینه‌سازی با معیار

طی دو دهه اخیر ماهواره‌های بسیاری با کاربردهای گوناگون و از جمله کاربردهای ژئوماتیکی در ارتفاع نزدیک به سطح زمین در مدار قرار گرفته‌اند که برای نمونه می‌توان به ماهواره‌های GRACE، CHAMP، TOPEX/POSEIDON و GOCE اشاره کرد. به سبب آنکه ماهواره‌های ارتفاع کم بیشتر از سایر ماهواره‌ها تحت تاثیر نیروهای اغتشاشی قرار دارند، تعیین مدار آنها دارای پیچیدگی‌ها و چالش‌های خاصی است که توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است.

با نصب و به‌کارگیری گیرنده‌های تعیین موقعیت ماهواره‌ای (Global Positioning System) دقیق روی این ماهواره‌ها، مشاهدات چگال و دقیقی از مدار ماهواره‌های ارتفاع کم به دست آمد. این مدار که خود به تنهایی می‌تواند مدار قابل‌قبولی را برای ماهواره به دست دهد به مدار سینماتیک معروف است. اما آلودگی به نوبه در مشاهدات مورد استفاده در تعیین مدار سینماتیک، خطاهای فاحش و خطاهای سامان‌مند از نقص‌های این نوع مدار است (جاگی و همکاران، ۲۰۰۷؛ بوک، ۲۰۰۳). برای حل این مشکل مدار دیگری عرضه شد که این مدار، با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن، نوبه مشاهدات هموار (Smooth) می‌شود و خطاهای فاحش کاهش می‌یابد (وو و همکاران، ۱۹۹۱). این مدار را مدار دینامیکی تبدیل یافته (Reduced-dynamic Orbit) می‌نامیم.

یکی از ورودی‌های مورد نیاز در الگوریتم فیلتر کالمن، مقدار اولیه برای مجهول‌ها در مدل‌های غیرخطی است که این مقدار اولیه برای مشاهدات ماهواره‌ای، همان مدار مبنا است. برای محاسبه مدار مبنا عمدتاً از انتگرال‌گیری عددی

کمترین مربعات خطا سروکار خواهیم داشت (میخائیل و آکرم، ۱۹۶۷). این ایده را اولین بار بالانی (۱۹۸۸) عرضه کرد.

در این تحقیق به دنبال آن هستیم که با استفاده از مدار مبنای بهینه به جای مدار مبنای، کیفیت مدار دینامیکی تبدیل یافته را افزایش دهیم.

۲ تعیین مدار ماهواره

تعیین مدار به معنی تعیین پارامترهایی است که به کمک آنها بتوان وضعیت ماهواره یا سیاره‌ها را در فضا مشخص کرد. شناخته شده‌ترین و پُرکاربردترین پارامترها، المان‌های کپلری و یا به صورت معادل بردار سرعت و موقعیت در یک دستگاه دکارتی است که به آن بردار وضعیت (State Vector) نیز می‌گویند. مدار ماهواره‌ها را می‌توان براساس ویژگی‌های گوناگون آنها به روش‌های متفاوتی دسته‌بندی کرد. این مدارها براساس روش تعیین آنها به سه دسته کلی مدارهای دینامیک، سینماتیک و دینامیک تبدیل یافته طبقه‌بندی می‌شوند.

است. مدل‌های دینامیکی در حقیقت بیان ریاضی واقعیت‌های فیزیکی هستند که برای نمونه می‌توان به مدل ژئوپتانسیل اشاره کرد که بیان ریاضی میدان گرانی زمین است. از این مدل‌ها برای محاسبه شتاب‌های وارده بر ماهواره استفاده خواهیم کرد. این شتاب‌ها در دو دسته کلی شتاب‌های گرانی و غیرگرانی تقسیم بندی می‌شوند. مهم‌ترین شتاب‌های اغتشاشی گرانی ناشی از اثر بیضی شکل بودن زمین، ترم‌های دیگر میدان گرانی، کشند، گرانی جسم سوم (ماه و خورشید) و مهم‌ترین عامل شتاب‌های اغتشاشی غیرگرانی فشار پرتوهای خورشیدی و اصطکاک جوّی است.

با این حال به علت نقصان این مدل‌ها و اختلافشان با حقیقت فیزیکی که علت عمده آن تغییرات و پیچیدگی‌های پدیده‌های فیزیکی است، مدار محاسبه شده با این مدل‌ها دارای اختلاف و جدایی معنی‌دار با مدار واقعی است. این اختلاف، با افزایش زمان و دور شدن از نقطه اولیه انتگرال‌گیری، بیشتر نیز خواهد شد.

۲-۲ مدار سینماتیک

مدار سینماتیک مداری است که صرفاً از مشاهدات به دست می‌آید. این مشاهدات ممکن است مشاهدات زاویه‌ای (ارتفاع و آزیموت ماهواره) از ایستگاه‌های کنترل زمینی، مشاهدات فاصله‌یابی ماهواره‌ای (Satellite Laser Ranging)، مشاهدات تعیین موقعیت ماهواره‌ای و مانند آن باشد. در مشاهدات زاویه‌ای و فاصله‌یابی ماهواره‌ای به علت تنگ بودن مشاهدات، امکان تولید یک مدار به شکل کاملاً مستقل فراهم نیست. در صورتی که مشاهدات شبه‌پیوسته سامانه موقعیت‌یاب ماهواره‌ای ممکن است مداری با چگالی مناسب از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد.

با این همه، کیفیت مدار سینماتیک به دست آمده از مشاهدات موقعیت‌یاب ماهواره‌ای، بستگی به هندسه ماهواره‌های GPS و عوامل متعدد دیگر دارد (کروز و

۱-۲ مدار دینامیکی

استفاده از مدل‌های نیروی شتاب‌های وارد بر ماهواره به منظور محاسبه مدار ماهواره یکی از روش‌های قدیمی و پُرکاربرد در مبحث تعیین مدار است که بعدها با مطرح شدن انواع دیگری از مدارها، این مدار به مدار دینامیکی معروف شد (باتچر، ۲۰۰۵). مدار دینامیکی از حل معادله دیفرانسیل حرکت به دست می‌آید و در آن هیچ مشاهده‌ای به کار نرفته است (سیبر، ۲۰۰۳):

$$\dot{\underline{s}}(t) = \underline{f}(t, \underline{s}(t)), \quad \underline{s}(t_0) = \underline{s}_0, \quad (1)$$

در این رابطه $\underline{f}(t, \underline{s}(t))$ نشان‌دهنده مدل دینامیکی نیروهای وارد بر ماهواره، $\underline{s}(t)$ بردار وضعیت ماهواره (بردار موقعیت و سرعت) و \underline{s}_0 مقدار اولیه برای حل این معادله دیفرانسیل

همکاران، ۲۰۰۵؛ بوک، ۲۰۰۳؛ سوالات و روتاجر، ۲۰۰۵).

آلوده بودن این مشاهدات به خطاهای تصادفی، خطاهای فاحش و خطاهای سامان‌مند، مانند انواع دیگر مشاهدات، اعتماد کامل به این مشاهدات را با ابهام جدی مواجه می‌کند. علاوه بر آن اشکالاتی شبیه قطع سیگنال و از دست رفتن مشاهدات در چند نقطه، باعث ایجاد گسستگی در مدار سینماتیک می‌شود.

۳ مدار مبنای بهینه

مدار مبنای، در حقیقت مقادیر اولیه برای خطی‌سازی مدار مشاهداتی است. مناسب‌ترین مدار مبنای، مداری است که کمترین اختلاف را با مدار مشاهداتی داشته باشد که به این مدار، مدار مبنای بهینه می‌گویند. همان‌طور که از نام این مدار نیز پیدا است برای تعیین آن با یک مسئله بهینه‌سازی مواجه خواهیم بود که این بهینه‌سازی براساس معیار کمترین مربعات صورت خواهد گرفت. مدار مبنای در حقیقت حاصل حل معادله دیفرانسیل زیر است:

$$\dot{\underline{s}}^{ref}(t) = \underline{f}^{ref}(t, \underline{s}^{ref}(t)), \quad \underline{s}^{ref}(t_0) = \underline{s}_0^{ref}, \quad (2)$$

که در آن، \underline{f}^{ref} مدل دینامیکی برای تعیین مدار مبنای (مدل گرانی) و \underline{s}_0^{ref} مقدار اولیه مدار است که برای مثال می‌توان آن را بردار موقعیت و سرعت سه‌بعدی در نظر گرفت. این بردار که دارای شش مولفه است مقدار اولیه مدار مشاهداتی در این لحظه (\underline{s}_0) تقریبی برای آن است.

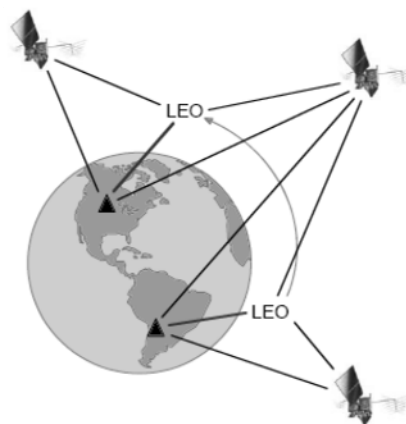
$$\underline{s}_0^{ref} = \underline{s}_0 + \underline{ds}. \quad (3)$$

در اینجا بردار \underline{ds} تصحیحی است که به مقدار اولیه اعمال می‌شود تا اختلاف مدار مشاهداتی و مدار مبنای را کمینه کند.

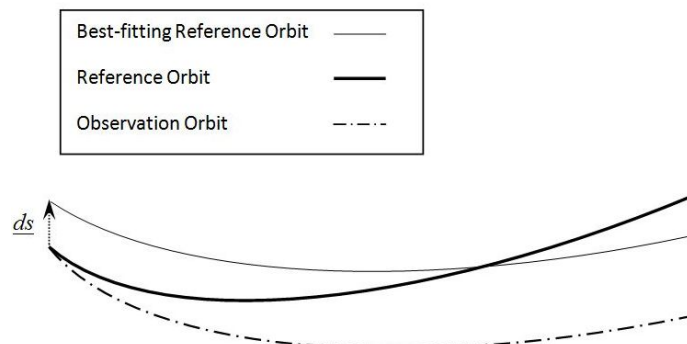
۳-۲ مدار دینامیکی تبدیل یافته

برای استفاده از مزایای هر دو نوع مدار و حل مشکلات پیش‌گفته آنها، مدار سومی عرضه شده است که می‌توان آن را تلفیقی از دو مدار قبل دانست. در این مدار که مدار دینامیکی تبدیل یافته نام دارد، با استفاده از مدل دینامیکی، کیفیت مدار سینماتیک را افزایش می‌دهیم. در مقابل مشاهدات مدار سینماتیک می‌تواند باعث بهبود مدل‌های نیروی مورد استفاده در تعیین مدار دینامیک شود.

استفاده از روش فیلتر کالمن یکی از روش‌های متداول در تلفیق مدل‌های دینامیکی نیرو و مشاهدات وهله به وهله است که باعث فیلتر شدن و تعدیل خطاهای مدار سینماتیک می‌شود. همان‌طور که در بخش‌های بعدی خواهیم دید، اساس این تلفیق بر ماتریس گذر بین دو وهله مشاهداتی استوار است که در این مقاله از مدل دینامیکی نیروهای وارد



شکل ۱. ردگیری ماهواره‌های ارتفاع کم با GPS (بیسناج، ۲۰۰۴).



شکل ۲. مدار مشاهداتی، مدار مبنا و مدار مبنای بهینه (سیف و همکاران، ۲۰۱۱).

$$\begin{cases} \Delta s_i = \frac{\partial s_i^{ref}}{\partial s_0^{ref}} ds - (s_i - s_i^{ref}(t_i, s_0)) \\ \sum_{i=1}^N \|\Delta s_i\|^2 \rightarrow \min \end{cases} \quad (6)$$

یا به شکل معادل،

$$\begin{cases} \underline{d} = \underline{A} ds - \underline{d}l \\ \sum_{j=1}^N \|\underline{d}_j\| \rightarrow \min \end{cases} \quad (7)$$

در معادله فوق، ماتریس $[\underline{A}]_{6N \times 6}$ ماتریس طراحی، در $\underline{d} = [\Delta s_i]_{6N \times 1}$ و $\underline{d}l = [s_i - s_i^{ref}]_{6N \times 1}$ است. با استفاده از روش کمترین مربعات:

$$\underline{d}\hat{s} = (\underline{A}^T \underline{P} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P} \underline{d}l \quad (8)$$

ماتریس $[\underline{P}]_{6N \times 6N}$ ، در اینجا ماتریس وزن مشاهدات است که می‌توان آن را ماتریسی یکه فرض کرد زیرا در حالتی که مشاهدات همگی از یک نوع هستند، ماتریس وزن تأثیری در برآورد جواب مجهول‌ها در روش کمترین مربعات ندارد (میخاییل و آکرمن، ۱۹۶۷). براساس تعریف ماتریس طراحی مشتق جزئی بردارهای وضعیت نسبت به بردار وضعیت اولیه و همان ماتریس گذر است.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \Phi(t_0, t_0) \\ \Phi(t_1, t_0) \\ \vdots \\ \Phi(t_N, t_0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

به‌ازای مقادیر متفاوتی از بردار ds ، می‌توان بی‌شمار مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل (۲) و در نتیجه بی‌شمار مدار مبنا تعریف کرد. به‌عبارت دیگر می‌توان با تغییر مولفه‌های سه‌بعدی بردار موقعیت و سرعت در لحظه اول (ds)، به مدار مبنا متفاوتی رسید. براساس مطلبی که در قبل نیز گفته شد، ما در این مسئله به دنبال تصحیحی هستیم که به‌ازای آن، اختلاف مدار مشاهداتی و مبنا کمینه شود. این مدار مبنا همان مدار مبنای بهینه است.

$$\begin{cases} s_i + \Delta s_i = s_i^{ref}(t_i, s_0^{ref}) \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N \|\Delta s_i\|^2 \rightarrow \min \end{cases} \quad (4)$$

دستگاه معادله فوق، N معادله غیرخطی برحسب s_0^{ref} یا همان ds است که در آن بردار مشاهده در لحظه t_i ، Δs_i اختلاف مدار مشاهداتی و مدار مبنا در لحظه t_i ، s_i^{ref} بردار مبنا در لحظه t_i و تابعی از مقدار اولیه مدار مبنا s_0^{ref} و t_i است. با فرض کوچک بودن تصحیح اعمال شده به مقدار اولیه، معادلات خطی شده به‌صورت زیر خواهد بود.

$$s_i^{ref}(t_i, s_0^{ref}) = s_i^{ref}(t_i, s_0) + \frac{\partial s_i^{ref}}{\partial s_0^{ref}} ds \quad (5)$$

در معادله فوق $\frac{\partial s_i^{ref}}{\partial s_0^{ref}}$ همان ماتریس گذر است. با وارد کردن معادله خطی شده در رابطه (۴)

که در این رابطه \underline{s}_i^+ بردار وضعیت برآورد شده لحظه قبل، $\Phi(t_{i+1}, t_i)$ ماتریس گذر، \underline{s}_{i+1}^- بردار وضعیت پیش‌بینی شده و \underline{s}_i^{ref} مقدار اولیه برای مجهول‌ها در لحظه t_i یا همان مقدار مدار مبنا در این لحظه است. با استفاده از قانون انتشار خطاها ماتریس واریانس کوواریانس بردار پیش‌بینی شده از رابطه زیر محاسبه می‌شود (تپلی و همکاران، ۲۰۰۴):

$$\bar{P}_{i+1} = \Phi(t_{i+1}, t_i) P_i^+ \Phi^T(t_{i+1}, t_i) \quad (11)$$

در این رابطه P_i^+ ماتریس کوواریانس بردار وضعیت برآورد شده لحظه قبل و \bar{P}_{i+1} ماتریس کوواریانس بردار وضعیت پیش‌بینی شده است.

۴-۱-۲ تصحیح

$$\underline{s}_{i+1}^+ = \underline{s}_{i+1}^- + K_{i+1} [y_{i+1} - H_{i+1}(\underline{s}_{i+1}^- - \underline{s}_i^{ref})] \quad (12)$$

که در این رابطه y_{i+1} مشاهده خطی شده و K_{i+1} ماتریس بهره است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$K_{i+1} = \bar{P}_{i+1} H_{i+1}^T (H_{i+1} \bar{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1} \quad (13)$$

در این رابطه R_{i+1} ماتریس نوفه مدل مشاهده است. ماتریس واریانس-کوواریانس بردار وضعیت برآورد شده (P_{i+1}) نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{i+1} = [I - K_{i+1} H_{i+1}] \bar{P}_{i+1} \quad (14)$$

تعیین ماتریس گذر مورد نیاز در فرایند فیلتر کالمن در بخش بعدی شرح داده خواهد شد. در ادامه روند محاسبات پیش‌بینی و تصحیح در نمودار (۱) رسم شده است.

۵ تعیین ماتریس گذر

ماتریس گذر بیان خطی (شکل ماتریسی) رابطه بین بردارهای وضعیت دو اپک متفاوت در یک دستگاه دینامیکی است. یکی از روش‌های مرسوم در تعیین ماتریس گذر، انتگرال‌گیری مستقیم از معادله دیفرانسیل است.

$$\dot{\Phi} = F(t)\Phi \quad (15)$$

در این رابطه، $\Phi(t_N, t_0)$ نشان‌دهنده ماتریس گذر بین دو اپک t_0 و t_N است که در بخش‌های بعدی روش محاسبه آن توضیح داده خواهد شد. با تعیین مدار مبنای بهینه، این مدار را در حکم یکی از ورودی‌های الگوریتم فیلتر کالمن وارد فرایند تعیین مدار دینامیکی تبدیل یافته خواهیم کرد.

۴ روش فیلتر کالمن

اولین بار رادولف امیل کالمن در ۱۹۵۸ ایده فیلتر کالمن را مطرح کرد. وی (۱۹۶۰ و ۱۹۶۱) مقاله‌های خود را در زمینه یک روش فیلتر کردن جدید عرضه کرد و افق‌های جدیدی در زمینه فیلتر کردن گشود. روش فیلتر کالمن یک روش پیش‌بینی کننده-تصحیح کننده است که هدف آن رسیدن به یک جواب بهینه برای مجهول‌ها است. در این روش منظور از بهینگی، کمینه کردن ماتریس واریانس-کوواریانس مجهول‌ها است (ولچ و بیشپ، ۱۹۹۵). روش فیلتر کالمن یک روش دنباله‌ای است که در آن برای برآورد بردار مجهول‌ها و دقت آنها در هر لحظه صرفاً به بردار مجهول‌ها و دقت برآورد شده مرحله قبل آنها و مشاهدات در آن لحظه نیاز داریم نه همه مشاهدات و داده‌ها. بنابراین حجم محاسبات به طرز چشمگیری نسبت به پردازش دسته‌ای (Batch Process) کاهش می‌یابد و سرعت پردازش زیاد می‌شود (کالمن، ۱۹۶۰؛ اندرسون و موور، ۱۹۷۹).

۴-۱ الگوریتم فیلتر کالمن

فیلتر کالمن نیز مانند روش‌های دیگر تقریب، دارای دو مرحله است:

۱. پیش‌بینی (Prediction)

۲. تصحیح (Correction)

روابط مربوط به این دو مرحله در بخش زیر آمده است (برآون و هوآنگ، ۱۹۹۷).

۴-۱-۱ پیش‌بینی

$$\underline{s}_{i+1}^- = \underline{s}_{i+1}^{ref} + \Phi(t_{i+1}, t_i)(\underline{s}_i^+ - \underline{s}_i^{ref}) \quad (10)$$

است.

$$\Phi(t_i, t_{i-1}) = I + F(t)(t_i - t_{i-1}) \quad (17)$$

که در این رابطه ماتریس I ، ماتریس همانی است. به منظور رسیدن به دقت (صحت)های بیشتر، باید علاوه بر اثر کپلری، اثر سایر نیروهای وارد بر ماهواره را نیز در نظر گرفت. در این تحقیق، ماتریس گذر کامل تری که از حل عددی معادله دیفرانسیل (۱۵) محاسبه می‌شود. با تعریف ماتریس دینامیکی (معادله ۱۷) و معادله دیفرانسیلی حرکت (معادله ۱) می‌توان معادله دیفرانسیلی ماتریس گذر را به صورت رابطه (۱۵) نوشت (تپلی و همکاران، ۲۰۰۴).

$$F = \left. \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} \right|_{S_0} \quad (18)$$

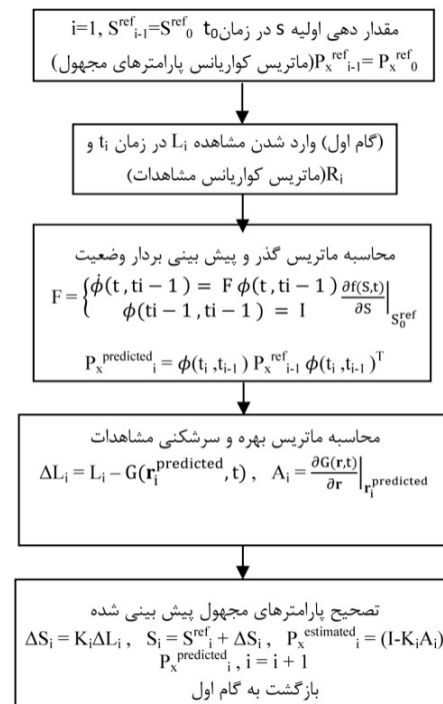
روش عددی حل انتگرال به کار رفته در این تحقیق رانگ کوتا مرتبه چهار است. علت این انتخاب، افزایش سرعت محاسبه انتگرال است (مانتن بروک و گیل، ۲۰۰۰).

۶ نتایج عددی

در این مقاله زوج ماهواره GRACE در حکم مورد تحقیقی، بررسی شد. زوج ماهواره GRACE محصول مشترک آلمان و آمریکا در ۱۷ مارس ۲۰۰۲ در مدار قرار گرفت (شکل ۳). این زوج ماهواره با فاصله اسمی ۲۲۰ کیلومتری از یکدیگر در ارتفاع اولیه ۴۸۵ کیلومتر از سطح زمین قرار واقع‌اند. مدار این زوج ماهواره، مداری قطبی (با میل ۸۹ درجه) و تقریباً دایره‌ای شکل است. مدت زمان یک گردش کامل این ماهواره بر گرد زمین در حدود ۹۰ دقیقه است. ماموریت اصلی این ماهواره عبارت است از (تپلی و ریگبر، ۲۰۰۱):

۱. تعیین میدان گرانی زمین و تغییرات ماهیانه آن
۲. تعیین میدان مغناطیسی زمین
۳. بررسی لایه یونسپهر و وردسپهر (ضریب شکست جو، دما و بخار آب در لایه وردسپهر و "مجموع کل الکترون های مسیر گذر" یا TEC در لایه یونسپهر).

در این تحقیق، بررسی مختصات به دست آمده از



همان‌طور که می‌دانیم این معادله دارای بی‌نهایت جواب است که با در نظر گرفتن شرط مرزی $\Phi(t_0, t_0) = I$ می‌توان به یک جواب یکه برای آن رسید. امروزه از روش‌های انتگرال‌گیری عددی برای محاسبه ماتریس گذر استفاده می‌شود.

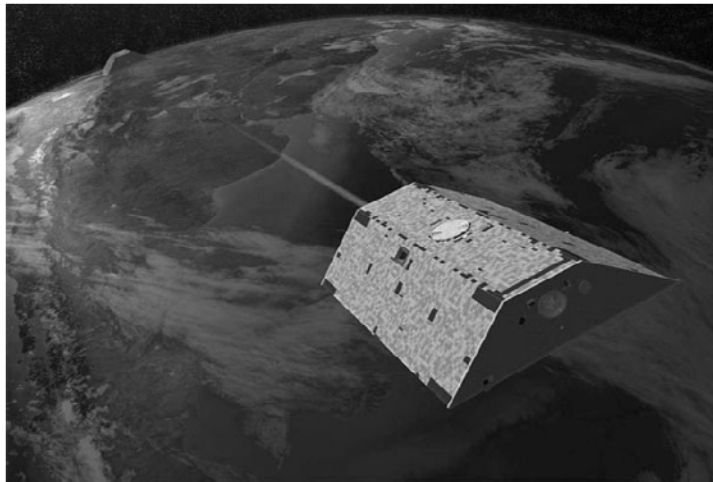
در مواردی که ماتریس دینامیکی F دارای ساختار پیچیده‌ای نباشد، می‌توان این دستگاه معادله را به صورت تحلیلی حل کرد و یک جواب تحلیلی برای ماتریس گذر به دست داد (والادو، ۲۰۰۷). با در نظر گرفتن جمله مرکزی میدان گرانی زمین (مسئله دوجسمی)، ماتریس دینامیکی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{GM}{r^3} - \frac{3GM}{r^5} x^2 & \frac{3GM}{r^5} xy & \frac{3GM}{r^5} xz & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3GM}{r^5} xy & \frac{GM}{r^3} + \frac{3GM}{r^5} y^2 & \frac{3GM}{r^5} yz & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3GM}{r^5} xz & \frac{3GM}{r^5} yz & \frac{GM}{r^3} + \frac{3GM}{r^5} z^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

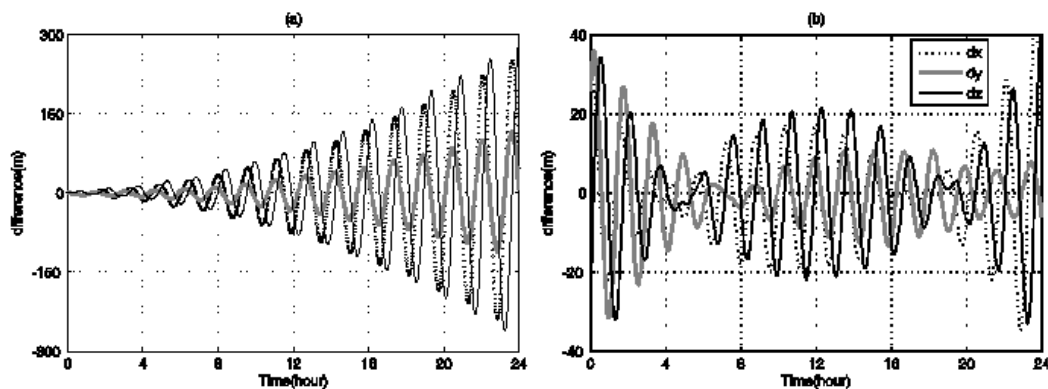
ماتریس گذر نیز به صورت تقریب از رابطه زیر قابل محاسبه

فیلتر کردن و بررسی روند بهبود کیفیت نتایج استفاده کرد. از این رو مدار مبنای بهینه برای مشاهدات واقعی زوج ماهواره GRACE تعیین شد و برای فیلتر کردن و بهبود مدار مشاهداتی زوج ماهواره GRACE مورد استفاده قرار گرفت که نتایج به دست آمده با مدار واقعی مقایسه شده است. اختلاف مدار مشاهداتی با مدار مبنای و مدار مبنای بهینه برای زوج ماهواره GRACE A&B در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است.

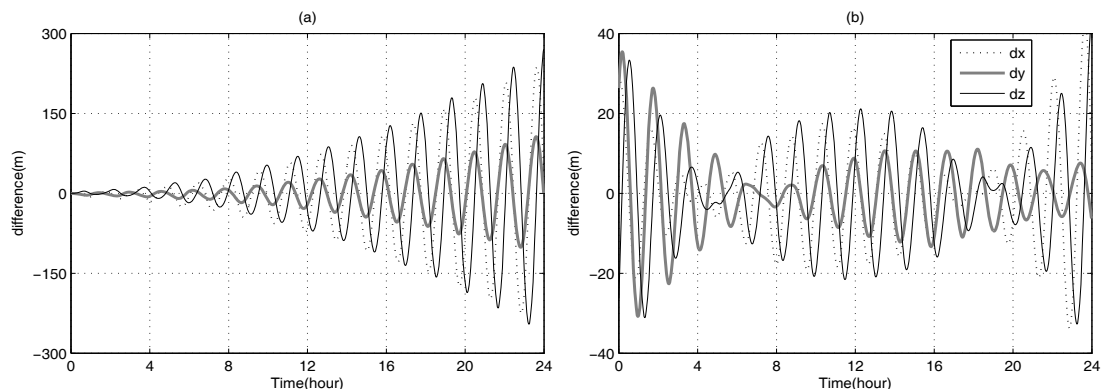
مشاهدات کُد GPS P در تاریخ ۱۳ نوامبر ۲۰۰۸ مورد نظر است. به منظور ارزیابی کیفیت، از مدار دینامیکی تبدیل یافته منتشر شده از سوی مرکز تحقیقات علوم زمین آلمان Zentrum Helmholtz center Forschungs Geo (GFZ) (Potsdam) در حکم مدار واقعی استفاده می‌شود. البته باید به این نکته توجه داشت که مدار واقعی هیچ‌گاه قابل دسترسی نیست اما از آنجا که این مدار دارای دقت (صحت) زیر دسی متر است، می‌توان از آن به منزله مبنایی در بررسی کیفیت مدار به دست آمده از فرایند



شکل ۳. زوج ماهواره GRACE (تپلی و ریگر، ۲۰۰۱).

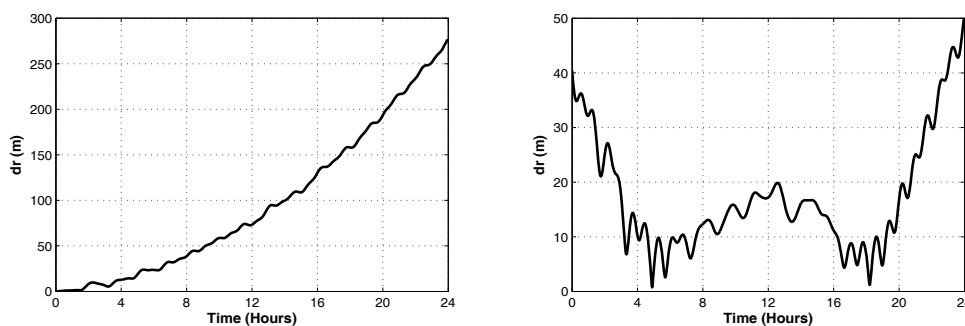


شکل ۴. اختلاف مدار مشاهداتی ماهواره GRACE-A با (a) مدار مبنای بهینه و (b) مدار مبنای اولیه.

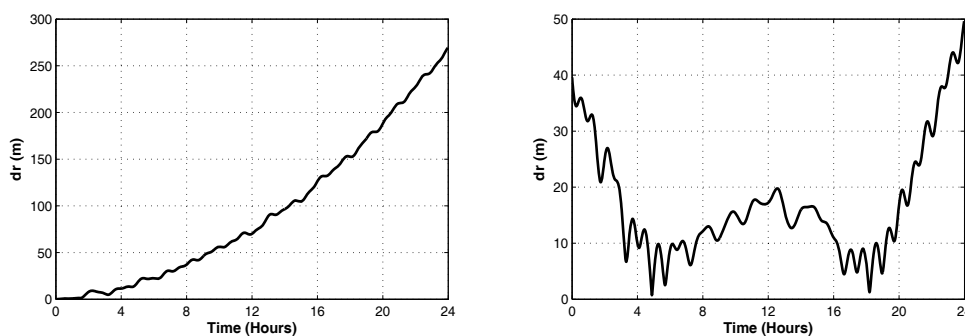


شکل ۵. اختلاف مدار مشاهداتی ماهواره GRACE-B با (a) مدار مبنای بهینه و (b) مدار مبنای اولیه.

علاوه بر اختلاف دو مدار در راستای محورهای دستگاه مختصات دکارتی لخت، اختلاف مدار مشاهداتی با مدار مبنای بهینه و اولیه ماهواره‌های GRACE A & B به صورت فاصله کلی نمایش داده شده است. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب نشان‌دهنده اختلاف مدارهای مبنای با مدار مشاهداتی ماهواره GRACE A و ماهواره GRACE B به صورت اختلاف کلی است.



شکل ۶. مجذور مربعات سه‌بعدی اختلاف مدار مشاهداتی ماهواره GRACE-A با (a) مدار مبنای بهینه و (b) مدار مبنای اولیه.



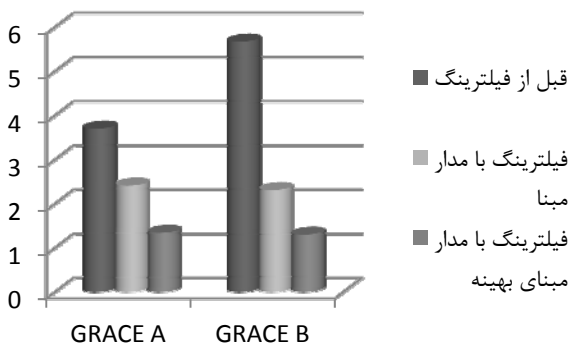
شکل ۷. مجذور مربعات سه‌بعدی اختلاف مدار مشاهداتی ماهواره GRACE-B با (a) مدار مبنای بهینه و (b) مدار مبنای اولیه.

جدول ۱. ویژگی‌های آماری اختلاف بین مدار واقعی و مدار مشاهداتی قبل و بعد از فیلتر کردن برای ماهواره GRACE A.

نوع مدار	σ_x	σ_y	σ_z	3D* RMS(m)
قبل از فیلتر کردن	1.92	1.59	2.73	3.70
فیلتر کردن با استفاده از مدار مبنا	1.61	0.66	1.66	2.41
فیلتر کردن با استفاده از مدار مبنای بهینه	0.63	0.57	1.0	1.34

*اندازه بردار سه‌بُعدی اختلاف‌ها

ماهواره بهبود می‌دهد. به عبارت دیگر در جدول‌های ۱ و ۲ می‌توان بهبود ناشی از افزایش دقت مقدار اولیه در فرایند فیلتر کردن را به خوبی مشاهده کرد، به نحوی که با افزایش دقت مقدار اولیه مدار فیلتر شده با دقت بیشتری در هر سه مولفه دکارتی و یا به صورت یکجا در اندازه بردار سه‌بُعدی اختلاف‌ها حاصل می‌شود.



شکل ۶. مجذور متوسط مربعات سه‌بُعدی برحسب متر.

همان‌طور که در این شکل‌ها واضح است، اختلاف مدار مبنا و مدار مشاهداتی با گذشت زمان به شکل قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. این در حالی است که اختلاف مدار مشاهداتی با مدار مبنای بهینه تقریباً به صورت یکنواخت باقی می‌ماند. در جدول‌های زیر ویژگی‌های آماری اختلاف بین مدار واقعی و مدار مشاهداتی قبل و بعد از فیلتر کردن برای ماهواره GRACE-A و GRACE-B نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های ۴b و ۵ ملاحظه می‌شود، خطای مدار مبنا به صورت تجمعی افزایش می‌یابد در صورتی که در شکل‌های ۴a و ۵ با تصحیح ds به بردار مقدار اولیه موقعیت مدار مبنا آن مدار مبنایی به دست آمده است که به صورت متوسط در کل مدت زمان ۲۴ ساعت حداقل اختلافات را با مدار واقعی داشته باشد.

افزایش کیفیت مدار دینامیکی تبدیل یافته‌ای که در تولید آن از مدار مبنای بهینه به جای مدار مبنا استفاده شده است کاملاً واضح است، به طوری که مجذور متوسط مربعات سه‌بُعدی (دستگاه مختصات دکارتی) را حدود یک متر برای این زوج

جدول ۲. ویژگی‌های آماری اختلاف بین مدار واقعی و مدار مشاهداتی قبل و بعد از فیلتر کردن برای ماهواره GRACE B.

نوع مدار	σ_x	σ_y	σ_z	3D RMS(m)
قبل از فیلتر کردن	4.19	2.90	2.49	5.67
فیلتر کردن با استفاده از مدار مبنا	1.61	0.72	1.49	2.31
فیلتر کردن با استفاده از مدار مبنای بهینه	0.71	0.67	0.85	1.30

- differenced GPS data, *Advances in Space Research*, **39**(10), 1612-1619.
- Kalman, R. E., 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of Basic Engineering*, Retrieved 2008-05-03, **82** (1), 35-45.
- Kalman, R. E., 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems, *transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, **82** (Series D), 35-45.
- Kroes, R., Montenbruck, O., Bertiger, W., and Visser, P. 2005, Precise GRACE baseline determination using GPS, *GPS Solutions*, **9**(1), 21-31.
- Mikhaeil, M. E. and Ackermann, F., 1967, *Observations and least squares*, Wiley, New York.
- Montenbruck, O. and Gill, E., 2000, *Satellite orbits: models, methods, and applications*. Berlin, Springer, 369 pages.
- Seif, M. R., Sharifi, M. A., Najafi Alamdari, M., 2011, Determination of the best-fitting reference orbit for a LEO satellite using the Lagrange coefficients, *Journal of Aerospace Science and Technology*, **8**(1), 1-8.
- Sharifi, M. A., 2006, *Satellite to satellite tracking in the space-wise approach*, Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Seeber, G., 2003 *Satellite geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin.
- Svehla, D. and Rothacher, M., 2005, Kinematic precise orbit determination for gravity field determination, in a window on the future of geodesy, edited by FSans`o, Springer, ISBN 3-540-24055-1, 181-188.
- Tapley, B. D., Schutz, B. E. and Born G. H., 2004, *Statistical orbit determination*, Elsevier Academic Press, ISBN 0-12-683630-2.
- Tapley B. D. and Reigber C., 2001 The GRACE mission: status and future plans, in *EOS, Transactions, AGU 2001; 82: Fall Meeting Supplement G41, C-02*.
- Vallado, D. A., 2007, *Fundamentals of astrodynamics and applications*, Third Edition, Published Jointly By Microcosm and Springer.
- Welch, G. and Bishop, G., 1995, *An introduction to the Kalman filter*, University of North Carolina, Department of Computer Science, TR 95-041.
- Wu, S. C., Yunck, T. P. and Thornton, C. L., 1991, Reduced-dynamic technique for precise orbit determination of low Earth satellites, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **14**(1), 24-30.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی، با ثابت فرض کردن میدان گرانی، مقدار اولیه را چنان تغییر دادیم که اختلاف مدار مینا و مشاهداتی کمینه شود. این مدار مینا را مدار مینای بهینه نامیدیم. بیشینه اختلاف مدار مینای بهینه از مدار مشاهداتی بعد از یک روز برای زوج ماهواره GRACE در حد ۴۰ متر است، درحالی‌که که این اختلاف برای مدار مینا حدود ۲۵۰ متر است. در این مقاله نشان داده شد که با استفاده از مقادیر اولیه دقیق‌تر (مدار مینای بهینه) می‌توان به خروجی با کیفیت‌تری در تعیین مدار دست یافت. با استفاده از مدار مینای بهینه به جای مدار مینا در الگوریتم فیلتر کالمن، 3D RMS مدار دینامیکی تبدیل یافته برای این زوج ماهواره حدود ۱ متر بهبود می‌یابد.

مراجع

- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., 1979, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Ballani, L., 1988, *Partielle Ableitungen und variationsgleichungen zur modellierung von satellitenbahnen und parameterbestimmung*, *Vermessungstechnik*, **36**(6), 192-194.
- Beutler, G., 2005, *Methods of celestial mechanics, application to planetary system*, *Geodynamics and Satellite Geodesy*, Springer, Berlin, **2, XVI**, 464 pp.
- Bisnath, S., 2004, *Precise orbit determination of low Earth orbiters with a single GPS receiver-based, geometric strategy*, Msc thesis, University of New Brunswick, Canada.
- Bock, H., 2003, *Efficient methods for determining precise orbits of low Earth orbiters using the global positioning system*, **65** of *Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Schweizerische Geodätische Kommission*, ISBN 3-908440-08-4.
- Brown, R. G. and Hwang, P. Y. C., 1997, *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*, 3rd ed., Wiley, New York, 401 pp.
- Jaggi, A., Hugentobler, U., Bock, H. and Beutler, G., 2007, *Precise orbit determination for GRACE using undifferenced or doubly*