

تأثیر روش‌های گوناگون مشتق‌گیری عددی در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی

مهروز خادمی^{۱*}، مهدی نجفی علمداری^۲ و محمدعلی شریفی^۳

^۱ کارشناس ارشد ژئودزی، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

^۲ دانشیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

^۳ استادیار، گروه مهندسی نقشه‌برداری، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۹/۶/۹، پذیرش نهایی: ۹۱/۷/۱۸)

چکیده

بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی به صورت ضرایب هماهنگ کروی با استفاده از مشاهدات ماهواره‌های اختصاصی گرانی‌سنجی، به روش‌های گوناگونی صورت می‌گیرد. در این مقاله برای بازیابی، از روش انتگرال انرژی استفاده شده است. در این روش، محاسبه بردار سرعت ماهواره برای بازیابی میدان جاذبه با استفاده از روش‌های مشتق‌گیری عددی ضروری است. روش‌های مشتق‌گیری نیوتن، اسپلاین و تیلور برای محاسبه مشتقات (بردار سرعت) به کار گرفته شده‌اند. مشاهدات دینامیکی شبیه‌سازی شده ماهواره GRACE در میدان متأثر از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 مورد استفاده قرار گرفته‌اند و با استفاده از روش‌های پیش‌گفته ضرایب ژئوپتانسیلی تا درجه و مرتبه ۷۰ بازیابی شده‌اند. همچنین تأثیر مشاهدات آلوده به اشتباه نیز در روش‌های مشتق‌گیری بررسی شده‌اند. در نهایت نتایج به صورت اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید و degree variance نسبت به ضرایب مدل EGM96 نمایش داده شده است. در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی، روش نیوتن بیشترین دقت را نشان داد.

واژه‌های کلیدی: بازیابی میدان جاذبه، روش انتگرال انرژی، ماهواره GRACE، مشتق‌گیری عددی

The effect of numerical differentiation methods on the earth's gravity field recovery

Khademi, M.¹, Najafi Alamdari, M.² and Sharifi, M. A.³

¹M.Sc. in Geodesy, Surveying and Geomatics Engineering Department, Faculty Engineering, K.N.Toosi University of Technology, Iran

²Associate Professor, Surveying and Geomatics Engineering Department, Faculty Engineering, K.N.Toosi University of Technology, Iran

³Assistant Professor, Surveying and Geomatics Engineering Department, Faculty Engineering, University of Tehran, Iran

(Received: 31 Aug 2010, Accepted: 09 Oct 2012)

Abstract

The recent dedicated satellite gravimetry missions have provided huge amount of high quality gravity data with global coverage. From computational point of view, estimation of the unknown gravity field parameters is a highly demanding task due to the sheer number of observations and the unknown coefficients. Different computational schemes have been proposed to tackle the problem. Since the early days of satellite geodesy, energy balance based methods for gravity field determination have been considered. If non-conservative forces are known the Hamiltonian along the orbit will be a constant function of the motion. Thus the gravity field can be determined if position and velocity

of the satellite are known and accelerometer measurements are available to model the non-conservative part. A satellite mission dedicated to the improvement of our knowledge of the earth's gravitational field with a direct (*in situ*) measurement system has been in the proposal stages for a long time and at several agencies. Of course, gravitational field knowledge comes also by tracking satellites from ground stations, and many long wavelength models of the field have been deduced from such data. But, these models derive from the observations of a large collection of satellites that have been tracked over various periods during the long history of earth-orbiting satellites, where none of these was launched for the expressed purpose of providing a global and detailed model of the gravitational field. The method has been applied in a close-loop simulation to the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) data and the achieved results show high performance of the proposed method. This article focuses on the development of new techniques for global gravity field recovery from high-low (hl) and low-low (ll) satellite-to-satellite tracking (SST) data. There are a number of approaches to global gravity field recovery known from literature, including the variational equations approach, short arc approach, energy balance approach and acceleration approach. The focus of the article is the energy balance approach with an aim to produce high-quality global gravity field models using simulated data from GRACE satellite missions. The GRACE mission has substantiated the low-low satellite-to-satellite tracking (LL-SST) concept. The LL-SST configuration can be combined with the previously realized high-low SST concept in the CHAMP mission to provide a much higher accuracy.

A new, rigorous model is developed for the difference of gravitational potential between two close earth-orbiting satellites in terms of measured range-rates, velocities and velocity differences, and specific forces. It is particularly suited to regional geopotential determination from a satellite-to-satellite tracking mission. Based on energy considerations, the model specifically accounts for the time variability of the potential in inertial space, principally due to earth's rotation. Analysis shows the latter to be a significant ($\sim 1\text{m}^2/\text{s}^2$) effect that overshadows by many orders of magnitude other time dependencies caused by solar and lunar tidal potentials. Also, variations in earth rotation with respect to terrestrial and celestial coordinate frames are inconsequential. Results of simulations contrast of the new model to the simplified linear model (relating potential difference to range-rate) and delineate accuracy requirements in velocity vector measurements needed to supplement the range-rate measurements. The numerical analysis is oriented toward the scheduled Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) mission and shows that accuracy in the velocity difference vector of 2–10–5 m/s would be commensurate within the model to the anticipated accuracy of 10–6 m/s in range-rate. A fast iterative method for gravity field determination from low Earth satellite orbit coordinates has been developed and implemented successfully. As the method is based on energy conservation and it avoids problems related to orbit dynamics and initial state. In addition, the particular geometry of a repeating orbit is exploited using a very efficient iterative estimation scheme, in which a set of normal equations is approximated by a sparse block-diagonal equivalent. Recovery experiments for spherical harmonic gravity field models up to degree and order 70 were conducted based on a 29-day simulated data set of orbit coordinates. The method was found to be very flexible and could be easily adapted to include observations of non-conservative accelerations, such as (to be) provided by satellites like CHAMP, GRACE, and GOCE.

So, calculation of velocity and acceleration vectors is a necessary stage in Earth's gravity field recovery using GRACE observations. Different numerical differentiation methods have been proposed to compute the acceleration vector. In this paper, Newton, spline and Taylor methods have been implemented. The effect of outliers has also been

investigated in different differentiation techniques. The numerical analysis of the recovered solutions shows that the Newton method yields the optimal solution. The comparison is performed based on the difference in the simulated and recovered gravity anomalies and the geoidal heights.

Key words: Outlier, Gravity, GRACE, Numerical differentiation

۱ مقدمه

روش رایج بازیابی میدان جاذبه از داده‌های مداری، انتگرال‌گیری عددی از معادلات حرکت است که با عنوان معادله‌های تغییرات (Variational equations) نیز شناخته می‌شود (ویگلگت، ۲۰۰۷). پارامترهای مدار و میدان جاذبه به صورت ترکیبی و به همراه هم مدل می‌شوند، بنابراین دستگاه معادلات نرمال بسیار بزرگ است که باید وارون شود (ریگبر، ۱۹۸۹). این روش بسیار پُرهزینه و وقت‌گیر است و نیاز به رایانه‌های بسیار کارآمد دارد.

هدف، رسیدن به دقت زیاد برای ضرایب پتانسیل میدان جاذبه زمین با استفاده از تفکیک مراحل تعیین مدار و بازیابی میدان جاذبه است. در مرحله اول، موقعیت‌ها و سرعت‌ها از مشاهدات GPS به دست می‌آیند (ویگلگت، ۲۰۰۷). در مرحله دوم، موقعیت‌ها و سرعت‌ها به پارامترهای میدان جاذبه مرتبط می‌شوند. این روش‌ها، روش‌های تناوبی بازیابی ضرایب هماهنگ‌کروی هستند که بر پایه مسئله مقدار مرزی بنا شده‌اند (مانند روش انتگرال انرژی) (هایسکنن و موریتز، ۱۹۸۴). مقادیر اختلاف پتانسیل بین دو ماهواره در مدار، با ترکیب داده‌های موقعیت، سرعت، شتاب و اختلاف فاصله دو ماهواره به دست می‌آید (جکلی، ۱۹۹۹). اختلاف پتانسیل محاسبه شده، در حکم مقادیر مرزی روی مرز مشخص (همان مدار) به شمار می‌روند. در نظر گرفتن این روش برای بازیابی میدان جاذبه از آغاز دوره پرتاب ماهواره‌ها صورت گرفت (اکیف، ۱۹۵۷). کاربرد این روش برای مأموریت‌های GRACE و CHAMP نشان داده شده است (ربلت و همکاران، ۲۰۰۳). این روش‌ها را گروه‌های

زیادی به کار برده‌اند. در این زمینه می‌توان به تحقیقات صورت گرفته (اکیف، ۱۹۵۷)، (ربلت و همکاران، ۲۰۰۳)، (دیتمار و وان در، ۲۰۰۴)، (گرلاچ و همکاران، ۲۰۰۳)، (هان و همکاران، ۲۰۰۲)، (هان، ۲۰۰۳)، (کلر و شریفی، ۲۰۰۵) و (اسنیو و همکاران، ۲۰۰۲) اشاره کرد.

برای بازیابی میدان گرانی به روش انتگرال انرژی، به سرعت ماهواره (مشتق اول بردار موقعیت) نیاز است. برای این منظور از روش‌های مشتق‌گیری عددی استفاده می‌شود. در زمینه روش‌های مشتق‌گیری عددی می‌توان به تحقیقات صورت گرفته (ویگلگت، ۲۰۰۷)، (جکلی، ۱۹۹۹)، (اکیف، ۱۹۵۷)، (اسنیو و همکاران، ۲۰۰۲)، (شریفی، ۲۰۰۶)، (ویگلگت و اسنیو، ۲۰۰۴) و (ولف، ۱۹۶۹) مراجعه کرد. بررسی تأثیر روش‌های گوناگون مشتق‌گیری عددی در بازیابی میدان گرانی هدف اصلی این مقاله است.

در راستای هدف مقاله، در بخش ۲ به روش انتگرال انرژی برای بازیابی میدان جاذبه اشاره شده است و در بخش ۳ نحوه بنا ساختن دستگاه معادلات با استفاده از روش کمترین مربعات بیان شده است. در بخش ۴ روش‌های مشتق‌گیری عددی بیان شده و در انتها در بخش ۵ نتایج عددی به منظور مقایسه و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ روش انتگرال انرژی در دستگاه مختصات‌های لخت

و دورانی

قانون دوم نیوتن تحت تأثیر میدان گرانی زمین در یک

دستگاه مختصات لخت به صورت زیر بیان می شود (دیتمار و کلس، ۲۰۰۲):

$$\ddot{X}^i = g^i + f^i, \tag{۱}$$

که در آن، بالا اندیس i ، نشان دهنده دستگاه مختصات لخت است. \ddot{X}^i بردار شتاب (مشتق دوم موقعیت نسبت به زمان)، g^i ، بردار گرانی و f^i نیروهای غیرپایستار مشاهده شده (از شتاب سنج‌های ماهواره) هستند. پس از اینکه انتگرال انرژی بر پایه معادلات لژاندر برای حرکت بیان شد (گرلاچ و همکاران، ۲۰۰۳)، انتگرال انرژی با انتگرال گیری مستقیم از رابطه بالا به دست آمد.

ابتدا ضرب داخلی بین بردار سرعت \dot{X}^i و بردار شتاب \ddot{X}^i را در دستگاه مختصات لخت به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\dot{X}^i \ddot{X}^i = \dot{X}^i \cdot g^i(X^i(t), t) + \dot{X}^i f^i, \tag{۲}$$

شتاب گرانی تابعی از موقعیت $X^i(t)$ (وابسته به زمان)، و زمان t است. سمت چپ معادله بالا به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \dot{X}^i \ddot{X}^i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{X}^i \cdot \dot{X}^i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{X}^i|^2 \right), \end{aligned} \tag{۳}$$

بردار جاذبه، گرادیان پتانسیل جاذبه V ، نسبت به بردار موقعیت است:

$$\begin{aligned} g^i(X^i(t), t) &= \nabla_{X^i} V(X^i(t), t) \\ &= \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial X^i}, \end{aligned} \tag{۴}$$

عبارت اول سمت راست رابطه (۲) با در نظر گرفتن رابطه (۴) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \dot{X}^i g^i(X^i(t), t) &= \dot{X}^i \cdot \nabla_{X^i} V(X^i(t), t) \\ &= \dot{X}^i \cdot \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial X^i}, \end{aligned} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن مشتق $V(X^i(t), t)$ نسبت به t ،

خواهیم داشت:

$$\frac{dV(X^i(t), t)}{dt} = \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial X^i} \frac{dX^i(t)}{dt} + \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t}, \tag{۶}$$

با توجه به اینکه $\dot{X}^i = \frac{d\dot{X}^i(t)}{dt}$ ، رابطه (۵) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \dot{X}^i \cdot g^i(X^i(t), t) &= \\ \frac{dV(X^i(t), t)}{dt} - \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{۷}$$

جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۲) منجر به رابطه زیر می شود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\dot{X}^i|^2 \right) &= \\ \frac{dV(X^i(t), t)}{dt} - \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t} + \dot{X}^i \cdot f^i. \end{aligned} \tag{۸}$$

با انتگرال گیری از رابطه (۸) نسبت به t خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\dot{X}^i|^2 &= V(X^i(t), t) - \\ \int_{t_0}^t \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t} dt + \int_{t_0}^t \dot{X}^i \cdot f^i dt + C, \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن، C ثابت انتگرال (ثابت انرژی سامانه) است. بنابراین، پتانسیل جاذبه در دستگاه مختصات لخت به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} V(X^i(t), t) &= \\ \frac{1}{2} |\dot{X}^i|^2 - \int_{t_0}^t \dot{X}^i \cdot f^i dt + \int_{t_0}^t \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t} dt - C. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

عبارت اول سمت راست، انرژی جنبشی است که برای به دست آوردن آن باید سرعت را محاسبه کرد، همچنین عبارت دوم بیان کننده اتلاف انرژی است. عبارت سوم انرژی ناشی از تغییرات زمانی میدان گرانی در دستگاه مختصات لخت است. اگر جسم فقط تحت تأثیر میدان گرانی زمین در خلأ سقوط آزاد داشته باشد، بدون دوران زمین و بدون تغییرات زمانی در میدان گرانی، عبارت‌های دوم و سوم حذف می شوند و معادله (۱۱) به صورت زیر تحویل می یابد:

باید از مشاهده دقیق و کلیدی ماهواره یعنی $(\dot{\rho})$ استفاده کرد. مدل تقریبی زیر در این خصوص در (گرلاچ و همکاران، ۲۰۰۳)، (نرم و همکاران، ۱۹۹۴) و (نرم، ۱۹۹۵) عرضه شده است:

$$V_{12} = V_1 - V_2 \approx |\dot{X}_1^i| \dot{\rho}_{12} \quad (13)$$

این مدل کامل نیست زیرا برای مثال، اثر دوران زمین روی تغییرات میدان جاذبه در این مدل در نظر گرفته نشده است. مدل‌های کامل‌تری را (دیتمار و کلس، ۲۰۰۲) و (لرچ و همکاران، ۱۹۹۶) عرضه کرده‌اند. در این مقاله از مدل معرفی شده در (دیتمار و کلس، ۲۰۰۲) که بر اساس اختلاف پتانسیل بین دو ماهواره بازآرایی شده، استفاده شده است. این مدل به صورت زیر است:

$$T_{12} = \left| \dot{r}_1^0 \right| \delta \dot{\rho}_{12} + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \delta VR_{12} \quad (14)$$

$$- \int_{t_0}^t (\dot{r}_2 \cdot f_2 - \dot{r}_1 \cdot f_1) dt - \delta C_{12},$$

که در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\dot{r}_2^0 - \left| \dot{r}_1^0 \right| e_{12}^0 \right) \cdot \delta \dot{r}_{12}, \\ v_2 &= \delta \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_{12}^0 - \left| \dot{r}_1^0 \right| \delta e_{12} \cdot \dot{r}_{12}, \\ v_3 &= \delta \dot{r}_1 \cdot \delta \dot{r}_{12}, \\ v_4 &= \frac{1}{2} \left| \delta \dot{r}_{12} \right|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta VR_{12} = \left\{ \begin{aligned} & \left(r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1 \right) \Big|_2 - \left(r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1 \right) \Big|_1 - \\ & \left(r_1^0 \dot{r}_2^0 - r_2^0 \dot{r}_1^0 \right) \Big|_2 + \left(r_1^0 \dot{r}_2^0 - r_2^0 \dot{r}_1^0 \right) \Big|_1 \end{aligned} \right\};$$

که در آن، اندیس 0، اشاره به کمیت میدان مرجع معلوم دارد و نماد δ ، اشاره به کمیت افزایشی بین میدان واقعی و میدان مرجع دارد.

۳ بازیابی میدان جاذبه زمین در مقیاس جهانی با

استفاده از روش کمترین مربعات

با استفاده از T_{12} به دست آمده در روابط قبلی می‌توان میدان جاذبه را به صورت ضرایب هماهنگ کروی به کمک روابط زیر مدل‌سازی کرد:

$$\frac{1}{2} \left| \dot{X}^i \right|^2 - V(X^i(t), t) = C = const.. \quad (11)$$

این بدان معنا است که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل (با علامت منفی) ثابت است و این همان اصل بقای انرژی است. علامت منفی در عبارت پتانسیل مربوط به تعریف پتانسیل و میدان است.

عبارت سوم رابطه (۱۰) ناشی از دوران زمین است که پتانسیل دورانی ناشی از دوران پتانسیل در دستگاه مختصات لخت نامیده شده است که با یک تقریب منطقی به صورت زیر خواهد بود (جکلی، ۱۹۹۹):

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial V(X^i(t), t)}{\partial t} dt \approx -\omega_e (x_1^i \dot{x}_2^i - x_2^i \dot{x}_1^i), \quad (12)$$

که در آن، ω_e ، سرعت دورانی زمین، $X^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ و $\dot{X}^i = (\dot{x}_1^i, \dot{x}_2^i, \dot{x}_3^i)$ است.

معادله انتگرالی رابطه (۱۰)، انتگرال انرژی نامیده می‌شود که در هر دستگاه مختصات اختیاری دیگر نیز قابل بیان است. روش انتگرال انرژی را می‌توان برای محاسبه پتانسیل گرانی در امتداد خط سیر هر ماهواره یا حتی هواپیمای حامل GPS، شتاب‌سنج و حس‌گرهای ارتفاع‌سنج نیز به کار برد (دیتمار و فان اک، ۲۰۰۴).

۲-۱ روابط انتگرال انرژی برای جفت ماهواره

روابطی که تاکنون برای روش انتگرال انرژی بیان شد، مربوط به مشاهدات تک‌ماهواره بود، اما کمیت مشاهداتی ماهواره GRACE، اختلاف پتانسیل بین دو ماهواره است (دیتمار و فان اک، ۲۰۰۴).

این کمیت از مشاهدات KBR ماهواره‌های GRACE و بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه مختصات لخت قابل محاسبه است. در واقع به منظور محاسبه اختلاف پتانسیل از مشاهدات ماهواره GRACE

$$u = (N_{\max} + 1)^2 \quad (19)$$

در فرایند بازسازی میدان جاذبه مقادیر ضرایب مرتبه صفر و یک را معلوم در نظر می‌گیریم و از فهرست مشاهدات خود حذف می‌کنیم. در نتیجه تعداد مجهولات به صورت زیر خواهد بود:

$$u = (N_{\max} + 1)^2 - 4 \quad (20)$$

اگر از دیدگاه هندسی به مسئله خود نگاه کنیم، دستگاه معادلات مربوط، قابل حل خواهد بود اگر $M \geq u$ باشد. با برآورده شدن این شرط فقط ضرایب هماهنگ مداری به خوبی قابل برآورد هستند چرا که مشاهدات ماهواره فقط در راستای عرض جغرافیایی (در راستای نصف‌النهارها) توزیع همگنی دارند.

با توجه به نظریه نمونه برداری shanon (کلر و شریفی، ۲۰۰۵) باید حداقل دو برابر بیشینه بسامد اندازه گیری باشد. زمانی که بسامد بیش از حد بسامد نایکوئیست (دو برابر بیشینه بسامد) باشد، تداخل سیگنال (aliasing) رخ خواهد داد. بنابراین برآورده کردن شرط نظریه نمونه برداری، برای بازیابی طیف کامل میدان جاذبه بسیار مهم و حیاتی خواهد بود (سانسو، ۱۹۹۰). مشکل دیگر که منجر به بازیابی نشدن کامل و صحیح میدان جاذبه با استفاده از روش کمترین مربعات می‌شود، جایگزینی حد بالای بسط یعنی ∞ با N_{\max} است. در واقع این جایگزینی باعث ایجاد نوع دیگری از تداخل سیگنال در برآورد ضرایب می‌شود (کلر و شریفی، ۲۰۰۵).

۴ روش‌های مشتق گیری عددی

۴-۱ روش تفاضل های محدود با استفاده از بسط

سری تیلور

فرض کنید تابع $f(x)$ به اندازه کافی مشتق پیوسته داشته باشد. بسط تابع $f(x)$ به سری تیلور به صورت زیر است:

$$T_{12}(r_1, \theta_1, \lambda_1, r_2, \theta_2, \lambda_2) = T_1(r_1, \theta_1, \lambda_1) - T_2(r_2, \theta_2, \lambda_2) \quad (16)$$

$$= \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_1) \cos m \lambda_1 \\ - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_2) \cos m \lambda_2 \end{array} \right\} \Delta C_{nm} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_1) \sin m \lambda_1 \\ - \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_2) \sin m \lambda_2 \end{array} \right\} \Delta S_{nm}$$

که در رابطه بالا پارامترها عبارتند از:

GM : حاصل ضرب ثابت جهانی جاذبه در جرم زمین،
 R : شعاع میانگین زمین، $(r_1, \theta_1, \lambda_1)$ و $(r_2, \theta_2, \lambda_2)$: مختصات کروی نقطه نقطه مشاهداتی ماهواره اول و دوم،
 \bar{P}_{nm} : تابع‌های نرمال شده لژاندر،
 $\Delta \bar{C}_{nm}$ و $\Delta \bar{S}_{nm}$: ضرایب هماهنگ‌های کروی نرمال شده از درجه n و مرتبه m هستند. در رابطه بالا داریم:

$$\Delta \bar{C}_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^{GRS80} & m=0, \quad n=2,4,6,8,10 \\ \bar{C}_{nm} & otherwise \end{cases} \quad (17)$$

$$\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm}$$

ضرایب هماهنگ کروی $\Delta \bar{C}_{nm}$ و $\Delta \bar{S}_{nm}$ مجهولات مسئله هستند که در یک فرایند سرشکنی به روش کمترین مربعات برآورد می‌شوند.

در نهایت برای هرکدام از مشاهدات ماهواره در هر راستا به یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر خواهیم رسید:

$$A_{M \times u} X_{u \times 1} = I_{M \times 1} \quad (18)$$

در رابطه‌ی بالا، M عبارت است از تعداد معادلات که همان تعداد نقاط مشاهداتی ماهواره است. در عمل بسط خود را باید در درجه و مرتبه‌ی خاصی مثل N_{\max} خاتمه دهیم. در نتیجه تعداد مجهولات به صورت زیر خواهد بود:

مشتقات فقط برای نقاط مرکزی محاسبه می‌شوند. معادلات زیر برای نمونه برای مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم نه نقطه ای داده می‌شوند:

$$hf^{(1)}(x_4) = \frac{1}{280}f(x_0) + \frac{4}{150}f(x_1) + \frac{1}{5}f(x_2) - \frac{4}{5}f(x_3) + \frac{4}{5}f(x_5) - \frac{1}{5}f(x_6) - \frac{4}{150}f(x_7) - \frac{1}{280}f(x_8) \quad (24)$$

$$hf^{(2)}(x_4) = -\frac{1}{1120}f(x_0) + \frac{1}{79}f(x_1) - \frac{1}{10}f(x_2) + \frac{4}{5}f(x_3) - \frac{121}{85}f(x_4) + \frac{4}{5}f(x_5) - \frac{1}{10}f(x_6) + \frac{1}{79}f(x_7) - \frac{1}{1120}f(x_8) \quad (25)$$

۳-۴ درون‌یابی اسپیلاین

همان‌گونه که ملاحظه شد در مشتق‌گیری نیوتنی مقادیر گسسته از تابع $f(x)$ در تعداد محدودی نقاط شبکه‌ای $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ داده شده‌اند. هدف محاسبه مشتقات تابع در نقاط شبکه است. همان‌طور که قبلاً بیان شد، تابع را می‌توان با یک چندجمله‌ای درجه n تقریب زد. به‌جای تقریب تابع به‌صورت یک می‌توان از n چندجمله‌ای تکه‌ای هر کدام از درجه m که در شرایط زیر صدق می‌کنند استفاده کرد (شریفی، ۲۰۰۶):

$$1- \text{ برای } x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ و } s(x) = s_i(x)$$

$$2- s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \text{ و } s_i(x_i) = f(x_i)$$

مشتقات تا مرتبه $(m-1)$ موجود و در نقاط گرهی شبکه پیوسته باشد.

$$s_i^{m-1}(x_i) = s_{i+1}^{m-1}(x_i) \quad (26)$$

تابع $s(x)$ ، تابع اسپیلاین از درجه m نامیده می‌شود. اسپیلاین مکعبی ($m=3$) مشهورترین شکل اسپیلاین است. در چنین حالتی $4n$ ضرایب مجهول برای n زیر فاصله داریم. بنابراین تعداد معادلات مشاهدات، $2n$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (21)$$

حل این معادله برحسب $f'(x)$ به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \dots \quad (22)$$

۲-۴ مشتق‌گیری به روش نیوتن

مسئله درون‌یابی یک‌بعدی معمولاً شامل برآورد تابع $f(x)$ با یک چندجمله‌ای $\tilde{f}(x)$ متناسب درجه n است که برحسب $f_i = f(x_i)$ به از $i=0,1,\dots,n$ به‌دست می‌آید. اگرچه چندجمله‌ای مزبور در شکل‌های مختلف بیان شود، این $n+1$ مقادیر مجزای تابع، یک چندجمله‌ای واحد را تعریف می‌کنند. به‌صورت مشابه، می‌توان تابع چند جمله‌ای را برای محاسبه مشتق تابع به کاربرد. در صورتی که مقادیر مشتقات در نقاط شبکه‌ای x_0, x_1, \dots, x_n موردنیاز باشد، نیازی به یافتن تابع چندجمله‌ای $f(x_i)$ نیست در این حالت خاص و برای اطلاعات با فاصله یکنواخت h ، k امین مشتق تابع $f(x)$ عبارت است از (شریفی، ۲۰۰۶):

$$f^{(k)}(x_i) = h^{-k} \sum_{j=0}^n a_{ij}^{ks} f(x_j) + o(h^s) \dots \quad (23)$$

که در آن، $f^{(k)}(x_i)$ ، مشتق مرتبه k ام تابع در نقطه شبکه‌ای x_i است، خطای برش (Truncation error)، $o(h^s)$ از درجه s است. با بیان اخیر، مشتق تابع به‌مثابه یک ترکیب خطی از مقادیر تابع در نقاط شبکه‌ای بیان می‌شود. بنابراین در صورتی که ضرایب a_{ij}^{ks} معین شده باشند، می‌توان به‌راحتی مشتق تابع را محاسبه کرد.

در عمل برای ارزیابی مشتقات هر نقطه از شبکه، پنجره‌ای متقارن به طول n ، در نظر گرفته می‌شود و

از روش‌های موجود، میدان جاذبه زمین را بازسازی کرد. از آنجا که حذف اثرات ناشی از نیروهای غیر از جاذبه زمین از روی داده‌های مشاهداتی واقعی ماهواره مشکل است و از جهت دیگر به دلیل اینکه هدف این مقاله، مقایسه روش‌های گوناگون مشتق‌گیری استفاده شده در بازیابی میدان جاذبه است، شبیه‌سازی داده‌ها با استفاده از روش‌های عددی تولید مدار (روش‌های انتگرال‌گیری عددی) است. به این صورت که با استفاده از نقطه اولیه‌ای که در برگیرنده توضیحات همراه داده‌ها آمده است، مدار را به صورت عددی در میدان جاذبه حاصل از ضرایب ژئوپتانسیلی EGM96 تا درجه و مرتبه ۳۰۰ تولید می‌کنند. خروجی تولید مدار به صورت عددی عبارت است از بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لخت که سپس با استفاده از روابط و تبدیل‌های لازم، بردار شتاب را نیز در دستگاه لخت به دست می‌آورند. داده‌های ماهواره‌های GRACE شامل زمان و بردارهای موقعیت و سرعت و شتاب در دستگاه لخت است. قالب داده‌ها در پروندهٔ مربوط به صورت زیر است:

$\ddot{z} \quad \ddot{y} \quad \ddot{x} \quad \dot{z} \quad \dot{y} \quad \dot{x} \quad z \quad y \quad x$ time
 بردارهای موقعیت و سرعت در دستگاه لخت با استفاده از روابط موجود و تبدیل‌های لازم به دستگاه مختصات کروی محلی ماهواره منتقل می‌شوند.

ابتدا با استفاده از روابط ذکر شده در قسمت‌های قبل و با استفاده از روش انتگرال انرژی، دستگاه معادلات با ابعاد ۸۶۴۰۰ معادله و ۵۰۳۸ مجهول تشکیل شده است. تعداد مجهولات در این حالت یکی بیشتر است و این مجهول اضافی مربوط به ثابت انرژی سامانه است که در فرایند برآورد ضرایب به‌منزلهٔ یک مجهول اضافی برآورد می‌شود. سپس برای تحلیل نتایج با استفاده از ضرایب برآورد شده و نیز با استفاده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰، ارتفاع ژئوئید روی یک مرتبهٔ منظم یک‌درجه در یک‌درجه در کل جهان به دست آمده است.

است. به علاوه، شرط پیوسته بودن مشتقات تا مرتبه دوم $(3-1=2)$ در نقاط شبکه‌ای داخلی $(n-1)$ تشکیل $2(n-1)$ معادله از نوع معادلات کانسترنیت یا تحمیل می‌دهد. بنابراین، می‌توانیم یک دستگاه خطی با $2n+2(n-1)$ معادله با $4n$ مجهول تشکیل دهیم. تابع‌های اسپیلاین مکعبی گوناگونی وابسته به چگونگی ثابت کردن دو شرط آزاد وجود دارد.

۴-۳-۱- اسپیلاین مکعبی طبیعی

اسپیلاین مکعبی تعریف شده با شرایط تحمیلی $s_1^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) = 0$ و $s_n^{(1)}(x_n) = f^{(1)}(x_n)$ می‌باشد که مشتقات مرتبه اول و دوم آن با تعیین ضرایب مجهول تعیین می‌شوند. برای تنظیم دستگاه خطی معادلات با شرط پیوستگی مشتق مرتبه دوم شروع می‌کنیم. چون تابع از درجه ۳ است، مشتق مرتبه دوم آن تابعی خطی است.

$$s_i^{(2)}(x) = a_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right) + a_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \quad (27)$$

برای $i = 0, 1, \dots, n-1$. بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} s_i^{(2)}(x_i) &= a_i \\ s_i^{(2)}(x_{i+1}) &= a_{i+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (28)$$

$$s_{i-1}^{(2)}(x_i) = s_i^{(2)}(x_i) = a_i$$

۵ نتایج عددی

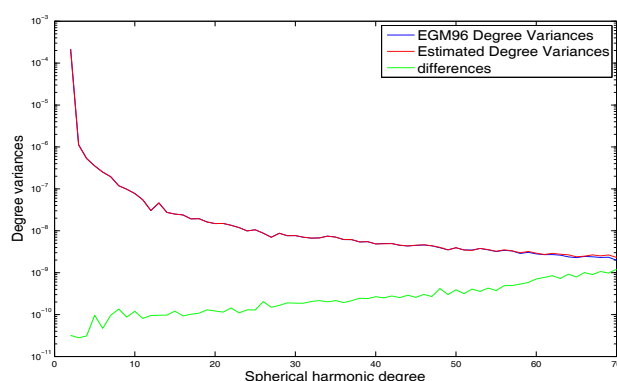
مدار شبیه‌سازی شده ماهواره‌ها یک مدار دینامیکی محاسبه شده از مدل ژئوپتانسیلی EGM96 است. علت انتخاب این حالت شبیه‌سازی مدار، این است که در بحث بازسازی میدان جاذبه زمین به صورت ضرایب ژئوپتانسیلی، ابتدا با استفاده از روش‌هایی سعی می‌کنند کل اثرات ناشی از نیروهای غیر از نیروی حاصل از میدان جاذبه زمین را از روی مشاهدات واقعی ماهواره تا حد امکان حذف کنند. با این کار مسیر ماهواره حدوداً تبدیل می‌شود به مسیری که فقط ناشی از نیروی حاصل از میدان جاذبه زمین است که در نهایتاً بتوان با آنالیز این مسیر و با استفاده

در زیر نتایج مربوط به بازیابی میدان جاذبه زمین با استفاده از روش‌های گوناگون مشتق‌گیری آورده شده و در انتها جدولی برای مقایسه نتایج عرضه شده است.

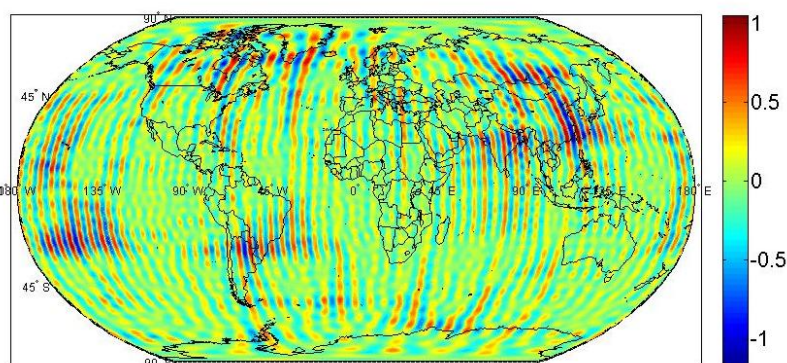
در شکل ۱ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت Degree Variance و تفاوت‌های مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۲ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ محاسبه شده و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

در شکل ۳ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت Degree Variance و اختلافات مربوط به این دو در حالت‌های متفاوت نمایش داده شده است. همچنین در شکل ۴ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

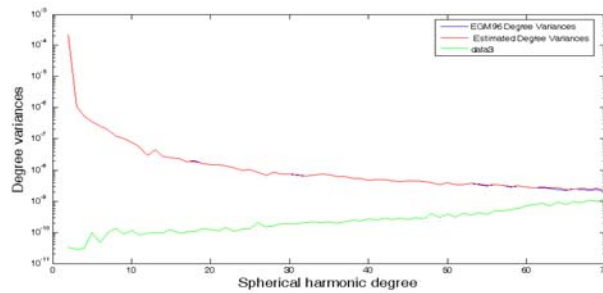
در شکل ۱ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت Degree Variance و تفاوت‌های مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۲ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است. در شکل ۲ که مربوط به بازیابی میدان جاذبه با روش انتگرال انرژی است بیشینه اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید برای روش نیوتن در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه



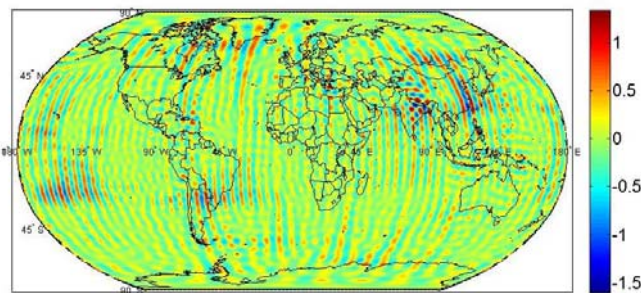
شکل ۱. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE (مشتقات با روش نیوتن محاسبه شده‌اند).



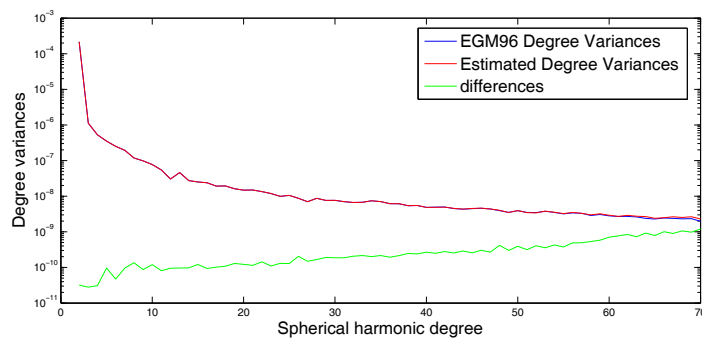
شکل ۲. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد بر حسب متر) (مشتقات با روش نیوتن محاسبه شده‌اند).



شکل ۳. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE (مشتقات با روش اسپلاین محاسبه شده‌اند).



شکل ۴. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب متر) (مشتقات با روش اسپلاین محاسبه شده‌اند).



شکل ۵. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE (مشتقات با روش تیلور ۷ نقطه‌ای محاسبه شده‌اند).

در شکل ۵ ضرایب برآورد شده و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree Variance و اختلافات مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۶ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدلد EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

بیشینه این اختلاف برای روش اسپلاین در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه $(\varphi, \lambda) = (88, 306)$ است که در مقایسه با شکل ۱ که مربوط به روش نیوتن است، بیشینه و کمینه اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید دقیقاً در نقاطی مشابه رخ داده است. بیشینه و کمینه این اختلاف ارتفاع در ایران به ترتیب 0.30 و -0.39 متر است.

جدول ۱. اطلاعات آماری مربوط به اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوئید برآورد شده با روش انتگرال انرژی و ارتفاع‌های ژئوئید به‌دست آمده از مدل EGM۹۶ برای مشاهدات بدون نوفه (واحد برحسب متر است).

روش	انحراف معیار	میانگین	بیشینه	کمینه
نیوتن	۰,۲۳۹۲	۰,۰۰۱۶	۱,۱۱۶۹	-۱,۱۸۵۸
اسپلاین	۰,۳۷۹۸	-۰,۰۰۱۶	۲,۲۱۳۰	-۲,۳۸۴۹
تیلور	۰,۲۵۰۲	-۰,۰۰۱۰	۱,۷۰۹۳	-۲,۱۷۵۹

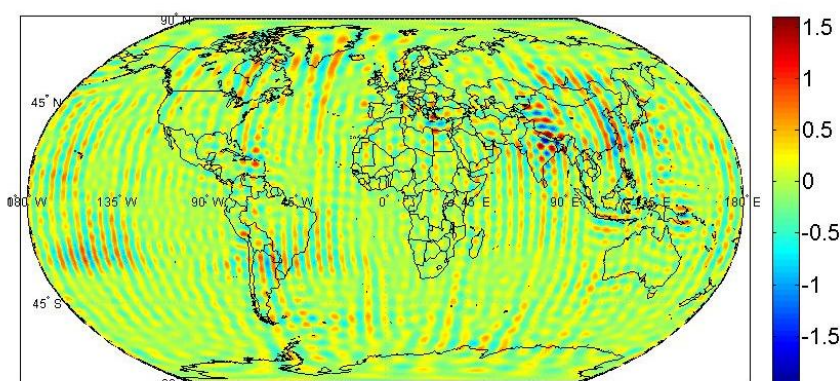
آمده از مدل EGM96 نشان داده شده است. با توجه به نتایج و شکل‌های عرضه شده برای روش انتگرال انرژی، روش نیوتن و سپس روش تیلور با داشتن انحراف معیارهای کوچک‌تر، بهترین نتایج را نشان داده‌اند و روش اسپلاین از نظر دقت در آخرین جایگاه واقع شده است.

۲-۵ نتایج مربوط روش انتگرال انرژی با داده‌های آغشته به اشتباه

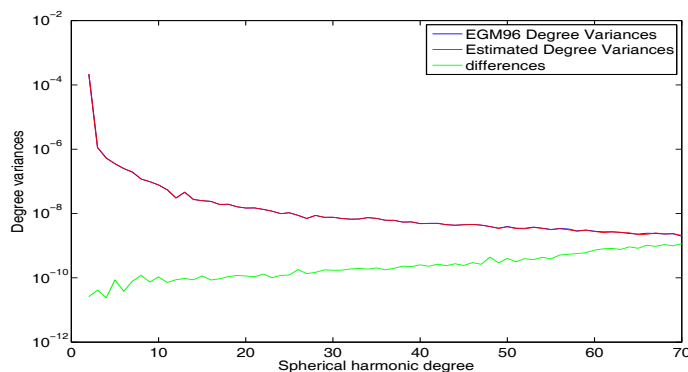
در این بخش حدود ده درصد مشاهدات اشتباه وارد شده‌اند تا تأثیر روش‌های مشتق‌گیری با وجود این مشاهدات اشتباه نیز بررسی شود. اشتباهات به اندازه ۱۰ سانتی‌متر هستند. شکل‌های مربوط به روش انتگرال انرژی آمده است. در انتها جدولی ترسیم شده است تا به راحتی بتوان نتایج را مقایسه کرد.

با توجه به شکل ۵ بیشینه اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید برای روش تیلور در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه $(\varphi, \lambda) = (119, 273)$ است. در مقایسه شکل ۵ با شکل‌های ۳ و ۱ که به ترتیب مربوط به روش نیوتن و اسپلاین هستند، بیشینه اختلاف در همان نقطه رخ داده درحالی‌که کمینه این اختلاف با دو روش پیش‌گفته متفاوت بوده و در نقطه $(\varphi, \lambda) = (119, 273)$ رخ داده است. بیشینه و کمینه این اختلاف ارتفاع در ایران به ترتیب 0.31 و -0.39 متر است.

جدول ۱ به منظور مقایسه تأثیر روش‌های مشتق‌گیری استفاده شده در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی آورده شده است. بدین منظور بیشینه، کمینه، میانگین و انحراف معیار اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید مربوط به هر یک از روش‌ها و ارتفاع‌های ژئوئید به‌دست



شکل ۶. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به‌دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد برحسب سانتی‌متر) (مشتقات با روش تیلور ۷ نقطه‌ای محاسبه شده‌اند).



شکل ۷. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE با استفاده از روش انتگرال انرژی (مشتقات با روش نیوتن محاسبه شده‌اند).

درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

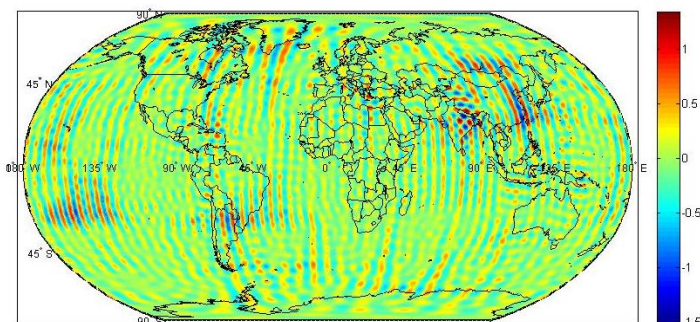
بیشینه این اختلاف برای روش اسپلاین در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه $(\varphi, \lambda) = (88, 306)$ است. در مقایسه این شکل با شکل ۷ که مربوط به روش نیوتن بود، بیشینه و کمینه اختلافات در نقاط مشابه رخ دادند. بیشینه و کمینه این اختلاف ارتفاع در ایران به ترتیب 0.35 و -0.43 متر است.

در شکل ۱۱ ضرایب برآورد شده برای داده‌های آغشته به نوفه و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree Variance و اختلافات مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۱۲ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

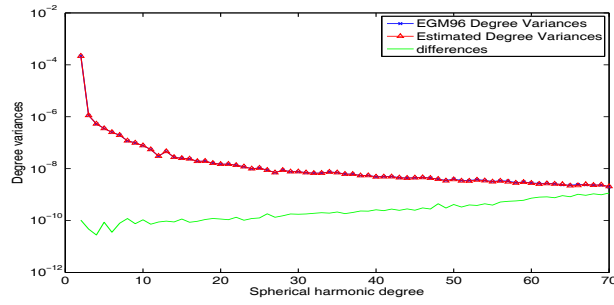
در شکل ۷ ضرایب برآورد شده برای داده‌های آغشته به نوفه و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree Variance و اختلافات مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۸ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ارتفاع‌های محاسبه شده از ضرایب برآورد شده به نمایش گذاشته شده است.

بیشینه این اختلاف برای روش نیوتن در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه $(\varphi, \lambda) = (88, 306)$ است. بیشینه و کمینه این اختلاف ارتفاع در ایران به ترتیب 0.35 و -0.42 متر است.

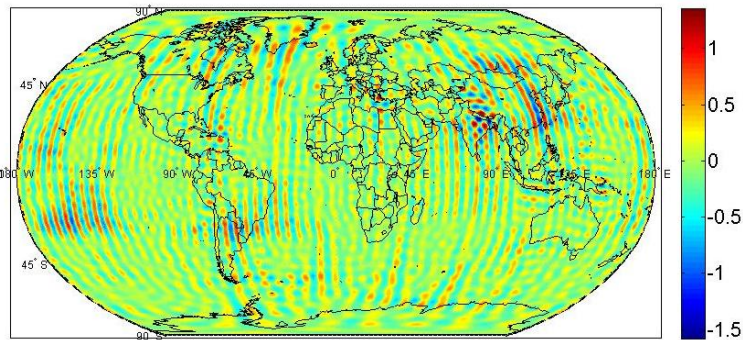
در شکل ۹ ضرایب برآورد شده برای داده‌های آغشته به نوفه و همچنین ضرایب EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ به صورت degree Variance و اختلافات مربوط به این دو به نمایش گذاشته شده است. همچنین در شکل ۱۰ اختلاف ارتفاع‌های ژئوئید محاسبه شده از ضرایب مدل EGM96 تا



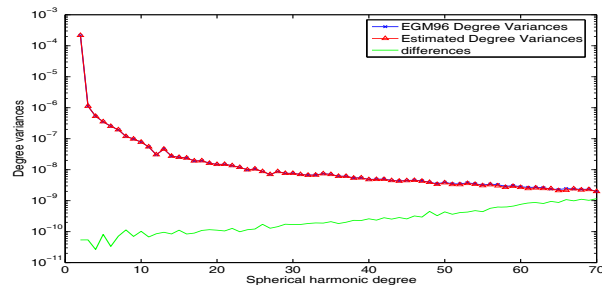
شکل ۸. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (مربوط به روش انتگرال انرژی که مشتقات با روش نیوتن محاسبه شده‌اند) (واحد بر حسب متر).



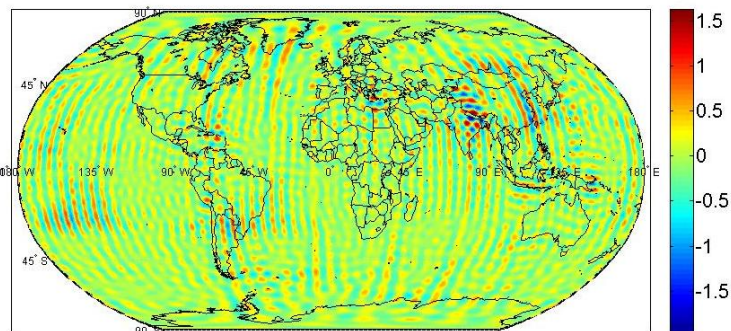
شکل ۹. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE با استفاده از روش انتگرال انرژی (مشتقات با روش اسپلاین محاسبه شده‌اند).



شکل ۱۰. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد بر حسب متر) (مربوط به روش انتگرال انرژی که مشتقات با روش اسپلاین محاسبه شده‌اند).



شکل ۱۱. ضرایب ژئوپتانسیلی برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از شبه‌مشاهدات ۳۰ روزه ماهواره GRACE با استفاده از روش انتگرال انرژی (مشتقات با روش تیلور محاسبه شده‌اند).



شکل ۱۲. اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 تا درجه و مرتبه ۷۰ و ضرایب برآورد شده تا درجه و مرتبه ۷۰ با استفاده از مشاهدات شبیه‌سازی شده ۳۰ روزه ماهواره GRACE (واحد بر حسب متر) (مربوط به روش انتگرال انرژی که مشتقات با روش تیلور محاسبه شده‌اند).

جدول ۲. اطلاعات آماری مربوط به اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوئید برآورد شده با روش انتگرال انرژی و ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM۹۶ برای داده‌های آلوده به اشتباه (واحد بر حسب متر).

روش	انحراف معیار	میانگین	بیشینه	کمینه
نیوتن	۰.۲۶۰۸	۰.۰۰۲۳	۱.۴۲۳۳	-۱.۰۵۷۶۶
اسپلاین	۰.۴۴۷۳	-۰.۰۰۱۹	۲.۴۴۱۵	-۲.۶۰۴۴
تیلور	۰.۲۹۸۴	-۰.۰۰۲۸	۱.۷۵۶۲	-۲.۹۹۴۹

به دست آمده از مدل EGM۹۶ به ترتیب برای مشاهدات بدون نوفه و مشاهدات آغشته به اشتباه می‌باشند، می‌توان نتایج را بررسی نمود.

با توجه به جدول ۱ و شکل‌های عرضه شده برای روش انتگرال انرژی، به ترتیب روش نیوتن و سپس روش تیلور با داشتن انحراف معیارهای کوچک‌تر، بهترین نتایج را نشان داده‌اند و روش اسپلاین از نظر دقت در آخرین جایگاه واقع شده است.

با توجه به جدول ۲ در بازیابی به روش انتگرال انرژی برای داده‌های آغشته به اشتباه، روش نیوتن بیشترین دقت را با داشتن کمترین انحراف معیار داشته است و پس از آن به ترتیب روش تیلور و در انتها روش اسپلاین بیشترین دقت را نشان دادند. بنابراین با توجه به نتایج ارائه شده در این مقاله، در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی بهترین روش مشتق‌گیری عددی، روش نیوتن می‌باشد که البته این نتیجه مختص روش انتگرال انرژی می‌باشد و ممکن است در بازیابی میدان جاذبه به روش‌های دیگر با نتایج متفاوتی روبرو شد. به عنوان پیشنهاد می‌توان روش‌های دیگری مانند ویولت و کالمن فیلترینگ را برای مشتق‌گیری مورد مطالعه قرار داد.

منابع

- Ditmar, P. and Klees, R., 2002, A method to compute the earth's gravity field from SGG/SST data to be acquired by the GOCE satellite, (http://www.geo.tudelft.nl/fmr/publicationspresentations/delftuniversitypress/book_GOCE_data_inversion.pdf), Delft University Press, Delft.
- Ditmar, P., van Eck van der Sluijs, A. A., 2004, A technique for modeling the earth's gravity field

بیشینه این اختلاف برای روش تیلور در نقطه $(\varphi, \lambda) = (90, 306)$ و کمینه این اختلاف در نقطه $(\varphi, \lambda) = (119, 273)$ است. در مقایسه شکل ۱۱ با شکل‌های ۹ و ۷ که به ترتیب مربوط به روش نیوتن و اسپلاین هستند، بیشینه اختلاف در همان نقطه رخ داده در حالی که کمینه این اختلاف با دو روش پیش‌گفته متفاوت بوده و در نقطه $(\varphi, \lambda) = (119, 273)$ رخ داده است. بیشینه و کمینه این اختلاف ارتفاع در ایران به ترتیب 0.36 و -0.42 متر است.

جدول ۲ به منظور مقایسه تأثیر روش‌های مشتق‌گیری استفاده شده در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی آورده شده است. بدین منظور بیشینه، کمینه، میانگین و انحراف معیار اختلاف میان ارتفاع‌های ژئوئید مربوط به هر یک از روش‌ها و ارتفاع‌های ژئوئید به دست آمده از مدل EGM96 نشان داده شده‌اند.

با توجه به جدول بالا در بازیابی به روش انتگرال انرژی برای این داده‌ها، روش نیوتن بیشترین دقت را با داشتن کمترین انحراف معیار داشته است و پس از آن به ترتیب روش تیلور و در انتها روش اسپلاین بیشترین دقت را نشان دادند. بنابراین در بازیابی میدان جاذبه به روش انتگرال انرژی بهترین روش مشتق‌گیری عددی روش نیوتن است.

۶ نتیجه‌گیری

برای بازیابی ضرایب هارمونیک کروی میدان جاذبه از مشاهدات بدون نویز و نیز مشاهدات آغشته به نویز ماهواره GRACE از روش انتگرال انرژی استفاده شد. با توجه به جداول ۱ و ۲ که نشان دهنده اختلاف بین ارتفاع‌های ژئوئید برآورد شده با روش انتگرال انرژی و ارتفاع‌های ژئوئید

- Suppl., American Geophysical Union, 31-33.
- O Keefe, J. A., 1957, An application of Jacobi's integral to the motion of an earth satellite, *Astron. J.*, **62**(1252), 265-266.
- Reigber, Ch., 1989, Gravity field recovery from satellite tracking data. In F. Sansò and R. Rummel eds. *theory of satellite geodesy and gravity field determination*, Lecture Notes in Earth Sciences, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, **25**, 197-234.
- Reubelt, T., Austen, G. and Grafarend, E. W., 2003, Harmonic analysis of the earth's gravitational field by means of semi-continuous ephemerides of a low earth orbiting GPS-tracked satellite, Case study: CHAMP, *Journal of Geodesy*, doi 10.1007/s00190-003-0322-9, **77**, 257-278.
- Sansò, F., 1990, On the aliasing problem in the spherical harmonic analysis, *Bulletin Géodésique*, **64**, 313-330.
- Sharifi, M. A., 2006, Satellite to satellite tracking in the space-wise approach, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- Sneeuw, N. J., Gerlach, C., Svehla, D. and Gruber, C., 2002, A first attempt at time-variable gravity recovery from CHAMP using the energy balance approach (<http://olimpia.topo.auth.gr/gg2002/session3/sneeuw.pdf>). In: Tziavos In (ed) Proc 3rd Meeting of the International Gravity and Geoid Commission, Thessaloniki, August, 26-30.
- Weigelt, M. and Sneeuw, N., 2004, Numerical velocity determination and calibration methods for CHAMP using the energy balance approach, 5-9.
- Weigelt, M. L., 2007, Global and local gravity field recovery from satellite-to-satellite tracking, PhD dissertation, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary.
- Wolff, M., 1969, Direct determination of gravitational harmonics from low-low gravsat data, *J. Geophys. Res.*, **88**, 10309-10321.
- on the basis of satellite accelerations, *J. Geodesy*, **78**(1-2), 12-33.
- Gerlach, C., Sneeuw, N., Visser, P. and Svehla, D., 2003, CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach, (available at: <http://www.copernicus.org/egu/adgeo/2003/1/adg-l73.pdf>), *Adv Geosci*, **1**, 73-80.
- Han, S. C., Jekeli, C. and Shum, C. K., 2002, Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP, *Geophys Res Lett*, **29**(16), 36.1-36.4.
- Han, S. C., 2003, Efficient global gravity determination from satellite to satellite tracking (SST) Rep 467, Department of Geodetic Science, the Ohio State University, Columbus.
- Heiskanen, W. A. and Moritz, H., 1984, *Physical geodesy*, Institute of Physical Geodesy Technical University Graz, Austria, 19-26.
- Jekeli, C., 1999, The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking, *Celestial Mechanics and Dynamical Astromomy*, **75**, 85-101.
- Keller, W. and Sharifi, M. A., 2005, Satellite gradiometry using a satellite pair, *J. Geodesy*, **78**, 544-557.
- Lerch, J. A., Marshall, S. M., Klosko, N., Pavlis, K. and Williamson, R. G., 1996, The joint gravity model-3, *Journal of Geophysical Research*, **101**(B12), 28029-28049.
- Nerem, R. S., Lerch, F. J., Marshall, J. A., Pavlis, E. C., Putney, B. H., Tapley, B. D., Eanes, R. J., Ries, J. C., Schutz, B. E., Shum, C. K., Watkins, M. M., Chan, J. C., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Patel, G. B., Pavlis, N. K., Williamson, R. G., Rapp, R. H., Biancale, R. and Nouel, F., 1994, Gravity model development for TOPEX/POSEIDON: Joint gravity models 1 and 2, *Journal of Geophysical Research*, **99**(C12), 24421-24448.
- Nerem, R. S., 1995, Terrestrial and planetary gravity fields, U. S. National Report to IUGG, 1991-1994, compiled by the NASA/Goddard Space Flight Center, *Reviews of Geophysics*,