

استفاده از فضای بدون توپوگرافی برای حل مسئله مقدار مرزی استوکس-هلمرت

مهدی گلی^{۱*}، مهدی نجفی علمداری^۲ و پتر ونیچک^۳

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود، ایران

^۲ دانشیار، گروه هیدروگرافی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، ایران

^۳ استاد، دانشکده ژئودزی و ژئوماتیک، دانشگاه نیوبرانزویک، کانادا

(دریافت: ۸۸/۸/۵، پذیرش نهایی: ۹۰/۱۱/۱۱)

چکیده

تعیین ژئوئید به روش استوکس نیازمند انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی به سطح ژئوئید دارد. در غیاب جرم‌های بالای ژئوئید انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی با انتگرال پواسون میسر است. استفاده از تحکیم توپوگرافی و جوّ روی ژئوئید یک روش مناسب برای حذف توده بالای ژئوئید است. با این حال به علت ایجاد لایه با چگالی بسیار سنگین سطحی روی ژئوئید این فضا نرم نیست و بی‌هنجاری‌های جاذبی هلمرت حاوی بسامدهای زیاد ناشی از تراکم توپوگرافی‌اند. در این تحقیق استفاده از فضای بدون توپوگرافی (مدل اصلی بوگه) و مسئله مقدار مرزی متناظر با آن طرح شده است. همچنین برای گریز از اثرات غیرمستقیم بزرگ ناشی از به هم خوردن تعادل هم‌ایستایی پوسته زمین، بعد از انتقال رو به پایین از حل مسئله مقدار مرزی استوکس-هلمرت استفاده شده است. نتایج ما در تعیین ژئوئید در ایران در مقایسه با ژئوئید حاصل از GPS-levelling نشان می‌دهد که استفاده از فضای بدون توپوگرافی، روش هلمرت را بهبود می‌بخشد. دقت نسبی و مطلق حاصل از ژئوئید به روش استوکس-هلمرت برابر ۴۶ سانتی‌متر و برای روش استوکس هلمرت با استفاده از فضای بدون توپوگرافی برابر با ۴۵ سانتی‌متر است.

واژه‌های کلیدی: استوکس-هلمرت، تعیین دقیق ژئوئید، انتقال رو به پایین، بوگه، فضای بدون توپوگرافی

Formulation of Stokes-Helmert boundary value problem using no topography space

Goli, M.¹, Najafi-Alamdari, M.² and Vaníček, P.³

¹Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

²Associate Professor, Faculty of Marine Science and Technology, Islamic Azad University, North Tehran Branch, Tehran, Iran

³Professor, Department of Geodesy and Geomatics Fredericton, NB, New Brunswick University, Canada

(Received: 27 Oct 2009, Accepted: 31 Jan 2012)

Abstract

To solve the geodetic boundary-value problem the gravity anomalies have to be continued from the Earth's surface down onto the geoid surface. Helmert's gravity anomalies (multiplied by the geocentric radius) are harmonic above the geoid. It is thus possible to use them in the Poisson solution of the inverse Dirichlet boundary value problem to get their values on the geoid. The downward continuation (DWC) of Helmert gravity anomalies has raised some criticism, however, originating from the suspicion that the anomalies, even though they are smoother than free-air and Faye anomalies, are still too rough to yield a reasonably good solution particularly for denser grid of gravity anomalies.

No topography (NT) space is the gravity Earth's field after the removal of the

gravitational effect of the all masses above geoid. Vaníček et al., 2003 proposed the Spherical Complete Bouguer Anomaly (SCBA) as a 3D solid gravity anomaly that is suitable for DWC. The SCBA is a harmonic and smooth function that conforms to an accurate and stable downward continuation. The topography above the geoid contributes toward the high frequency portion of the free-air gravity anomaly on the Earth surface. By contrast, the SCBA is a smooth function because it is already corrected for the topographical effect. Hence, the Bouguer anomaly, especially the SCBA, is much smoother with attenuated high frequency content, compared to the Helmert anomaly.

By the nature of the Downward Continuation (DWC) process, which amplifies high frequencies, the SCBA is better suited (Heck, 2003). However, in contrast to the Helmert anomaly (a free-air type), the SCBA involves the disturbed isostatic equilibrium of the crust on the mantle because of the removal of the topographical effect. This phenomenon results in a powerful low frequency content in the SCBA and a large indirect effect (PITE), ultimately amounting to a few hundred meters which is detrimental to the accuracy of the geoid solution. To reduce the large effect to a few decimeters, the SCBA on the geoid is transformed back to the Helmert space.

In this paper we formulate the Stokes-Helmert BVP using No topographical space and SCBA in a three space scenario.

1. transforming the observed gravity anomaly on the terrain to the NT space on the same position,
2. downward continuation of the SCBA anomalies from the observation positions to the geoid level,
3. transforming the SCBA on the geoid to the Helmert space,
4. evaluation of the co-geoid using the generalized Stokes integral,
5. transforming the co-geoid back to the geoid. i.e., from Helmert's space to the real space by applying the PITE.

In theory, all different reductions yield the same result in geoid determination. We compared the geoid by NT deduced Stokes-Helmert method and geoid by Stokes-Helmert method in Iran. The long wavelengths part of geoid up to degree and order 180/180 is determined using the EGM08 model. As external evidence, the two gravimetric geoids were compared to the geometric GPS-levelling solution at 213 points. The RMS of differences between two geoids and GPS-levelling data are 46cm without any applying correction surface. However, the RMS of difference between two geoid models is about 4cm and it can be reached up to 1.67meter in mountainous area.

Key words: Stokes-Helmert, Precise geoid determination, Downward continuation, Bouguer, No topography space

۱ مقدمه

مسئله تعیین ژئوئید را دارا باشد مورد نیاز است. این فضا باید تا حد امکان به فضای فیزیکی زمین واقعی نزدیک باشد، به طوری که امکان برگشت به فضای واقعی بعد از حل مسئله مقادیر مرزی وجود داشته باشد. ونیچک و مارتینک (۱۹۹۴) فضای هلمرت را براساس تحکیم توپوگرافی روی ژئوئید (مدل دوم تحکیم هلمرت) عرضه کردند. از ویژگی‌های این فضا حذف اثر جاذبی توپوگرافی و جو، حفظ تعادل هم‌ایستایی و امکان

در تعیین ژئوئید به روش جاذبی کمیت مشاهداتی شتاب جاذبه در سطح زمین است که معمولاً به صورت بی‌هنجاری‌های جاذبه هوای آزاد در فایل‌های اطلاعاتی عرضه می‌شود. استفاده از روش استوکس نیاز به حذف اثرات جاذبی توده بالای ژئوئید (شامل توپوگرافی و جو) و انتقال بی‌هنجاری‌های جاذبی روی ژئوئید (مرز) دارد. در اینجا یک فضای مدل که شرایط ریاضی لازم برای

می گیریم. کمیت قابل مشاهده برای تعیین ژئوئید جاذبی اندازه شتاب گرانی g و ارتفاع ارتومتریک H (فاصله سطح ژئوئید در راستای خط شاغولی تا سطح زمین) برای نقاط روی زمین است. فرض ما این است که کلیه اثرات جاذبی دیگر اجسام آسمانی روی شتاب گرانی ناچیز باشد. مسئله مقادیر مرزی غیرخطی با مرز آزاد برای تعیین پتانسیل گرانی در خارج و داخل توپوگرافی از حل معادله دیفرانسیل پواسون میسر است (مارتینک، ۱۹۹۸).

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \Omega \in \Omega_0, r(\Omega) \geq r_g \\ \Delta W(r, \Omega) = 4\pi G \rho + 2\omega^2 \\ \left. \begin{array}{l} |\nabla W(r, \Omega)|_{r=r_i} = g(r_i, \Omega) \\ W(r_g, \Omega) = W_0 \\ W(r, \theta) = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2(\theta) + \frac{GM}{r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{array} \right\} \quad (1) \\ r \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

که در اینجا، Ω زاویه فضایی زمین مرکز مربوط به نقطه (θ, λ) ، G ثابت گرانش، ω سرعت زاویه‌ای زمین، W_0 پتانسیل ژئوئید، θ متمم عرض زمین مرکز (عرض کروی) و M جرم زمین مقادیر معلومی دارند. r_i شعاع زمین مرکز نقطه مشاهداتی در سطح زمین و $r_g(\Omega)$ شعاع زمین مرکز ژئوئید و مجهول است. براساس معادله آخر، میدان در بی‌نهایت کروی است. در غیاب توده جرم بالای ژئوئید و حذف میدان گریز از مرکز معادله دیفرانسیل (۱) تبدیل به معادله دیفرانسیل لاپلاس می‌شود که جواب آن یک تابع هماهنگ (هارمونیک) است و لذا می‌توان از خواص توابع هماهنگ استفاده کرد. با حذف توپوگرافی و جو میدان پتانسیل جاذبی بدون توپوگرافی (NT) به دست می‌آید:

$$W^{NT}(r, \Omega) = W(r, \Omega) - V^T(r, \Omega); \quad (2)$$

$$\begin{aligned} V^T(r, \Omega) \\ = G \int_{\Omega_0} \int_{r_g(\Omega')}^{r_g(\Omega') + H(\Omega')} \frac{\rho(r', \Omega')}{L(r, \psi, r')} r'^2 dr' d\Omega', \end{aligned} \quad (3)$$

برگشت دقیق به فضای واقعی زمین است. بی‌هنجاری‌های هلمرت در سطح زمین تقریباً خصوصیتی نظیر بی‌هنجاری‌های هوای آزاد دارند. اثرات جاذبی محلی توپوگرافی در این بی‌هنجاری‌ها وجود دارد که نوعاً بسامدهای زیاد هستند. با توجه به خاصیت تقویت نوفه و بسامدهای زیاد در فرایند انتقال رو به پایین، انتقال رو به پایین این بی‌هنجاری‌های در گریدهای کوچک ممکن است نتایج مطلوب را به همراه نداشته باشد.

و نیچک ایده استفاده از بی‌هنجاری‌های بوگه را در مسئله تعیین دقیق ژئوئید مطرح کرد (تنزر و همکاران، ۲۰۰۳؛ تنزر و نیچک، ۲۰۰۳؛ و نیچک و همکاران، ۲۰۰۴). حذف اثر جاذبی توده بالای ژئوئید (توپوگرافی و جو) فضای نرم بوگه یا همان بدون توپوگرافی را ایجاد می‌کند. بی‌هنجاری‌های بوگه نسبت به بی‌هنجاری‌های هوای آزاد و هلمرت نرم‌تر و انتقال رو به پایین آنها آسان‌تر است. البته از فضای بدون توپوگرافی نمی‌توان در حکم فضای مناسب برای حل مسئله مقادیر مرزی استفاده کرد زیرا این فضا (با به هم زدن تعادل هم‌ایستایی زمین) به میزان زیادی از فضای واقعی زمین دور شده است و امکان بازگشت دقیق به فضای واقعی زمین را ندارد. در اینجا می‌توان از فضای هلمرت برای ایجاد شرایط مورد نیاز با استفاده از انتگرال استوکس بهره جست.

از سوی دیگر بی‌هنجاری‌های بدون توپوگرافی در بیرون از سطح زمین و در داخل توپوگرافی تا روی ژئوئید مشتق‌پذیر و نرم هستند در حالی که بی‌هنجاری‌های هلمرت به علت وجود لایه با چگالی سطحی در روی ژئوئید، مشتق‌پذیر نیستند. وجود این لایه با چگالی سطحی باعث غیر نرم بودن فضای هلمرت می‌شود (هک، ۲۰۰۳).

۲ مسئله مقدار مرزی در فضای بدون توپوگرافی

در اینجا از روشی که مارتینک (۱۹۹۸) برای مسئله مقدار مرزی استوکس-هلمرت استفاده کرده است بهره

اثر عبارت‌های غیرخطی در مقادیر مرزی برابر ۰.۱ میکروگال است که تاثیری در کمتر از میلی‌متر روی ارتفاع ژئوئید دارد (مارتینک، ۱۹۹۸). لذا با صرف نظر از عبارت‌های غیرخطی در نهایت شرط مرزی (۷) برابر است با:

$$g(r_i, \Omega) = \left| \nabla U \right|_{r=r_i} \left(1 + \frac{|\nabla U| \cdot |\nabla(T^{NT} + V^T)|}{|\nabla U|^2} \right) \Big|_{r=r_i} \quad (۹)$$

اگر $|\nabla U|_{r=r_i} = -\gamma_p$ شتاب میدان گرانی مرجع و p موقعیت نقطه زمینی در سطح آن باشد (شکل ۱) خواهیم داشت

$$g_p = \gamma_p \left(1 + \frac{\gamma_p \cdot |\nabla(T^{NT} + V^T)|_{r=r_i}}{\gamma_p} \right) \quad (۱۰)$$

لذا در نهایت داریم

$$g_p = \gamma_p + \left| \nabla(T^{NT} + V^T) \right|_{r=r_i} \quad (۱۱)$$

با جایگزینی مشتقات ارتفاعی با شعاعی و اعمال خطای ناشی از آن به شکل عبارت تصحیحی $\varepsilon_h(\cdot)$ داریم:

$$g_p \approx \gamma_p - \frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} + \varepsilon_h(T^{NT}(r_i, \Omega)) + \varepsilon_h(V^T(r_i, \Omega)), \quad (۱۲)$$

که عبارت‌های تصحیحی برابر است با (وینچک و همکاران، ۲۰۰۴)

$$\varepsilon_h(\cdot) = \frac{1}{2r} e_0^2 \sin 2\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \quad (۱۳)$$

اثر مستقیم توپوگرافی (DTE) نامیده می‌شود.

$$\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - \varepsilon_h(T^{NT}(r_i, \Omega)) = -g_p + \gamma_p - \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} + \varepsilon_h(V^T(r_i, \Omega)). \quad (۱۴)$$

که $\rho(r', \Omega')$ چگالی در نقطه انتگرال‌گیری و $L(r, \psi, r')$ فاصله فضایی است:

$$L(r, \psi, r') = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi)^{1/2}. \quad (۴)$$

در همه روابط طرح شده اثر جاذبی جو نیز باید محاسبه و اعمال شود. لذا منظور از اثر توپوگرافی اثر جرم‌های بالای ژئوئید شامل توپوگرافی و جو است. اثر میدان گریز از مرکز را می‌توان از پتانسیل گرانی میدان مرجع (نرمال) زمین، U ، حذف کرد.

$$T(r, \Omega) = W(r, \Omega) - U(r, \Omega), \quad (۵)$$

$$T^{NT}(r, \Omega) = T(r, \Omega) - V^T(r, \Omega). \quad (۶)$$

T^{NT} بی‌هنجاری پتانسیل در فضای بدون توپوگرافی است. این کمیت هماهنگ است لذا مسئله مقادیر مرزی برای بی‌هنجاری پتانسیل بدون توپوگرافی با معادله دیفرانسیل لاپلاس، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \Omega \in \Omega_0, \\ r(\Omega) \geq r_g : \Delta T^{NT}(r, \Omega) = 0 \\ \left| \nabla(U(r, \Omega) + T^{NT}(r, \Omega) + V^T(r, \Omega)) \right|_{r=r_i} \\ = g(r_i, \Omega) \\ U(r_g, \Omega) + T^{NT}(r_g, \Omega) + V^T(r_g, \Omega) = W_0 \\ T^{NT} = O\left(\frac{1}{r}\right) \\ r \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (۷)$$

که مقادیر مشاهداتی ما اندازه شتاب گرانی روی زمین است.

$$g(r_i, \Omega) = \left| \nabla(U(r, \Omega) + T^{NT}(r, \Omega) + V^T(r, \Omega)) \right|_{r=r_i} \quad (۸)$$

در مسئله مقدار مرزی (۶) مرز (ژئوئید) نیز مجهول است. مسئله مقدار مرزی (۶) برای تعیین میدان پتانسیل زمین غیرخطی است (مارتینک و متیسکا، ۱۹۹۷). بیشترین

$$FA = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q H - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q H^2 \text{ (Free air reduction)}$$

و از رابطه خطی برونز $N = \frac{T_{p_g}}{\gamma_Q} + O(T^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_P - \varepsilon_h(T_p^{NT}) - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q \frac{T_{p_g}}{\gamma_Q} + O(T^2) \\ & = -g_p + \gamma_Q - \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - FA + \varepsilon_h(V_p^T) \end{aligned} \quad (19)$$

اثر عبارات‌های غیرخطی در رابطه برونز فقط ۱/۵

میلی‌متر است (نجفی علمداری، ۱۹۹۶)، لذا:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_P - \varepsilon_h(T_p^{NT}) + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q \frac{(T_{p_g}^{NT} + V_p^T)}{\gamma_Q} \\ & = -g_p + \gamma_Q - \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - FA + \varepsilon_h(V_p^T) \end{aligned} \quad (20)$$

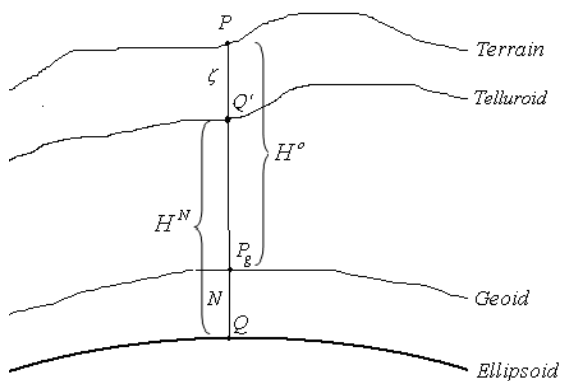
گرادیان ارتفاعی گرانی نرمال را می‌توان حاصل مشتق

شعاعی و تصحیح تقریب آن دانست.

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q \frac{\dot{\cdot}}{\gamma_Q} = -\frac{2}{r_Q} + \varepsilon_\gamma(\cdot) \quad (21)$$

که $\varepsilon_\gamma(\cdot)$ برابر است (وینچک و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\varepsilon_\gamma(\cdot) = 2 \left[m + f(\cos 2\varphi - 1/3) \right] \left(\frac{\dot{\cdot}}{R} \right) \quad (22)$$



شکل ۱. هندسه تعریف شده در مسئله مقادیر مرزی.

در این رابطه شتاب گرانی نرمال روی زمین (نقطه p) را از بسط این شتاب به سری تیلور حول نقطه Q روی بیضوی به‌دست آورد (شکل ۱).

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q h_p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q h_p^2 + O(h^3) \\ &= \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q (N + H_p) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q (N + H_p)^2 + O(h^3) \\ &= \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q N + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \Big|_Q H_p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q N^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q H_p^2 + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q N H_p + O(h^3) \end{aligned} \quad (15)$$

که N ارتفاع ژئوئید است. با فرض تقریب γ برای شتاب گرانی نرمال و برای مشتقات آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{GM}{r^2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial h} &\approx \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -\frac{2\gamma}{r} \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} &\approx \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} = 6 \frac{GM}{r^4} = \frac{6\gamma}{r^2} \end{aligned} \quad (16)$$

حال اثر عبارات‌های کوچک در (۱۵) را در بیشترین

حالت ($H=8000m$ و $N=100m$) بررسی می‌کنیم:

$$\max \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q N^2 \right) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{6\gamma}{r^2} 100^2 \approx 0.07 \mu Gal$$

$$\max \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2} \Big|_Q N H_p \right) \quad (18)$$

$$= \frac{6\gamma}{r^2} (100 \times 8000) \approx 10 \mu Gal$$

با توجه به حد دقت ۱۰ میکروگال برای تعیین ژئوئید با دقت یک سانتی‌متر کافی است. می‌توان از دو اثر فوق صرف‌نظر کرد. با تعریف تبدیل هوای آزاد

$$-\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_P + \varepsilon_h(T_p^{NT}) - \frac{2}{r_Q} T_{p_g}^{NT} \quad (27)$$

$$-\varepsilon_\gamma(T_{p_g}^{NT}) = \Delta g^{NT};$$

$$\Delta g^{NT} = \Delta g^{FA} + \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} + \frac{2}{r_Q} V_{p_g}^T \quad (28)$$

$$-\varepsilon_\gamma(V_{p_g}^T) - \varepsilon_h(V_p^T) - C_{N-\zeta}.$$

که Δg^{NT} کمیت بی‌هنجاری جاذبه در فضای بدون توپوگرافی در سطح زمین است. در شرط مرزی (۲۸) بی‌هنجاری پتانسیل یک کمیت متناسب به سطح ژئوئید و مشتق شعاعی متناسب به سطح زمین است. برای استفاده از انتگرال استوکس می‌توان شرط مرزی را در روی ژئوئید (روش استوکس کلاسیک) و یا روی تلورویید (نظریهٔ مالدنسکی) منتقل کرد. در روش استوکس نیاز است با انتقال به پایین مقادیر مرزی، شرط مرزی (۲۸) را روی ژئوئید تعریف کرد. بر اساس حل مسئله مقدار مرزی دیریکله، انتقال رو به پایین کمیت‌های هماهنگ از حل معکوس انتگرال پواسون عملی می‌شود. از آنجا که حاصل ضرب بی‌هنجاری بوگه کامل کروی (بی‌هنجاری در فضای بدون توپوگرافی) در شعاع زمین مرکز r در فضای بالای ژئوئید کمیتی هماهنگ است می‌توان مقدار کمیت در سطح ژئوئید را با استفاده از مقادیر آن در سطح زمین به دست آورد (هیزکانن و موریتز، ۱۹۶۷).

$$\forall \Omega \in \Omega_0, r_i(\Omega) \geq r_g: \quad (29)$$

$$\Delta g^{NT} [r_i(\Omega), \Omega] = \frac{R}{4\pi r_i(\Omega)} \int_{\Omega} \Delta g^{NT}(R, \Omega') K[r_i(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R] d\Omega',$$

که $K(r, \psi, R)$ کرنل پواسون است:

$$\forall \Omega \in \Omega_0, r_i(\Omega) \geq R:$$

$$K[r_i(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R] \quad (29)$$

$$= R \frac{r_i(\Omega)^2 - R^2}{d^3(r_i(\Omega), \psi(\Omega', \Omega), R)},$$

$\Delta g^{NT}(R, \Omega')$ و $\Delta g^{NT}[r_i(\Omega), \Omega]$ بی‌هنجاری جاذبه

که $m = \omega^2 a^3 / GM$ پارامتر ژئودزی است. همچنین R ، φ و f به ترتیب شعاع متوسط زمین، عرض ژئودتیک و فشرده‌گی هندسی بیضوی است. با اِعمال (۲۱) در (۲۰) داریم:

$$\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_P - \varepsilon_h(T_p^{NT}) + \frac{2}{r_Q} T_{p_g}^{NT} + \varepsilon_\gamma(T_{p_g}^{NT})$$

$$= -g_p + \gamma_Q - \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - FA - \frac{2}{r_Q} V_{p_g}^T \quad (23)$$

$$+ \varepsilon_\gamma(V_{p_g}^T) + \varepsilon_h(V_p^T)$$

بی‌هنجاری سطحی هوای آزاد از تفاضل شتاب گرانی واقعی روی زمین با شتاب گرانی نرمال روی تلورویید تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن اختلاف ارتفاع نرمال و ارتفاع ارتومتریک ($N - \zeta$) رابطه بی‌هنجاری هوای آزاد در سطح زمین به شکل زیر در می‌آید.

$$\Delta g_p^{FA} = g_p - \gamma_Q = g_p - \gamma_Q + FA + C_{N-\zeta} \quad (24)$$

در معادله اخیر نقطه Q' رو تلورویید است و $C_{N-\zeta}$ تصحیح ناشی از اختلاف ارتفاع ارتومتریک و نرمال است (هیزکانن و موریتز، ۱۹۶۷).

$$C_{N-\zeta} = \frac{-\Delta g^{SB}}{\gamma} \quad (25)$$

که Δg^{SB} بی‌هنجاری جاذبی بوگه ساده است. در نهایت

$$\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_P - \varepsilon_h(T_p^{NT}) + \frac{2}{r_Q} T_{p_g}^{NT} + \varepsilon_\gamma(T_{p_g}^{NT})$$

$$= -\Delta g^{FA} + \frac{\partial V^T}{\partial r} \Big|_{r=r_i} - \frac{2}{r_Q} V_{p_g}^T \quad (26)$$

$$+ \varepsilon_\gamma(V_{p_g}^T) + \varepsilon_h(V_p^T) + C_{N-\zeta}$$

اثر ثانویه غیرمستقیم توپوگرافی (SITE) نامیده می‌شود. شرط مرزی خطی شده مسئله استوکس در فضای بدون توپوگرافی به صورت زیر در می‌آید:

انتقال به صورت دقیق عملی نباشد.

استفاده از تحکیم توپوگرافی روی ژئوئید می‌تواند یک راه حل مناسب برای حل دو مشکل بالا باشد. لذا می‌توان با اعمال اثرات جاذبی توپوگرافی و جو تحکیم شده روی سطح ژئوئید تعادل هم‌ایستایی زمین را برقرار و اثرات غیرمستقیم را کوچک کرد. در این حالت امکان بازگشت دقیق از این فضا به فضای واقعی زمین وجود دارد. انتقال از فضای بدون توپوگرافی به فضای هلمرت با اعمال اثرات جاذبی مستقیم و غیرمستقیم توپوگرافی و جو تحکیم شده روی ژئوئید به انجام می‌رسد.

$$\Delta g_g^H = \Delta g_g^{NT} - \frac{\partial V^C(r, \Omega)}{\partial r} \Big|_{r=r_g} - \frac{2}{r_g} V^C(R, \Omega). \quad (32)$$

که V^C پتانسیل توپوگرافی تحکیم شده روی ژئوئید است (همان مرجع).

$$V^C = GR^2 \int_{\Omega_0} \frac{\sigma(r', \Omega')}{L(R, \psi, r')} d\Omega'. \quad (33)$$

$\sigma(r, \Omega)$ چگالی سطحی که با شرط حفظ مرکز جرم زمین و یا حفظ جرم زمین تعیین می‌شود. $\frac{\partial V^C}{\partial r}$ و $\frac{2}{r_g} V_{p_g}^C$ اثر مستقیم توپوگرافی تحکیم شده و اثر غیرمستقیم ثانویه توپوگرافی تحکیم شده است (مارتینک، ۱۹۹۸).

برای حل مسئله شرایط مرزی استوکس-هلمرت لازم است که مقادیر بی‌هنجاری جاذبه هلمرت به سطح کو-ژئوئید هلمرت منتقل شوند. در اینجا کو-ژئوئید به منزله مرز و بی‌هنجاری‌های منتقل شده به آن در حکم مقادیر مرزی خواهند بود.

$$\begin{aligned} \Delta g_c^H - \Delta g_g^H &\cong \frac{1}{\gamma_Q} \frac{\partial \gamma}{\partial H} \Big|_{r=r_g} \\ (T_c^h - T_g^h) &\cong -\frac{2}{R} (T_c^h - T_g^h) \\ &\cong -\frac{2}{R} (V_{r_g}^T - V_{r_g}^C) \end{aligned} \quad (34)$$

بدون توپوگرافی در سطح زمین و ژئوئید، Ω زاویه زمین مرکز مربوط به نقطه (θ, λ) و d فاصله فضایی بین دو نقطه (r, Ω) و نقطه انتگرال‌گیری (r', Ω') است. اگر DWC اثر انتقال رو به پایین بر بی‌هنجاری‌های بدون توپوگرافی باشد، شرط مرزی (۲۸) را می‌توان روی ژئوئید نوشت:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T^{NT}}{\partial r} \Big|_{p_g} + \varepsilon_h(T^{NT}) - \frac{2}{r_Q} T_{p_g}^{NT} \\ -\varepsilon_\gamma(T^{NT}) = \Delta g^{NT} + DWC \end{aligned} \quad (30)$$

در این حالت همه مولفه‌های شرط مرزی کمیت‌هایی در روی سطح ژئوئید هستند و شرایط استفاده از انتگرال استوکس مهیا است. در اینجا می‌توان با استفاده از انتگرال استوکس ژئوئید در فضای بدون توپوگرافی (کو-ژئوئید) را به دست آورد. انتقال از فضای بدون توپوگرافی به فضای واقعی زمین با اعمال اثر غیرمستقیم اولیه ($PITE$) صورت می‌پذیرد:

$$PITE = \frac{V_{p_g}^T}{\gamma} \quad (31)$$

۳ انتقال به فضای هلمرت

استفاده از شرط مرزی (۳۱) همراه با دو مشکل است: ۱- با حذف اثر جاذبی توده بالای ژئوئید، موقعیت ژئوئید به منزله سطح هم‌پتانسیل به میزان $\delta N = \frac{V^T}{\gamma}$ جابه‌جا می‌شود که با توجه به بزرگ بودن سهم پتانسیل توپوگرافی، V^T ، مقدار δN می‌تواند به چند صد متر برسد. لذا لازم است بی‌هنجاری‌های انتقال داده شده از سطح زمین برای جدایی ژئوئید واقعی تا ژئوئید در فضای بدون توپوگرافی (کو-ژئوئید) تصحیح شوند. با توجه به بزرگ بودن این تصحیح خطاهای موجود در محاسبه آن، اثر قابل توجهی بر ژئوئید خواهد گذاشت. ۲- با به هم خوردن تعادل هم‌ایستایی در فضای بدون توپوگرافی، تصحیح $PITE$ بزرگ خواهد بود. لذا ممکن است این

بدون توپوگرافی و مقایسه آن با روش هلمرت در اینجا صورت می‌گیرد. داده‌های ارتفاعی مورد استفاده برای محاسبات شامل داده‌های ارتفاعی، مدلی رقومی زمین SRTM، با گام‌های ۳ و مدل ارتفاعی جهانی ETOPO5 با گام ۵ دقیقه است. همچنین داده‌های جاذبی شامل ۲۲۱۵۶ نقطه سازمان نقشه‌برداری و موسسه BGI مورد استفاده قرار گرفت.

بی‌هنجاری‌های جاذبی بدون توپوگرافی در سطح زمین از رابطه (۲۷) به دست می‌آید. در این رابطه اثرات عمده اثر مستقیم توپوگرافی (شامل عبارت بوگه و عبارت ناهمواری) و اثر غیرمستقیم ثانویه است. شکل ۲ اثر مستقیم عبارت ناهمواری توپوگرافی را که به تصحیح توپوگرافی (Terrain correction) موسوم است نشان می‌دهد. همچنین اثر غیرمستقیم ثانویه توپوگرافی نیز در شکل ۳ نمایش داده شده است. با محاسبه کلیه اثرات نامبرده در فرمول (۲۷) بی‌هنجاری‌های سطحی بدون توپوگرافی (بوگه کروی کامل) محاسبه می‌شود (شکل ۴).

تعیین طول موج‌های بلند ژئوئید توسط داده‌های جاذبه زمینی (روش استوکس) اوریب (biased) است. لذا از تلفیق اطلاعات ماهواره‌ای و زمینی به طوری که از اطلاعات ماهواره‌ای در قالب ضرایب ژئوپتانسیل از درجات هماهنگ کم برای تعیین طول موج‌های بلند ژئوئید و از بی‌هنجاری‌های جاذبه زمینی برای تعیین طول موج‌های کوتاه (محلی) ارتفاع ژئوئید و یا کوژئوئید استفاده می‌شود.

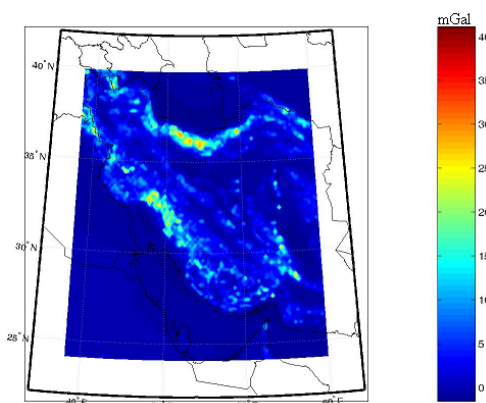
کوژئوئید هلمرت سطح هم‌پتانسیل نظیر سطح ژئوئید در فضای هلمرت است. جدایی هندسی این دو سطح ناشی از اختلاف پتانسیل گرانی $(V^t - V^c)$ زمین واقعی با زمین هلمرت است. ارتفاع کوژئوئید N^h با اعمال تصحیح N_{PITE} به ارتفاع ژئوئید N با فرمول،

$$N = N^h + N_{PITE} = N^h - \frac{(V^t(R, \Omega) - V^c(R, \Omega))}{\gamma_Q(\Omega)} \quad (35)$$

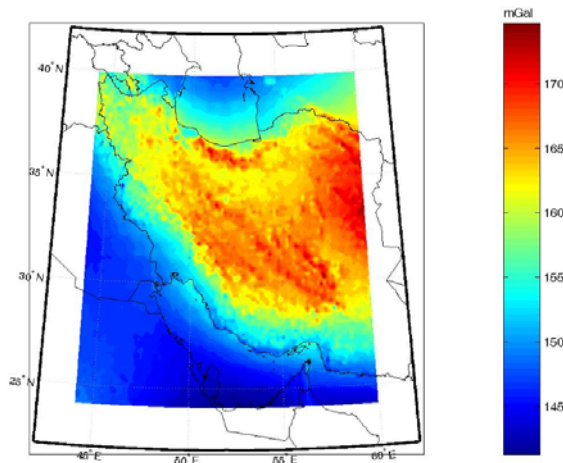
تبدیل می‌شود.

۴ محاسبات عددی

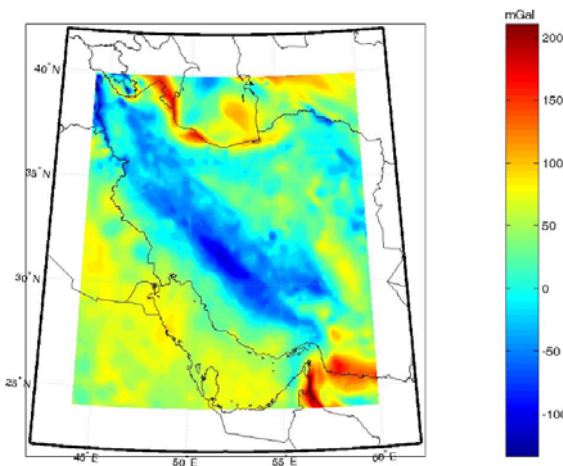
تعیین ژئوئید برای منطقه مرکزی ایران با استفاده از فضای



شکل ۲. اثر جاذبی ناشی از ناهمواری توپوگرافی بر شتاب جاذبه در سطح زمین Min=-1.892, Max= 42.374, Mean= 1.846 and STD= 4.381 mGal



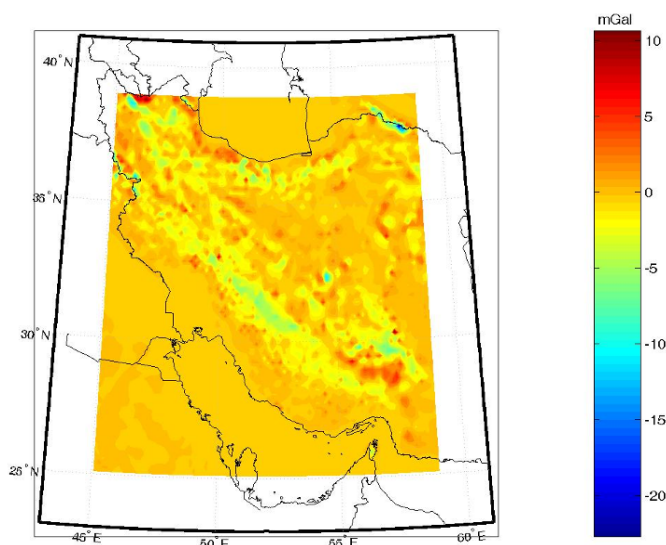
شکل ۳. اثر ثانویه غیرمستقیم توپوگرافی (SITE) در سطح زمین Min= 141.016, Max= 175.645, Mean= 156.21 and STD= 8.161 mGal



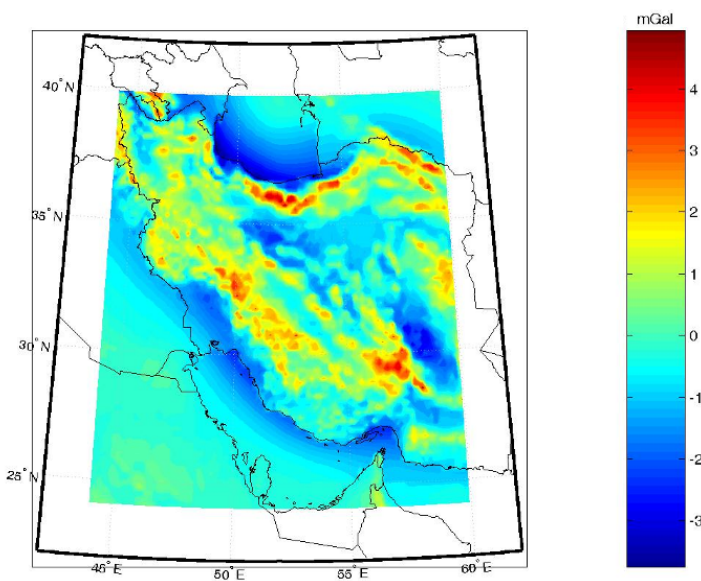
شکل ۴. بی‌هنجاری‌های بوگه کامل کروی (بی‌هنجاری در فضای بدون توپوگرافی) در سطح زمین Min= -136.516, Max= 220.629, Mean= 32.4964 and STD= 47.1775 mGal

خطا است. لذا در این مرحله سعی می‌کنیم که اثر جاذبی توپوگرافی حذف شده را با اثر جاذبی توپوگرافی را در قالب یک لایه تحکیم شده روی ژئوئید با چگالی سطحی مناسب جایگزین کنیم. این جابه‌جایی مسئله را به فضای هلمرت منتقل می‌کند. بزرگ‌ترین اثرات جاذبی در انتقال به فضای هلمرت، اثر مستقیم توپوگرافی تحکیم شده برای فواصل نزدیک (شعاع انتگرال‌گیری تا ۳ درجه) و اثر جاذبی ثانویه غیرمستقیم (رابطه ۳۵) است که مقادیر آنها در شکل‌های ۶ و ۷ آورده شده است.

انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی بدون توپوگرافی از حل معکوس انتگرال پواسون (رابطه ۲۹) صورت می‌گیرد. با توجه به نرم بودن این بی‌هنجاری‌ها سهم انتقال رو به پایین آنها کمتر از سایر بی‌هنجاری‌های دیگر نظیر هوای آزاد و یا هلمرت است. شکل ۵ سهم انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی بدون توپوگرافی را از سطح زمین روی ژئوئید نشان می‌دهد. همان‌طور که در بخش قبل بدان اشاره شد، به‌علت دور بودن فضای بدون توپوگرافی از فضای واقعی زمین، اثرات غیرمستقیم در این فضا بسیار بزرگ و محاسبه آنها توأم با



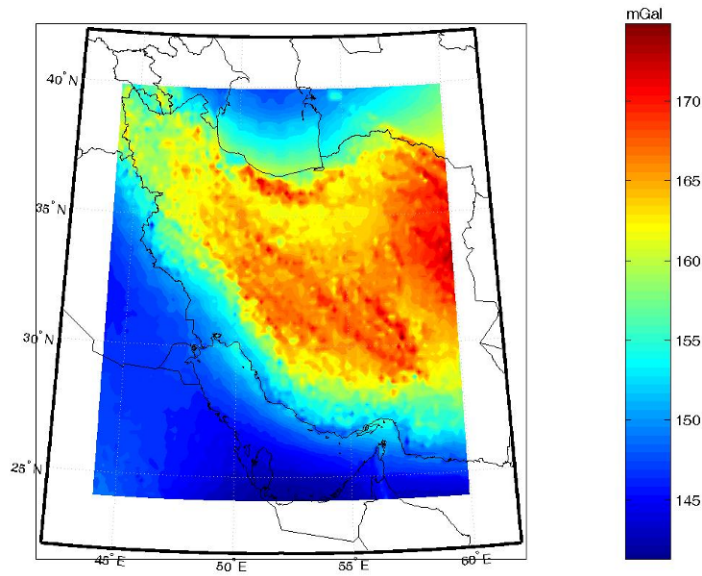
شکل ۵. سهم انتقال رو به پایین برای بی‌هنجاری‌های بدون توپوگرافی از سطح زمین تا روی ژئوئید - $Min = -22.968$, $Max = 11.596$, $Mean = -0.177494$ and $STD = 1.36619$ mGal



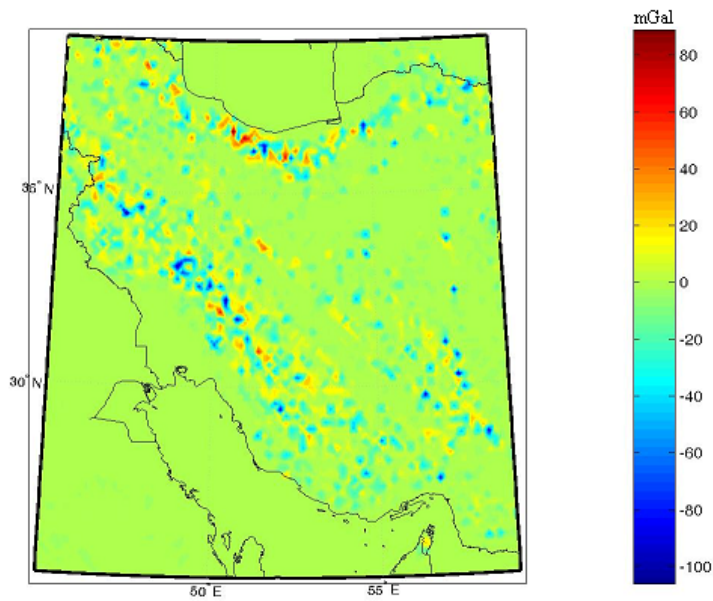
شکل ۶. اثر مستقیم توپوگرافی تحکیم شده در سطح ژئوئید $Min = -3.816$, $Max = 5.194$, $Mean = -0.119331$ and $STD = 1.103$ mGal

را روی ژئوئید به دست آورد. هر دو فرایند به لحاظ نظری یکی هستند اما انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های بوگه راحت‌تر و با خطای کمتری صورت می‌گیرد. اختلاف این دو بی‌هنجاری (هلمرت مستقیم و هلمرت با استفاده از فضای بدون توپوگرافی) در شکل ۸ آورده شده است.

با اعمال اثرات جاذبی توپوگرافی تحکیم شده بر سطح ژئوئید به بی‌هنجاری بدون توپوگرافی، بی‌هنجاری‌های هلمرت در سطح ژئوئید حاصل می‌شود. همچنین می‌توان بدون استفاده از فضای بدون توپوگرافی و به صورت مستقیم بی‌هنجاری‌های هلمرت را در سطح زمین محاسبه کرد و سپس با انتقال رو به پایین مقادیر آنها



شکل ۷. اثر ثانویه غیرمستقیم توپوگرافی (SITE) در سطح ژئوئید
 Min= 141.032, Max= 175.816, Mean= 156.254 and STD= 8.189
 ..mGal

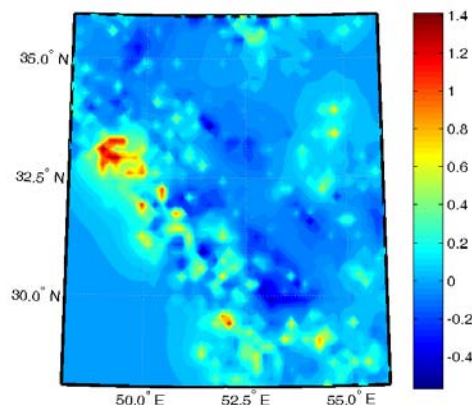


شکل ۸. اختلاف بین بی‌هنجاری هلمرت تبدیل شده از بی‌هنجاری بوگه و بی‌هنجاری هلمرت مستقیم در سطح ژئوئید
 Min= -107.532, Max= 94.485, Mean= -0.457 and STD= 11.114 mGal

استفاده کردیم.

$$\delta N_{NT}^H = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\psi < 3^\circ} S^{L=180}(\psi) \left[\Delta g_{class}^H(r_g, \Omega) - \Delta g_{NTded}^H(r_g, \Omega) \right] d\Omega \quad (36)$$

عمده تفاوت موجود مربوط به انتقال رو به پایین است که این فرایند در فضای بدون توپوگرافی راحت‌تر صورت می‌گیرد. برای بررسی اثر این اختلاف بر ارتفاع ژئوئید، از انتگرال تعمیم‌یافته استوکس تا درجه ۱۸۰



شکل ۹: اختلاف بین ژئوئید حاصل از روش هلمرت کلاسیک و هلمرت با استفاده از فضای بدون توپوگرافی (واحد: متر) $Min = -1.766$, $Max = 0.643$ $Mean = -0.075$ and $STD = 0.203$ meter

جدول ۱. پارامترهای آماری مقایسه دو ژئوئید هلمرت کلاسیک و هلمرت با استفاده از فضای NT (تمامی مقادیر به متر است).

	Min	Max	Mean	STD	RMS
$N_{GPS\text{-Levelling}} - N_{NT\text{-deduce}}$	-۱.۴۱۷	2.143	-0.026	0.449	0.449
$N_{GPS\text{-Levelling}} - N_{HClassic}$	-۱.۶۰۱	۲.۰۸۵	-۰.۰۲۸	۰.۴۶۰	۰.۴۶۰

درجه/مرتبه ۱۸۰/۱۸۰ محاسبه شد. سپس از حل انتگرال استوکس اصلاح شده به روش ونیچک-کلوزبرگ کو-ژئوئید باقی مانده به دست آمد. با اضافه کردن کوژئوئید مرجع و برگرداندن اثر غیرمستقیم اولیه (PITE)، ژئوئید در فضای واقعی محاسبه شد. در جدول ۱ پارامترهای آماری مقایسه دو ژئوئید نسبت به ژئوئید هندسی حاصل از ۲۱۳ نقطه GPS-leveilling موجود را نشان می‌دهد. براین اساس، ژئوئید حاصل از روش استوکس-هلمرت با استفاده از فضای NT در مقایسه با GPS-leveilling به صورت مطلق و نسبی دقت بهتری به میزان ۲ سانتی‌متر نسبت به ژئوئید استوکس - هلمرت کلاسیک دارد. محاسبات ما نشان می‌دهد که دقت ژئوئید حاصل از مدل EGM08 در قیاس با ژئوئید هندسی فوق ۵۸ سانتی‌متر است. لذا می‌توان گفت در مقایسه با EGM08 مدل ژئوئید

که δN_{NT}^H اختلاف ارتفاع ژئوئید حاصل از دو روش، Δg_{NTded}^H و Δg_{class}^H بی‌هنجاری‌های هلمرت مستقیم و با استفاده از فضای توپوگرافی هستند. شکل ۹ میزان جدایی دو ژئوئید را از رابطه (۳۷) نشان می‌دهد. براساس این شکل اختلاف معنی‌داری بین دو ژئوئید در حد دسی‌متر در کوهستان‌ها وجود دارد. همچنین در کوهستان‌ها، اختلاف ژئوئید حاصل از روش هلمرت کلاسیک و روش هلمرت با استفاده از فضای بدون توپوگرافی منفی و در مناطق پست مثبت است.

کارایی استفاده از فضای بدون توپوگرافی برای تعیین ژئوئید را می‌توان از مقایسه ژئوئید حاصل از آن با ژئوئید هندسی حاصل از نقاط GPS-Leveilling بررسی کرد. برای تعیین ژئوئید، ابتدا سهم طول موج‌های بلند بی‌هنجاری هلمرت از روی داده‌ها از مدل EGM08 تا

بررسی موردی اخیر با توجه با گام بزرگ شبکه محاسباتی مسئله انتقال رو به پایین کاملاً پایدار است. لذا استفاده از این روش برای تعیین ژئوئید دقیق در مناطقی که دارای تراکم زیاد هستند (نظیر اطلاعات جمع‌آوری شده برای مقاصد اکتشافی) توصیه می‌شود.

منابع

- Heck, B., 2003, On Helmert methods of condensation, *Journal of Geodesy*, **77**, 155-170.
- Heiskanen, W. H. and Moritz, H., 1967, *Physical geodesy*, San Francisco, W. H. Freeman and Co.
- Martinec, Z., 1998, *Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid*, Heidelberg, Springer.
- Martinec, Z. and Matyska, C., 1997, On the solvability of the Stokes pseudoboundary value problem for geoid determination, *Journal of Geodesy*, **71**, 103-112.
- Najafi-Alamdari, M., 1996, *Contributions towards the computation of a precise regional, Geoid*, University of New Brunswick.
- Tenzer, R., Novac, P., Janak, J., Huang, J., Najafi-Alamdari, M., Vajda, P. and Santos, M., 2003, A review of the UNB Stokes-Helmert approach for precise geoid determination in honoring the academic life of Petr Vanicek, M.Santos (Ed).
- Tenzer, R. and Vaníček, P., 2003, New results for UNB geoid, Poster presentation CGU annual meeting, Banff.
- Vanicek, P., Huang, J., Novak, P., Pagiatakis, S., Veronneau, P., Martinec, Z. and Featherstone, W., 1999, Determination of the boundary values for the Stokes-Helmert problem, *Journal of Geodesy*, **73**(4), 180-192.
- Vaníček, P. and Martinec, Z., 1994, The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid, *Manuscripta Geodaetica*, **19**, 119-128.
- Vanicek, P., Tenzer, R., Sjoberg, L., Martinec, Z. and Featherstone, W., 2004, New views of the spherical Bouguer gravity anomaly, *Geophysical Journal International*, **13**, 460-472.

حاضر در قیاس با ژئوئید هندسی خطای کمتری دارد. هرچند مقدار بهبود اندک است (حدود ۱۳ سانتی‌متر).

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله مقدار مرزی استوکس-هلمرت با استفاده از فضای بدون توپوگرافی مطرح شد. استفاده از این فضا انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی روی ژئوئید را ساده‌تر و با دقت بیشتر امکان‌پذیر می‌سازد. این مسئله به‌وضوح در مقادیر انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی بدون توپوگرافی دیده می‌شود (شکل ۵). زیرا سهم انتقال رو به پایین در این فضا نسبت به فضای هلمرت کمتر است. اگرچه استفاده از این فضا برای انتقال رو به پایین بی‌هنجاری‌های جاذبی با فاصله کم برای مثال ۱ دقیقه (مورد نیاز در داده‌های بی‌هنجاری جاذبی در آینده) مناسب است، اما مقایسه ژئوئید حاصل از این روش با نقاط GPS-levelling نشان از بهبود دقت نسبی و دقت مطلق در قیاس با روش استوکس-هلمرت کلاسیک دارد. همچنین اختلاف ژئوئید بین دو روش در حدود دسی‌متر در کوهستان‌ها است.

یک نکته در مقایسه بین ژئوئیدهای فوق با ژئوئید هندسی این است که با وجود اختلاف دسی‌متری دو ژئوئید همچنان در مقایسه با ژئوئید هندسی نتایج نزدیک دارند. این نکته ناشی از گام بزرگ داده‌ها موجود و در نتیجه ژئوئید خروجی است. گام محاسبات در این مقاله با توجه به خالی بودن مناطق وسیعی از ایران از داده‌های جاذبی، ۱۰ دقیقه انتخاب شد. این مسئله خطای درونیابی زیادی در تعیین ژئوئید جاذبی در موقعیت نقاط ژئوئید هندسی ایجاد می‌کند. از این رو اختلاف دو ژئوئید حاصل از فضای بوگه و هلمرت در مقایسه با ژئوئید هندسی آشکار نمی‌شود.

قوت استفاده از فضای بدون توپوگرافی در تعیین دقیق ژئوئید، انتقال رو به پایین راحت‌تر و دقیق‌تر است. البته در