

# ارائه یک مدل جدید ریاضی برای مسأله مسیریابی سرویس مدارس و حل آن توسط الگوریتم پیشنهادی

جعفر رزمی<sup>۱\*</sup> و ماریا یوسفی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>استاد دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها-پردیس دانشکده‌های فنی-دانشگاه تهران

<sup>۲</sup>دانش‌آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها-پردیس دانشکده‌های فنی-دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۹۰/۱۲/۶، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده ۹۱/۱/۲۷، تاریخ تصویب ۹۱/۷/۱)

## چکیده

مقاله حاضر در خصوص ارائه و حل یک مدل مسیریابی سرویس مدارس است. مسیریابی سرویس مدارس حالت خاصی از مدل مسیریابی است. در مدل ارائه‌شده، بر خلاف بسیاری از مدل‌های ریاضی مطرح‌شده در این زمینه، مکان‌یابی و مسیریابی ایستگاه‌ها، همزمان در نظر گرفته می‌شوند و خودروهای آن غیرهمگن هستند. از سوی دیگر به جای مکان‌یابی مدارس که در نقش مراکز توزیع عمل می‌کنند، ما سعی در مکان‌یابی ایستگاه‌های اتوبوس داریم که در مسئله مکان‌یابی - مسیریابی ساده از آن به عنوان مشتری یاد می‌شود. این موضوع خود منجر به تغییر محدودیت حذف زیر تور شده است. همچنین بر خلاف تعداد بیشتری از مقالات، حل مکان‌یابی - مسیریابی را به طور همزمان انجام می‌دهد. برای حل آن، از دو الگوریتم متاهوریستیکی جستجوی پراکنده و بازپخت شبیه‌سازی‌شده که بر اساس ویژگی‌های مسئله تا حدودی متعادل شده است، استفاده کرده‌ایم. در نهایت با مقایسه نتایج حاصل از حل الگوریتم‌های جستجوی پراکنده و بازپخت شبیه‌سازی‌شده و نتایج به دست آمده از مدل ریاضی که با GAMS کد شده است، به این نتیجه می‌رسیم که الگوریتم متاهوریستیکی جستجوی پراکنده با مقدار خطای بسیار پایین در مدت زمانی بسیار معقول‌تر جواب‌ها را به دست می‌آورد.

**واژه‌های کلیدی:** مکان‌یابی-مسیریابی، مسیریابی سرویس مدارس، الگوریتم جستجوی پراکنده، الگوریتم بازپخت

شبیه‌سازی‌شده، حمل و نقل چند منظوره، حمل و نقل تک منظوره

## مقدمه

سرویس مدارس (SBRP) در تلاش برای ایجاد یک زمانبندی کارا برای سرویس اتوبوس مدارس است، به طوری که اتوبوس، دانش‌آموزان را در ایستگاه‌ها سوار کرده و آنها را به مدارس‌شان می‌رساند. این در حالی است که باید محدودیت‌های مختلف نظیر حداکثر میزان ظرفیت اتوبوس، حداکثر زمان مجازی که دانش‌آموزان در اتوبوس سپری می‌کنند، پنجره زمانی مدرسه و غیره در نظر گرفته شده و لحاظ شوند. در این بخش تحقیقاتی را که روی SBRP انجام شده است مرور می‌کنیم. از زمانی که اولین مقاله در مورد SBRP توسط نیوتن و توماس [۱] منتشر شد، این مسئله به طور پراکنده مورد مطالعه قرار گرفت، اما هنوز یک رویکرد کارا برای مسئله SBRP نیاز است. در اغلب تحقیقات ارائه‌شده در مورد فرضیات و محدودیت‌هایی که با کمک آنها می‌توان دنیای واقعی را بیشتر توسط این مسئله شبیه‌سازی کرد بحث شده است؛ از این رو لی و فو [۲] به این نکته اشاره کرده‌اند که بیش از یک رویکرد برای مسئله SBRP وجود دارد. به علاوه،

مسائل مکان‌یابی و مسیریابی همواره از جمله مسائل پرکاربرد در بهینه‌سازی استفاده از منابع فیزیکی، انسانی و زمانی هستند که در موارد مختلف مورد استفاده عملی قرار گرفته‌اند. در حال حاضر به دلیل افزایش نرخ بنزین از سوئی و کمبود منابع فسیلی از سوی دیگر، مسائل مکان‌یابی - مسیریابی بیش از پیش می‌تواند به اقتصاد جامعه کمک کند. این در حالی است که با استفاده از این تحقیقات، می‌توان از حجم مسافرت‌های روزانه کم کرد تا با این کار، بار ترافیک کمتر شده و به کاهش آلاینده‌های خطرناک هوا که در کشور ما و بخصوص در شهر تهران بیش از حد مجاز است، کمک کرد. بنا بر کاربرد، در موارد گوناگون، شکل مسئله با حفظ کلیت آن تغییر خواهد کرد. یکی از انواع کاربرد آن، در زمینه مسیریابی ناوگان حمل و نقل مدارس است که از این پس آن را به اختصار <sup>۱</sup>SBRP می‌نامیم. این مسئله بسته به فرضیات مختلف در نظر گرفته شده، می‌تواند در چندین دسته قرار گیرد که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. به این ترتیب مسیریابی

و همکاران [۱۱] و دزروسیرز و همکاران [۶] همگی روش-های هیورستیکی بر اساس استراتژی LAR را پیشنهاد داده‌اند. در استراتژی ARL، دانش‌آموزان به خوشه‌هایی تقسیم می‌شوند، در حالی که محدودیت ظرفیت خودرو در شکل‌گیری این خوشه‌ها لحاظ می‌شود. در پی آن، ایستگاه‌های اتوبوس انتخاب می‌شوند و مسیری برای هر خوشه ایجاد می‌شود. در نهایت دانش‌آموزان هر خوشه (مسیر) به ایستگاه اتوبوسی که همه ملزومات داده‌شده در مسئله مانند حداکثر تعداد دانش‌آموزان مجاز که می‌توانند به یک ایستگاه تخصیص یابند، حداکثر میزان پیاده‌روی مجاز از خانه تا ایستگاه و کمترین فاصله بین دو ایستگاه، تخصیص می‌یابند. افرادی چون چاپلو و همکاران [۱۲] و باورمن و همکاران [۹] از الگوریتمی که بر اساس استراتژی ARL کار می‌کند، استفاده کرده‌اند.

اسچیتکات و همکاران [۱۳] به تازگی یک مدل ساده ریاضی را برای مکان‌یابی ایستگاه‌های اتوبوس و مسیریابی بین آن‌ها، در حالت تک مدرسه‌ای ارائه کرده‌اند. البته این مدل محدود به یک مدرسه است و فقط برای سایزهای کوچک تصادفی (۱۰ ایستگاه اتوبوس و ۵۰ دانش‌آموز) آزموده شده است. پس از این مرحله، در مرحله مسیریابی اتوبوس‌ها، مسیر اتوبوس برای رسیدن به هر مدرسه معین می‌شود. در بخش مسیریابی، مسیرهای بین ایستگاه‌های مدارس ایجاد می‌شود. مقالات زیادی در مورد ارائه مدل‌های ریاضی شامل مکان‌یابی و مسیریابی به طور همزمان و حل آن‌ها منتشر شده است (کریستف دو هامبل و همکاران [۱۴]، اسماعیل کاروگلان و همکاران [۱۵] و محمدحسین زرنندی [۱۶]). الگوریتم‌های مورد استفاده در قسمت مسیریابی را می‌توان به دو دسته اصلی شامل روش «ابتدا مسیریابی - بعد خوشه‌بندی» و روش «ابتدا خوشه‌بندی - بعد مسیریابی» تقسیم‌بندی کرد (بودین و برمن [۱۰]). در روش «ابتدا مسیریابی - بعد خوشه‌بندی» یک مسیر اصلی توسط الگوریتم مسئله فروشنده دوره‌گرد ایجاد می‌شود که در آن همه ایستگاه‌ها لحاظ می‌شود. سپس مسیر اصلی انتخاب‌شده به مسیرهای کوچک‌تری تقسیم می‌شود که در هر یک از آنها محدودیت‌های مورد نظر لحاظ می‌شود. افرادی چون نیوتن و توماس [۱] و بودین و برمن [۱۰] از مبتکران و تکمیل‌کنندگان این روش هستند و در حل مسئله خود از این ایده استفاده کردند.

آن‌ها این نکته را خاطر نشان کرده‌اند که بسیاری از رویکردهای موجود به ماهیت مسئله و مفروضات در نظر گرفته شده بستگی دارد.

در برخی موارد از مقالات منتشر شده در زمینه SBRP در مرور ادبیات‌های مسائلی که بسیار به آن شباهت دارند، استفاده می‌شود که از آن جمله می‌توان به مقالات نگاشته شده توسط بودین و همکاران [۳]، اسپادا و همکاران [۴] و جرف ویز و همکاران [۵] اشاره کرد. این مقالات از جمله مقالاتی هستند که در بسیاری موارد به آن‌ها استناد شده است.

مسایل SBRP شامل زیرمسئله‌های کوچک‌تری می‌شود. با توجه به تفکیکی که توسط دزروسیرز و همکاران [۶] انجام شد، می‌توان این مسئله را به پنج زیرمسئله تفکیک کرد: جمع‌آوری داده‌ها، مکان‌یابی ایستگاه‌های اتوبوس یا تخصیص دانش‌آموزان به ایستگاه‌ها، مسیریابی اتوبوس‌ها، تعدیل زمان شروع به کار مدارس و زمانبندی مسیرها. در مرحله جمع‌آوری داده‌ها، شبکه‌ای شامل موقعیت مکانی خانه‌ها، مدرسه، ایستگاه‌های اتوبوس تشکیل می‌شود و یک ماتریس مبدأ-مقصد بین آن‌ها مشخص می‌شود. ماتریس بین این نقاط، یک ماتریس خاص است. برای یک شبکه مشخص در مرحله بعدی که مرحله مکان‌یابی ایستگاه‌های اتوبوس است، از میان همه نقاط بالقوه، فقط یک سری به عنوان ایستگاه انتخاب می‌شوند و هر دانش‌آموز به یک ایستگاه تخصیص داده می‌شود. مسئله مکان‌یابی در بسیاری از مقالات به صورت یک مدل ریاضی کامل آورده شده است (هدا دریل و همکاران [۷]) رویکردهای حل هیورستیکی برای مکان‌یابی ایستگاه‌های اتوبوس به دو دسته اصلی شامل استراتژی LAR<sup>۲</sup> و استراتژی ARL<sup>۲</sup> تقسیم می‌شوند (لاپورت [۸] و باورمن و همکاران [۹]). استراتژی LAR ابتدا مجموعه‌ای از ایستگاه‌های اتوبوس برای یک مدرسه را مشخص می‌کند و بعد دانش‌آموزان را به این ایستگاه‌ها تخصیص می‌دهد. مسیرها برای این ایستگاه‌های انتخاب‌شده ایجاد می‌شود. در این روش، انتخاب مکان ایستگاه‌های اتوبوس و تخصیص دانش‌آموزان به این ایستگاه‌ها بدون توجه به اینکه این انتخاب‌ها تا چه حد می‌تواند بر مسیرهای ایجادشده تأثیر بگذارد، انجام می‌گیرد. این روش منجر به تولید تعداد بسیار زیادی از مسیرها می‌شود. افرادی چون بودین و برمن [۱۰] و دولاک

جدول ۱: دسته بندی مقالات موجود در زمینه SBRRP بر اساس خصوصیات مسأله

ناحیه مورد بررسی	سایز مسأله	محدودیت‌ها	توابع هدف	بدون تابع هدف	نوع لاگرانج	نوع حمل و نقل	حاصل و نقل	حاصل و نقل	شهری یا روستایی	تعداد مدارس	مرجع
غیر واقعی	۵۰ تا ۸۰۰ مسئله	C, MRT		HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۷]	تیوتن و تومس		
برتوود، نیجورک	۱۳۰۰۰ دانش آموز	C, MRT, TW	N	HO	خیر	شهری	چند مدرسه	[۱۰]	بودین و برین		
دروموندویل، کانادا	۵۸۵ دانش آموز، ۹۹ مسئله	C, MRT, MWT	N, TBD	HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۱۱]	جولاک و همکاران		
دروموندویل، کانادا	۱۶۰۰۰ دانش آموز	C, MRT, MWT	N, TBD	HO	خیر	هر دو	چند مدرسه	[۶]	دزوسیزو و همکاران		
تولسا، اکلاهما	۳۰۷۹ دانش آموز	C, MRT, MWT	N, SWD	HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۱۲]	چاپو و همکاران		
بارگوس، اسپانیا	۱۲۸ دانش آموز	C, MWT	N, SWD, LB	HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۹]	بارمین و همکاران		
هنگ کنگ	۸۳۸ مسئله، ۷۳ مدرسه	C, MRT, TW, EPT, MSN	N	HO	بله	شهری	چند مدرسه	[۱۷]	پراک و همکاران		
غیر واقعی	۵۵ مسئله	C	N, MRL	HO	خیر	روستایی	تک مدرسه	[۱۸]	کریبان و همکاران		
سوئزرلند	دانش آموز، ۵۴ مسئله ۸۶	C	N, TSD, TBD, LB	HT	خیر	شهری	تک مدرسه	[۷]	لی و فو		
المن	۵۰ دانش آموز و ۱۰ مسئله	C	TBD	HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۱۳]	اسچیکات و همکاران		
غیر واقعی	۵۱۹ دانش آموز	C, MRT	TBD, N	HO	خیر	شهری	تک مدرسه	[۱۹]	یکاشن و الماسین		
تیمبر کازو، استرالیا	۱۰۰۲ مدرسه	TW	N, TBD	HO	خیر	روستایی	چند مدرسه	[۲۰]	فانتو		

وجود دارد، اما ما بر جنبه‌های کاربردی این مسئله تمرکز می‌کنیم. جدول (۱) دسته‌بندی مقالات منتشرشده در این زمینه را بر اساس تابع هدف‌ها و محدودیت‌های در نظر گرفته شده نشان می‌دهد.

### مدل پیشنهادی

پیش‌فرض اولیه ما به این ترتیب است که یک سری از مدارس وجود دارند که متعلق به تعداد مشخصی از دانش‌آموزان است. هر مدرسه تعدادی ایستگاه بالقوه دارد که باید از میان این ایستگاه‌ها تعداد ایستگاه‌های مورد نیاز را که بتوانند همه دانش‌آموزان را سرویس‌دهی کنند انتخاب کرد. ممکن است برای یک دانش‌آموز مقدور باشد که به بیش از یک ایستگاه برود؛ در این صورت همه ایستگاه‌های پیش‌فرض باید مشخص باشند و در نهایت هر دانش‌آموز می‌تواند فقط و فقط به یک ایستگاه تخصیص یابد. مجموعه‌ای از خودروها که در این تحقیق غیر همگن نیز هستند در نظر گرفته شده است. این خودروها بر حسب ظرفیت‌شان باید به مدارس مختلف تخصیص یابند، به طوری که مجموع ظرفیت خودروهای تخصیص داده شده به آن مدرسه، کمتر یا مساوی با تعداد همه دانش‌آموزان مربوط به آن مدرسه باشد. نوع حمل و نقل دانش‌آموزان تک‌منظوره است؛ یعنی دانش‌آموزان مدارس مختلف نمی‌توانند در یک خودرو با هم باشند. در نهایت باید معلوم کرد که از میان خودروهای تخصیص‌یافته به هر مدرسه، چه خودرویی، کدام ایستگاه‌ها را زیر پوشش قرار می‌دهد و کوتاه‌ترین مسیر برای هر خودرو از مدرسه تا ایستگاه‌ها کدام است. لازم به ذکر است که این تور در نهایت با بازگشت خودرو به همان مدرسه مبدا کامل می‌شود.

مدل ریاضی پیشنهادشده در این تحقیق، در ادامه ارائه شده و در مورد محدودیت‌های آن نیز توضیحات لازم داده خواهد شد. این مدل بر اساس مدل<sup>۴</sup> VRP ساده ایجاد شده است و اساس آن بر مبنای مدلی است که اسپجیتکات و همکاران [۱۳] ارائه داده‌اند. در مدل آن‌ها فقط یک مدرسه در نظر گرفته شده بود که با مفروضات واقعی سنخیت ندارد؛ چرا که در عمل یک مسئله SBRP برای فقط یک مدرسه، حالت نامعقولی به حساب می‌آید. در ضمن در مدل آن‌ها خودروها به شکل همگن در نظر گرفته شده است که امکان ایجاد مسیرهایی را با تعداد کمی از

در روش «ابتدا خوشه‌بندی - بعد مسیریابی» گروه‌های دانش‌آموزان به خوشه‌هایی تقسیم‌بندی می‌شوند، به طوری که هر خوشه توسط مسیری که بتواند محدودیت‌های مربوطه را ارضاء کند، قابل سرویس‌دهی باشد. افرادی که این روش را به طور کامل برای اولین بار در SBRP به کار بردند، دولاک و همکاران [۱۱]، چاپلو و همکاران [۱۲] و باورمن و همکاران [۹] بودند. برای مشاهده جزئیات روش مورد نظر، می‌توانید کارهای انجام‌شده توسط دولاک و همکاران [۱۱] و لاپورت و اسمت [۸] در این باره را مشاهده کنید.

از دو مرحله آخر یعنی تعدیل و تنظیم زمان شروع به کار مدارس و زمانبندی مسیرها، برای اولویت‌بندی در حالت چند مدرسه‌ای استفاده می‌شود. ناوگان حمل و نقل اتوبوس مدارس اغلب برای مدارس واقع در یک منطقه مورد استفاده قرار می‌گیرد، نه برای یک مدرسه به تنهایی. به علاوه، اتوبوس‌ها بین چند مدرسه به اشتراک گذاشته می‌شود و به همین دلیل تنظیم ساعات باز و بسته شدن مدارس به همان اندازه زمانبندی اتوبوس‌ها می‌تواند مهم باشد. از جمله مقالات ارائه‌شده در این زمینه می‌توان به کرتز و همکاران [۲۲] اشاره کرد.

در اغلب رویکردهای حاضر، این زیرمسئله‌ها به طور جداگانه و سلسله‌مراتبی در نظر گرفته شده‌اند. اگرچه این زیرمسئله‌ها مستقل نیستند و بسیار به یکدیگر مرتبط هستند، اما به دلیل پیچیدگی و سائز مسئله، زیرمسئله‌های نامبرده را یکجا در نظر نمی‌گیرند. به علاوه اغلب فقط تعدادی از زیرمسئله‌های SBRP در نظر گرفته می‌شود. بخصوص تعیین مکان ایستگاه‌های اتوبوس و تنظیم ساعات باز و بسته شدن مدارس در اغلب موارد به سیاست مسئولان ناوگان حمل و نقل بستگی دارد. بسیاری از محققان، مدل‌های خود را با این فرض طراحی کرده‌اند که این اطلاعات باید از قبل در اختیار آن‌ها قرار گیرد.

اگرچه SBRP خودش به تنهایی یک مسئله واحد و مستقل است، اما هر یک از زیرمسئله‌های آن، یا ترکیبی از آن‌ها می‌تواند در دسته مسائل بهینه‌سازی موجود قرار گیرد.

در جدول (۱) سعی در دسته‌بندی مسئله SBRP بر اساس خصوصیات آن نوع خاص از مسئله SBRP داریم. اگرچه راه‌های زیادی برای دسته‌بندی انواع این مسئله

## مدل ریاضی

$$\min \sum_{i \in IUJ} \sum_{j \in IUJ} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in IUJ} x_{ijk} = \sum_{i \in IUJ} x_{jik} = y_{jk} \quad j \in IUJ, k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} w_{jlk} \leq Q_k \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in IUJ} x_{ijk} \leq 1 \quad j \in J \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq 1 \quad k \in K \quad (5)$$

$$u_{tk} - u_{ok} + \left( \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{jk} \right) x_{tok} = \left( \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{jk} \right) - 1 \quad (6)$$

$$t.o \in J, k \in K$$

$$Q_{ij} \geq z_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^K y_{jk} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^K w_{jlk} \leq S_{jl} \quad \forall j \in J, l \in L \quad (9)$$

$$-z_{ij} + \sum_{r \in IUJ} (x_{irk} + x_{rjk}) \leq 1 \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K \quad (10)$$

$$w_{jlk} \leq y_{jk} \quad \forall j \in J, l \in L, k \in K \quad (11)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} w_{jlk} = 1 \quad \forall l \in L \quad (12)$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, k \in K \quad (13)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in IUJ, i \neq j \quad (14)$$

$$w_{jlk} \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, l \in L, k \in K \quad (15)$$

$$u_{tk} \geq 0 \quad \forall t \in J, k \in K \quad (16)$$

$$z_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (17)$$

در این قسمت مدل ارائه شده بیشتر تشریح می شود. تابع هدف مسئله (۱) سعی در کمینه کردن مسافت پیموده شده توسط همه خودروها را دارد. می توان  $c_{ij}$  را از نوع هزینه نیز در نظر گرفت. محدودیت (۲) به ما این اطمینان را می دهد که اگر گره  $i$  توسط خودرو  $k$  سرویس دهی می شود، پس باید یک مسیر دوجانبه وجود داشته باشد که خودروی  $k$  وارد گره  $i$  شود و از این گره نیز خارج شود. محدودیت (۳) به ما اجازه نمی دهد که بیش از ظرفیت

دانش آموزان، از نظر اقتصادی غیرمنطقی می کند. در این مدل، ابتدا یک سری از ایستگاهها از میان همه ایستگاهها انتخاب می شوند، به صورتی که بتوانند همه دانش آموزان را زیر پوشش قرار دهند و سپس همه دانش آموزان به ایستگاههای مربوطه تخصیص می یابد، به طوری که هر دانش آموز فقط و فقط به یک ایستگاه تخصیص یابد و در نهایت، خودروهای تخصیص یافته به هر مدرسه مشخص می شوند. سپس کوتاهترین مسیر ممکن برای هر خودرو ایجاد می شود، به طوری که از مدرسه ای که از آن شروع به حرکت کرده است، به ایستگاههای مربوطه رفته و در نهایت به همان مدرسه مبدا بازگردد.

## پارامترها و متغیرها

$I$ : مجموعه همه مدارس

$J$ : مجموعه همه ایستگاههای بالقوه

$K$ : مجموعه همه خودروها

$L$ : مجموعه همه دانش آموزان

$N$ : تعداد مدارس

$C_{ij}$ : فاصله بین نقطه  $i$  و نقطه  $j, i, j \in IUJ$

$Q_k$ : ظرفیت خودروی  $k$

$z_{ij}$ : متغیر باینری نشان می دهد که دانش آموز  $i$  می تواند به ایستگاه  $j$  برود که در این صورت مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود.

$Q_{ij}$ : متغیر باینری است که اگر ایستگاه  $j$  متعلق به مدرسه  $i$  باشد، مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود.

متغیرهای تصمیم

$X_{ijk}$ : متغیر باینری است که مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود، در صورتی که از نقطه  $i$  به نقطه  $j$  از خودروی  $k$  (مسیر  $k$ ) برویم  $i, j \in IUJ$

$Y_{jk}$ : متغیر باینری است که مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود، در صورتی که خودروی  $k$  از ایستگاه  $j$  عبور کند و در غیر این صورت مقدارش صفر است.

$W_{jlk}$ : متغیر باینری است که مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود، در صورتی که دانش آموز  $l$  توسط خودروی  $k$  در ایستگاه  $j$  سوار خودرو شود.

$Z_{ij}$ : متغیر باینری است که مقدار آن برابر با ۱ خواهد بود، در صورتی که ایستگاه  $j$  برای مدرسه  $i$  به صورت بالفعل درآید.

$u_{tk}$ : متغیر کمکی برای محدودیت حذف زیر تور.

محدودیت‌های (۱۳) و (۱۴) و (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) نوع هر یک از متغیرها را نشان می‌دهند.

### روش حل مسئله

به طور کلی دو دیدگاه در حل مسائل مکان‌یابی و مسیریابی وجود دارد. در دیدگاه اول، با استفاده از روش‌های دقیق مانند شاخه و کران، برنامه‌ریزی پویا، برنامه‌ریزی عدد صحیح و برنامه‌ریزی غیرخطی، مسئله به صورت بهینه حل می‌شود. روش‌های حل تقریبی که به یافتن جواب‌های خوب و نه لزوماً بهینه می‌انجامد، در دیدگاه دوم دسته‌بندی می‌شوند. روش‌های ابتکاری و فراابتکاری در این دسته قرار می‌گیرند. روش‌های ابتکاری بر اساس نحوه مدل‌سازی رابطه میان زیرمسئله‌های مکان‌یابی و مسیریابی، به چند دسته تقسیم می‌شوند. یکی از پرکاربردترین روش‌ها، رویکردهای متوالی هستند. در این رویکرد، ابتدا مسئله مکان‌یابی - تخصیص بر اساس کمینه‌سازی فاصله مستقیم میان نقاط توزیع و مشتریان حل می‌شود و در ادامه، مسیرهای بازدید مشتریان تخصیصی به هر دپو تعیین می‌شود. در این روش‌ها، بازخوردی از مرحله مسیریابی به مرحله مکان‌یابی انجام نمی‌گیرد. همان‌طور که در مرور ادبیات به آن اشاره شد، کمتر مقاله‌ای یافت می‌شود که از روش‌های متاهوریستیکی در حل مسئله به شکل یکپارچه استفاده کرده باشد و بازخورد مسیریابی در بخش مکان‌یابی در نظر گرفته شده باشد. بر اساس تحقیقات انجام شده، از میان مقالاتی که توسط محقق مطالعه شده‌اند، فقط اسچیتکات و همکاران [۱۳] برای حل مسئله، به طور دقیق از خود مدل ریاضی مسئله، کمک گرفته‌اند و در بیشتر مواقع، حل بر اساس روش‌های دو مرحله‌ای ابتدا خوشه‌بندی و بعد مسیریابی یا روش حل ابتدا مسیریابی و سپس خوشه‌بندی انجام می‌شود. مطابق تعریف نگلی و سلهی [۲۱] مکان‌یابی یک مسئله NP-hard است. مطابق با مقاله لی و فو [۲] با در نظر گرفتن مسیریابی با مسئله مکان‌یابی به طور همزمان، پیچیدگی مسئله بسیار بیشتر می‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مسئله مکان‌یابی-مسیریابی یک مسئله NP-hard است. در این تحقیق سعی شده است از خود مدل ریاضی برای حل مسئله توسط دو الگوریتم متاهوریستیکی قوی استفاده شود که یکی دیگر از نوآوری‌های این مقاله به حساب

خودرو به دانش‌آموزان در ایستگاه‌های مختلف سرویس دهیم. محدودیت شماره (۴) این نکته را خاطر نشان می‌کند که هر ایستگاه، حداکثر از یک خودرو سرویس می‌گیرد و ممکن است برخی از ایستگاه‌ها جزو نقاط بهینه ما نباشند و در اصل هیچ خودرویی به آنها خدمت‌رسانی نکند. محدودیت (۵) به این موضوع توجه دارد که هر مسیر حداکثر می‌تواند یک بار سرویس‌دهی شود. محدودیت شماره (۶)، محدودیت حذف زیرتور است. از آنجا که این مسئله مشابه سایر مسائل مکان‌یابی-مسیریابی نیست، پس محدودیت حذف زیرتور به این شکل نوشته شده است. در سایر مسائل، مشتریان یا همان نقاط سرویس‌گیرنده ثابت فرض شده‌اند و دپوها یا نقاط سرویس‌گیرنده مکان‌یابی می‌شوند؛ در حالی که در این مسئله، مدارس که همان دپوهای سرویس‌دهنده ما هستند ثابت و مکان ایستگاه‌ها که همان مشتریان سرویس‌گیرنده هستند، متغیر در نظر گرفته شده‌اند. به عبارت دیگر، ایستگاه‌ها باید مکان‌یابی شوند. پس به جای استفاده از  $N$  که تعداد ثابت نقاطی است که مسیریابی برایشان انجام می‌گیرد، یعنی تعداد ثابت ایستگاه‌ها در این محدودیت از  $\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} y_{jk}$  استفاده می‌کنیم، که نشان‌دهنده تعداد ایستگاه‌های تحت سرویس‌دهی هستند. این محدودیت اولین بار است که به این شکل مورد استفاده قرار گرفته شده است. محدودیت (۷) ضامن تخصیص ایستگاه به مدرسه‌ای است که تخصیص این ایستگاه به مدرسه مربوطه بی‌اشکال تشخیص داده شده است. محدودیت (۸) نشان می‌دهد که هر ایستگاه می‌تواند حداکثر از یک خودرو خدمت بگیرد. محدودیت شماره (۹) نیز ضامن این نکته است که هر دانش‌آموز فقط باید یک بار از یک ایستگاه و توسط یک خودرو سرویس بگیرد. محدودیت (۱۰) نشان می‌دهد که ایستگاه  $z$  به مدرسه  $i$  تخصیص می‌یابد؛ اگر از ایستگاه  $z$  به مدرسه  $i$  مسیری وجود داشته باشد.

محدودیت (۱۱) زمانی به یک خودرو اجازه می‌دهد به ایستگاهی تخصیص یابد که دانش‌آموزی به آن ایستگاه تخصیص داده شده باشد (در حالتی که دانش‌آموزان یک ایستگاه انتخاب یا انتخاب‌های دیگری غیر از آن ایستگاه را نیز داشته باشند). محدودیت (۱۲) نشان می‌دهد که همه دانش‌آموزان باید سرویس‌دهی شوند. در نهایت

همان طور که در مدل ریاضی مشاهده می‌کنید، در این مدل چهار متغیر  $x, z, w, y$  وجود دارند که یکی بر اساس دیگری به دست می‌آید که در قسمت بهبود جواب‌ها از یک بهبود چهار مرحله‌ای استفاده شده است. چنانکه ابتدا  $Z$  به دست آمده را با 2-opt تغییر دهیم، بر اساس این تغییر سایر متغیرها نیز تغییر می‌کنند؛ چرا که سه متغیر دیگر بر اساس  $Z$  به دست می‌آیند.

اگر تغییر حاصله سبب بهبود تابع هدف شود، این تغییر حفظ شده و در غیر این صورت به حالت اولیه در می‌آید. وارد مرحله دوم بهبود می‌شویم؛ در مرحله بعد  $Z$  تغییری نمی‌کند، بلکه  $y$  بر مبنای 2-opt تغییر می‌کند. در نتیجه  $w$  و  $x$  که بر مبنای  $y$  و  $Z$  به دست می‌آیند، بر حسب تغییر  $y$  تغییر کرده و در صورت بهبود تابع هدف، بهبود آنها حفظ می‌شود. به این ترتیب، چرخه ذکرشده در مورد  $w$  و  $x$  اعمال می‌شود. به این ترتیب در هر بار استفاده از 2-opt یکبار  $z$  دوبار  $y$ ، سه بار  $w$  و چهار بار  $x$  بهبود می‌یابند.

برای به دست آوردن مجموعه مرجع از ۲۰٪ کل جواب‌ها استفاده شد که نصف آن‌ها بر اساس کیفیت جواب‌های حاصله و نصف دیگر آن نیز بر اساس پراکندگی جواب‌ها انتخاب می‌شوند. تابع پراکندگی که برای انتخاب نصف دوم مجموعه مرجع انتخاب شده است، به این صورت تعریف شده که بهترین جواب را به عنوان مرجع در نظر می‌گیریم و سپس آرایه‌های هر جواب در هر یک از ماتریس‌های  $x, z, w, y$  را با آرایه‌های مرجع همان ماتریس‌ها به صورت متناظر مقایسه کرده و در نهایت ۱۰ درصد از جواب‌هایی که حداکثر امتیاز را کسب کرده‌اند، به عنوان جواب‌های پراکنده در مجموعه مرجع قرار می‌دهیم. در بخش ترکیب جواب‌ها نیز از روش crossover یا همان ترکیب ماتریس‌ها در چهار مرحله استفاده شده است که باعث به دست آمدن جواب‌های بهتری شده است. لازم به ذکر است در این روش حل، با هر تغییر ایجادشده، شدنی بودن جواب در همان مرحله سنجیده می‌شود؛ چرا که به دلیل دویعدی بودن ماتریس‌های  $w$  و  $x$  با خارج شدن جواب‌ها از حالت شدنی، ادامه کار و شدنی کردن دوباره جواب‌ها بسیار زمان‌بر و مشکل است و سبب بالا رفتن زمان حل مسئله می‌شود.

می‌آید؛ چرا که مسئله به صورت یکجا و بر اساس مدل ریاضی آن حل شده است.

الگوریتم‌های در نظر گرفته شده، یکی الگوریتم جستجوی پراکنده یا Scatter Search (SS) است که می‌توان به نوعی آن را شکل تکامل یافته‌تری نسبت به الگوریتم ژنتیک دانست که لازم به ذکر است که این الگوریتم در مسائل مربوط به مسیریابی، جواب‌هایی به مراتب بهتر نسبت به الگوریتم ژنتیک کسب کرده است. الگوریتم دیگر بازپخت شبیه‌سازی شده یا Simulated Annealing (SA) است.

### نحوه عملکرد الگوریتم جستجوی پراکنده

الگوریتم جستجوی پراکنده، یکی از روش‌های تکاملی برای حل مسائل NP-hard است که اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط گلوور برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه شد. الگوی کلی الگوریتم جستجوی پراکنده به عنوان یک روش فراگیر برای حل مسائل NP-hard در سال ۱۹۹۸ توسط گلوور، مبنای همه اجزای الگوریتم جستجوی پراکنده قرار گرفت. این الگوریتم از ۵ فاز اصلی حل تشکیل شده است که در سال ۲۰۰۳ مارتی لاگورا این مراحل را به ترتیب مطرح کرد. این مراحل به این ترتیب هستند:

- ۱- Diversification Method: برای تولید گردایه‌ای از جواب‌های آزمایشی مختلف و پراکنده به کار می‌رود.
- ۲- Improvement Method: یک جواب آزمایشی را به یک یا چندین جواب آزمایشی بهتر (در همسایگی آن) در صورت وجود تبدیل می‌کند.
- ۳- Reference Set Update Method: روشی است برای ساختن و حفظ یک مجموعه مرجع شامل  $b$  تا از بهترین جواب‌های پیداشده (تعداد اعضای این مجموعه اغلب کوچک و کمتر از ۲۰ است). عضوهای این مجموعه بر اساس دو صفت کیفیت و پراکندگی انتخاب می‌شوند.
- ۴- Subset Generation Method: روشی است که روی مجموعه مرجع عمل کرده و زیرمجموعه‌ای  $r$  عضوی از عناصر مجموعه مرجع برای عمل ترکیب می‌سازد.
- ۵- Solution Combination Method: روشی است که یک زیرمجموعه جواب را گرفته و از ترکیب عناصر آن، جواب یا جواب‌های جدیدی به وجود می‌آورد.

جدول ۲: مقایسه جواب‌های به دست آمده از الگوریتم ارائه شده جستجوی پراکنده با جواب‌های دقیق

ردیف	تعداد دانش آموزان	تعداد خودروها	تعداد ایستگاه‌های بالقوه	تعداد مدارس	SA		SS		GAMS		خطا (%)
					تابع هدف	زمان (ثانیه)	تابع هدف	زمان (ثانیه)	تابع هدف	زمان (ثانیه)	
۱	۱۶	۲	۵	۴	۳۳۰	۰,۰۰۰۷۸	۳۳۰	۰,۰۰۰۴۵	۳۳۰	۰,۰۳	۰
۲	۲۵	۳	۶	۴	۴۸۰	۰,۰۰۶۱	۴۸۰	۰,۰۰۴۷	۴۸۰	۰,۰۹	۰
۳	۳۳	۴	۸	۴	۶۶۰	۰,۰۱۴۰	۶۶۰	۰,۰۱۵۰	۶۶۰	۱,۳۲	۰
۴	۴۵	۶	۱۱	۶	۱۲۹۰	۰,۰۹۱	۱۲۹۰	۰,۰۴۷	۱۲۹۰	۵,۳۹	۰
					۳۷۵۱	۱,۲۶					
۵	۶۵	۱۰	۱۷	۹	۸۱۲۷	۱۵,۱۲	۳۵۶۵	۰,۹	۳۴۹۵	۳۴۸	۱,۹
۶	۱۲۰	۱۹	۲۷	۱۲			۸۰۶۵	۱۲,۵۰	۷۹۲۵	۱۶۷۲۰,۱۵	۱,۷
۷	۱۷۵	۲۶	۳۶	۱۵	۱۱۷۵۱	۲۳,۱۲	۱۱۵۲۵	۲۳,۰۷۶	۱۱۱۸۵	۸۵۳۲۴,۵۷	۲,۰۱
۸	۲۱۵	۳۱	۴۲	۱۸	۲۰۸۵۲	۱۴۱,۳۴	۱۸۷۵۰	۱۲۰,۹۰۸	-	-	-
۹	۲۲۵	۳۵	۴۲	۱۹	۲۴۷۶۵	۱۵۶,۴۰۲	۲۰۳۳۵	۱۱۹,۰۰۶	-	-	-
۱۰	۲۴۰	۳۷	۴۹	۲۱	۲۹۵۷۱	۴۱۵,۷۶	۲۷۴۸۰	۳۳۴,۲۲۱	-	-	-

پراکنده در مثال شماره ۶، جواب را در زمانی معادل  $۰,۰۰۰۳$  زمان مورد نیاز نرم‌افزار GAMS به دست آورده است و برای مسائل شماره ۸ تا ۱۰ نرم‌افزار GAMS نتوانست جوابی را به دست بیاورد، اما الگوریتم جستجوی پراکنده تعدیل‌شده در زمان‌های بسیار معقول توانست جواب‌های دقیقی به دست آورد. همچنین متوسط خطا برای ۷ نمونه مسئله اول که هر دو روش حل جواب داده‌اند، برابر با  $۰,۰۰۸۱$  است. این میزان خطا با توجه به زمان‌های حل دو روش، بسیار ناچیز است. با توجه به موارد ذکرشده، کارایی الگوریتم جستجوی پراکنده تعدیل‌شده نسبت به روش‌های دقیق واضح است. همچنین با توجه به جدول (۲)، جواب‌های به دست آمده از الگوریتم جستجوی پراکنده پیشنهادی، هم از نظر زمان و هم از نظر کیفیت، جواب‌های مناسب‌تری نسبت به الگوریتم بازپخت شبیه‌سازی شده هستند.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا سعی کردیم مدل ریاضی بنیادی بر اساس مدل ساده VRP ارائه کنیم و بر خلاف اکثر مقالاتی که در زمینه SBRP مطرح شده است، از یک روش

پس از کد کردن مدل ریاضی توسط نرم‌افزار GAMS نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده توسط الگوریتم جستجوی پراکنده پیشنهادی و نیز الگوریتم بازپخت شبیه‌سازی شده مقایسه کردیم. نتیجه مقایسه جواب‌های به دست آمده از نرم‌افزار GAMS، با جواب‌های حاصل از الگوریتم جستجوی پراکنده پیشنهادی و الگوریتم بازپخت شبیه‌سازی شده را در جدول (۲) مشاهده می‌کنید.

همان طور که مشاهده می‌کنید، در جدول (۲) ۱۰ مسئله با اندازه‌های متفاوت در نظر گرفته شده است. ابعاد این مسئله را می‌توان هم با تغییر تعداد دانش‌آموزان و هم با تغییر تعداد ایستگاه‌ها و در نهایت با تغییر تعداد مدارس بزرگ، کوچک و یا متوسط در نظر گرفت. جواب‌های به دست آمده از روش الگوریتم جستجوی پراکنده تا مسئله شماره چهارم به طور دقیق برابر با جواب‌های دقیق حاصل از GAMS است و درصد خطا برابر با صفر شده است. از مسئله شماره پنج مثال‌ها به شدت NP-hard می‌شوند. جواب‌های حاصله با داشتن خطاهایی در حدود  $۰,۰۱۹$ ،  $۰,۰۱۷$  و  $۰,۰۲۱$  در مقایسه با جواب دقیق، جواب‌های بسیار خوبی هستند، چرا که باید به زمان حل جواب نیز دقت شود. الگوریتم جستجوی



بر اساس نتایج حاصل شده در جدول، مشاهده می‌شود که روش حل الگوریتم جستجوی پراکنده که در آن پاره‌ای تعدیلات و تغییرات متناظر با مسئله داده شده است، در مقایسه با روش حل دقیق آن و نیز در مقایسه با الگوریتم بازیخت شبیه‌سازی شده، با مقدار خطای بسیار پایین و در مدت زمانی بسیار معقول‌تر، جواب‌های بهینه را به دست آورده است.

از آنجا که مدل ریاضی مطرح شده، یک مدل اولیه و بنیادی است، می‌توان در پژوهش‌های بعدی، آن را توسعه داد؛ محدودیت‌هایی از جمله محدودیت پنجره زمانی و غیره اضافه کرد و یا حالت حمل و نقل را به صورت چندمنظوره در نظر گرفت و یا ساعت‌های بهینه شروع به کار مدارس را به دست آورد تا با کمترین تعداد خودرو، همه دانش‌آموزان را پوشش داد و یا این مسئله را برای حالت مدارس روستایی در نظر گرفت.

متاهیوریستیکی یکپارچه برای حل آن استفاده کرده‌ایم. بر اساس مرور ادبیاتی که توسط محقق انجام گرفته است، تاکنون در هیچ تحقیقی مکان‌یابی- مسیریابی مسائل SBRP را به طور همزمان توسط یک روش متاهیوریستیکی حل نکرده است. به دلیل حذف یارانه‌های مربوط به سوخت‌های فسیلی که بنزین نیز جزو آنها به حساب می‌رود و افزایش هزینه‌های حمل و نقل، ارائه چنین تحقیقاتی تا حد بسیار زیادی می‌تواند به اقتصاد جامعه کمک کند. از سوی دیگر موجب کمتر شدن بار ترافیک می‌شود؛ چرا که سبب کاهش حجم مسافرت‌های روزانه می‌شود. از جمله نوآوری‌های این تحقیق که در مدل ریاضی آن مشاهده می‌شود، تغییر محدودیت حذف زیرتور است؛ چرا که در این مدل، تعدادی از دپوها یا همان ایستگاه‌ها انتخاب شده است که همزمان با آن، مکان‌یابی آنها نیز اجرا می‌شود.

## مراجع

- 1- Newton, R.M. and Thomas, W.H. (1969). "Design of school bus routes by computer." *Socio-Economic Planning Science*, 3 (1), 75-85.
- 2- Li, L. and Fu, Z. (2002). "The School Bus Routing Problem: a case study." *Journal of the Operational research Society*, 58, 1642-1651.
- 3- Bodin, L.D. (1975). "A taxonomic structure for vehicle routing and scheduling problems." *Computers and Urban Society*, 1, 11-29.
- 4- Spada, M., Bierlaire, M. and Lieblich, Th.M. (2005). "Decision-aiding methodology for the school bus routing and scheduling problem." *Transportation Science*, 39.
- 5- Jozefowicz, N., Semet, F. and Talbi, E.G. (2008). "Multi-objective vehicle routing problems." *European Journal of Operational Research*, 189 (2), 293-309.
- 6- Desrosiers, J., Soumis, F., Desrochers, M. and Sauve, M. (1986b). "Methods for routing with time windows." *European Journal of Operational Research*, 23 (2), 236-245.
- 7- Houda, D., Bassem, J., Saïd, H. and Habib, C. (2012). "Genetic algorithm with iterated local search for solving a location-routing problem." *Journal of Expert Systems with Applications*, 39 (2012) 2865-2871.
- 8- Laporte, G. and Semet, F. (2002). Classical heuristics for the capacitated VRP. In: Toth, P., Vigo, D. (Eds.), *The Vehicle Routing Problem*. SIAM, Philadelphia, PA, PP. 109-128.
- 9- Bowerman, R., Hall, B. and Calamai, P. (2001). "A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: formulation and solution method." *Transportation Research Part A* 29 (2), 107-123.
- 10- Bodin, L.D. and Berman, L. (1979). "Routing and scheduling of school buses by computer." *Transportation Science*, 13 (2), 113-129.
- 11- Dulac, G., Ferland, J.A. and Forgues, P.A. (1980). "School bus routes generator in urban surroundings." *Computers and Operational Research*, 7 (3), 199-213.

- 12- Chapleau, L., Ferland, J.A. and Rousseau, J.M.(1985). "Clustering for routing in densely populated areas." *European Journal of Operational Research*, 20 (1), 48-57.
- 13- Schittekat, P., Sevaux, M. and Sorensen, K.(2006). A mathematical formulation for a school bus routing problem. In: Proceedings of the IEEE 2006 International Conference on Service Systems and Service Management, Troyes, France.
- 14- Christophe, D., Philippe, L., Christian, P. and Caroline, P.(2010). "AGRASP×ELS approach for the capacitated location-routing problem." *Journal of Computers & Operations Research*, 37 (2010) 1912 – 1923.
- 15- Ismail, K., Fulya, A., Imdat, K. and Berna, D. (2011). "A branch and cut algorithm for the location-routing problem with simultaneous pickup and delivery." *Journal of European Journal of Operational Research*, 211 (2011) 318–332.
- 16- Mohammad Hossein, F., Ahmad, H. and Soheil, D. (2011). "The multi-depot capacitated location-routing problem with fuzzy travel times." *Journal of Expert Systems with Applications*, 38 (2011) 10075–10084.
- 17- Braca, J., Bramel, J., Posner, B. and Simchi-Levi, D.(1997). "A computerized approach to the New York City school bus routing problem." *IIE Transactions*, 29, 693–702.
- 18- Corberán, A., Fernández, E., Laguna, M. and Martel, R.(2002). "Heuristic solutions to the problem of routing school buses with multiple objectives." *Journal of Operational Research Society*, 53, 427–435.
- 19- Bektas, T. and Elmastas, S. (2007). "Solving school bus routing problems through integer programming." *Journal of the Operational Research Society*, 58 (12), 1599–1604.
- 20- Fügenschuh, A. (2009). "Solving a school bus scheduling problem with integer programming." *European Journal of Operational Research*, 193 (3), 867–884.
- 21- Nagy, G. and Salhi, S. (2007). "Location-routing: Issues, models and methods (Invited Review)." *European Journal of Operational Research*, 177: 649-672.
- 22- Cortes, C.E., Matamala, M. and Contardo, C.(2011). "The pickup and delivery problem with transfers: formulation and a branch-and-cut solution method." *European Journal of Operational Research*, 200, 711-724.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- School Bus Routing Problem
- 2- Location-Allocation-Routing
- 3- Allocation-Routing-Location
- 4- Vehicle Routing Problem