ریاضیات مربوط به تخصیص منابع در شرایط استوکاستیک

نوشته

کارولـــوس

استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده:

هدف از این مقاله جمع آوری روشهای ریاضی مورد کاربرد در مسئله تخصیص بهینه منابع [1] در شرایط استوکاستیک و ارائهٔ آنها دریک چهارچوب واحد است. ضمنا "برخی‌از نتایج جدید به‌دست آمده در مورد حل این مسئله نیز بررسی می‌شوند.

۱. طرح دینامیکی مسئله

منظور ازمسئلهٔ تخصیص منابع در حالت دینامیکی، آن است که تعیین کنیم درهرلحظه اززمان مقدار (یادرصد) تخصیص یافته از یک منبع محدود برای هر کدام از N مورد استفاده‌از آن منبع چقدربایدباشد. برای‌مثال‌می‌توان مسئلهٔ تخصیص‌سرمایه (یا انرژی، نیروی انسانی، مواد اولیه، .....) درهرکدام از N فعالیت اقتصادی مختلف (امکانات تولیدی مختلف، موقعیت های سرمایه گذاری مختلف، .....) درطی زمان را ذکرکرد. برای سادگی در بیان، در بقیهٔ این مقاله منبع مورد نظر را "سرمایه" و N مورد استفـاده از آن‌را "فعالیت" مختلف خواهیم نامید. بنابراین می‌خواهیـــم تعیین کنیم‌که چگونه سرمایه خودرادرطول مدت مورد بررسی در بین N فعالیت مختلف‌توزیع کنیم. بعلاوه در این مسئله فرض می‌کنیم که نرخ بازده[2] سرمایه نیز جنبه احتمالاتی [3] دارد. یعنی اگر$K(t)$کل سرمایهٔ موجود در لحظهٔt باشد و نرخ بازده با رابطهٔ:

$$dR(t) = \frac{dK(t)}{K(t)} \qquad (۱)$$

تعریف‌شود) درآن صورت $R(t)$ یک‌فرایند استوکاستیک[4] است. اگر فرض کنیم:

$$K(0) = K_0 \qquad (۲)$$

آنگاه می‌توانیم نتیجه‌بگیریم که مقدار سرمایه از یک ســو بـا K_0 **واز سوی دیگر** با تابعی نمائی[5] از نرخ بازده متناســب خواهدبود. باید توجه داشت که در انتگراسیون رابطـــــه دیفرانسیل (۱) علاوه‌بردوعبارت فوق یک عبارت اصلاحی[6] نیزبه‌علت استوکاستیک بودن نرخ بازده ظاهر وانتگرال کامل آن به صورت زیر نوشته خواهد شد ۳

$$K(t) = K_0 \quad e^{\left\{ \int_0^t dR(t) - \frac{1}{2} \int_0^t d \langle R,R \rangle_t \right\}} \qquad (۳)$$

وجود عبارت اصلاحی ذرانتگرال فوق بدان علت است که نرخ بازده $dR(t)$ عموما " از یک‌جزٔ قابل پیش بینی[7] که بینهایت کوچکی از مرتبه dt است و یک جزٔ غیرقابل پیش بینی که به نرخ بازده جنبه احتمالاتـــی می‌دهد تشکیل می‌یابد. جزٔ دوم که در مهندسی بـــدان " نوفهٔ رنگی " [8] اطلاق می‌شود دارای تغییرات غیر کراندار[9] وبی‌بینهایت کوچکی از مرتبه dt است. به همین علت نیـز در بسط تیلورماکلوران $dR(t)$ جمله دوم بینهایت کوچک از مرتبه $dt \, . \, dt = dt$ می‌شود که‌باجملهٔ‌اول‌جزقابل پیش‌بینی قابل مقایسه است و نمی‌توان نسبت بدان از این جمله صرفنظرکرد. عبارت $d\langle R,R\rangle t$ "تغییرات درجهٔ دوم "[10] نرخ بازده‌$R(t)$نام دارد. از آنجا که این عبارت آنچه از مربع جزٔ غیر قابل پیش بینی $R(t)$ را که قابل پیش بینی باشد نشان می‌دهد، می‌توان آن را واریانس

1- Optimal allocation of resources

2- Rate of return

3- Probabilistic

4- Stochastic Process

5- Exponential functional

6- Correction term

7- Predictable

8- Coloured noise

9- Unbounded Variation

10- Quadratic Variation

دیفرانسیل نرخ بازده ، مشروط بردانستن این نرخ بازده تا لحظهٔ t نیز نام‌گذاشت. بیان‌ریاضی‌توضیح فوق تحت‌شرایط بسیار عام به‌صورت زیر است:

$$dR(t) = M(t)dt + dN(t) \qquad (۴)$$

که در آن

$$M(t)dt = E\left[dR(t) \quad R(s), \quad s \leq t\right] \qquad (۵)$$

$$d\langle R,R\rangle_t = E\left[(dN(t))^2 \mid R(s), \quad s \leq t\right]$$

$$= E\left[(dR(t)-M(t)dt)^2 \mid R(s), \quad s<t\right]$$

$$= \mathrm{Var}\ (dR(t) \mid R(s), \quad s \leq t) \qquad (۶)$$

یک قضیهٔ بسیار مهم در نظریهٔ توابع تصادفی[1] به نام **"قضیهٔ نمایش"[2]** بیان می‌کند که تحت شرایطی بسیار عام می‌توان تغییرات "نوفه" $N(t)$ را به‌صورت حاصل ضرب یک فرآیند قابل اندازه گیری[3] برحسب $R(s), s < t$ و یک نوفهٔ سفید[4] (مشتق حرکت براونی[5]) نمایش داد ۳

$$dN(t) = S(t) \quad dW(t) \qquad (۷)$$

که در آن $S(t)$ جملهٔ قابل اندازه‌گیری و $\frac{dW(t)}{dt}$ نوفهٔ سفید فرض‌شده است. ازمقایسهٔ جملات (۶) و (۷) نتیجه‌می‌شود:

$$d\langle R,R\rangle_t = S^2(t)\ dt \qquad (۸)$$

به عبارت دیگر $S(t)$ انحراف‌معیار[6] نرخ بازده‌در واحدزمان، مشروط‌برداشتن این نرخ تا لحظهٔ t می‌باشد.

اکنون چنانچه N فعالیت مختلف را در نظر بگیریم می‌توانیم هر کدام از فعالیت ها را به توسط نرخ بازده آن یعنی $R_i(t)$ ،$i=1,2,\ldots,N$ مشخص کنیم. اگر متغیرهای قابل کنترل[7] یعنی مقدار سرمایه‌گذاری شده از کل سرمایهٔ موجود در فعالیت شمارهٔ i ودر زمان t را با $X_i(t)$ نشان دهیم ، در آن صورت می‌توانیم رابطهٔ (۱) را به شکل:

$$\frac{dK(t)}{K(t)} = \sum_{i=1}^{N} X_i(t)\ dR_i(t) \qquad (۹)$$

بنویسیم که‌چون‌همواره مجموع مقادیر سرمایه‌گذاری شده باید برابر با کل سرمایه موجود باشد ، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i(t) = 1 \qquad (۱۰)$$

همانطور که درمورد انتگراسیون رابطهٔ (۱) ذکر شد می‌توان انتگرال رابطه دیفرانسیل (۹) را نیز به صورت زیر نوشت:

$$K(t)=K_o\, e^{\sum_{i=1}^{N} X_i(t)\ dR_i(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i(t)\ X_j(t)\ d\langle R_i, R_j\rangle t} \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$d\langle R_i, R_j\rangle_t = \mathrm{Cov}\ (dR_i(t)\ , dR_j(t) \mid R(s), \quad s<t) \qquad (۱۲)$$

با درنظر گرفتن عبارات فوق ملاحظه می‌شود که جملهٔ

$$E\left[\frac{K(t)}{K(t)} \mid I_t\right] = \sum_{i=1}^{N} X_i(t)\ E\left[dR_i(t) \mid I_t\right] = M(t)dt \qquad (۱۳)$$

که در آن I_t یک خانوادهٔ افزایشی جبر[8] وبین اطلاعات موجوددر لحظهٔ t است (مثلا" در عبارت (۵) و (۶) فرض شده است ($I_t = \sigma\ R(s), s < t$) نشان دهندهٔ امید ریاضی. مشروط نرخ بازده در هر لحظه یا بازده متوسط ex - ante است ، در حالی که جملهٔ:

$$\frac{1}{2}\ d\langle R,R\rangle_t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i(t)\ X_j(t)\ d\langle R_i,R_j\rangle_t = \frac{1}{2}\ S^2(t)\ dt \qquad (۱۴)$$

نشان‌دهندهٔ واریانس‌مشروط به همان نرخ بازده ، یابه‌عبارت دیگر بین مقدار خطر مجموعهٔ سرمایه گذاری[9] است. مقدار سرمایهٔ نهایی تابعی افزایشی از "بازده متوسط" (عبارت

1- Random function theory
2- Representation theorem
3- Measurable
4- White noise
5- Brownian motion
6- Standard deviation
7- Controllable variables
8- Increasing family of σ-algebras
9- Portfolio risk

(۱۳)) وتابعی کاهشی‌از"خطر" (عبارت (۱۴)) می‌باشد.

۲ . الگوهای دوپارامتری

با استفاده‌ازقضیه‌ٔ نمایش می‌توان برای رابطه‌ٔ (۹) نیزعباراتی برای بازده‌متوسط‌وکوواریانس‌بازده‌درفعالیت‌های مختلف برحسب زمان نوشت:

$$E\left[dR_i(t)\ \middle|\ I_t\right] = \mu_i(t)\ dt \qquad (۱۵)$$

$$d\langle R_i, R_j\rangle_t = \sigma_{ij}(t)\ dt \qquad (۱۶)$$

که در آن μ_t بازده متوسط‌فعالیت شماره‌ٔ i و σ_{ij} کوواریانس بازده های متناظر با فعالیت i وفعالیت j می‌باشند. بنابراین بازده متوسط‌وخطر برای مجموعه‌ٔ سرمایه گذاری را می‌توان برحسب عبارات فوق (با استفاده از روابط (۵) و (۸) و (۱۳) و (۱۴)) چنین بیان کرد

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i(t)\ \mu_i(t) \qquad (۱۷)$$

$$\frac{1}{2}\ S^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i(t)\ X_j(t)\ \sigma_{ij}(t) \qquad (۱۸)$$

با استفاده از روابط‌فوق می‌توان مسئله‌ٔ دینامیکی تخصیص بهینه‌ٔ منابع‌را به صورت دنباله ای از مسائل استاتیکی بهینه سازی با چند ملاک [1] در نظر گرفت. روابط (۱۷) و (۱۸) دوتابع هدف این مسئله را در هر زمان به دست می‌دهند، بطوری که هدف تصمیم گیرندگان بهینه سازی [2] عبارت (۱۷) و کمینه‌سازی [3] عبارت (۱۸) است. قضیه‌ٔ زیر می‌تواند این موضوع را توجیه کند.

قضیه‌ٔ ۱ : چنانچه تابع سودمندری [4] برای سرمایه تابعی مقعر[5] وغیرکاهشی [6] فرض شودآنگاه حداکثرافزایش سودمندی مستلزم‌بیشینه سازی بازده‌متوسط (عبارت (۱۷)) و کمینه‌ـ سازی خطر (عبارت (۱۸)) است.

برهان: ازفرض مقعروغیرکاهشی بودن‌تابع سودمندی می‌توان نتیجه گرفت:

$$U'(K) \geqq 0 \qquad (۱۹)$$

$$U''(K) \leqq 0 \qquad (۲۰)$$

اکنون‌اگرتغییرات‌قابل پیش‌بینی‌تابع سودمندی K (امیدریاضی دیفرانسیل این تابع) را محاسبه کنیم (با در نظر گرفتن جمله اصلاحی ناشی از استوکاستیک بودن $K(t)$ خواهیم داشت.

$$E\left[dU(K(t))\ \middle|\ I_t\right] = U(K(t))\ E\ dK(t)\ I_t + \frac{1}{2}\ U''(K(t))\,d\langle K,K\rangle_t \qquad (۲۱)$$

پس‌از قرار دادن عبارت $dK(t)$ حاصل از رابطه‌ٔ (۱) ، خواهیم داشت:

$$E\left[dU(K(t))\ \middle|\ I_t\right] = A_t\left[E\ dR(t)\ \middle|\ I_t\right] + B_t\ d\langle R,R\rangle_t \qquad (۲۲)$$

که در آن:

$$A_t = K(t)\ U'(K(t)) \geqq 0 \qquad (۲۳)$$

$$B_t = K^2(t)\ U''(K(t)) \leqq 0 \qquad (۲۴)$$

ویا با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) خواهیم داشت:

$$E\left[dU(K(t))\middle|I_t\right] = \left[A_t\ M(t) + \frac{1}{2}\ B_i\ S^2(+)\right]dt \qquad (۲۵)$$

یعنی این تغییرات هنگامی بیشینه می‌شوند که عبارت (۱۷) بیشینه شود وعبارت (۱۸) کمینه.
ملاحظه می‌شود که مجموعه‌ٔ سرمایه گذاری در هر حلظه، تابعی است از مقادیرانتخاب‌شده برای متغیرهای قابل کنترل $X_i(t)$, $i=1,2,\ldots,N$ وبا تغییر دادن این مقادیر نرخ بازده متوسط‌وخطر مجموعه‌ٔسرمایه‌گذاری عوض

1- Multi Criteria optimization
2- Maximization
3- Minimization
4- Utility funetion
5- Concave
6- Nondecreasing

خواهد شد . ازآنجا که روابط (۱۷) و (۱۸) دو ملاک مختلف را بهدستمیدهند ، چنانچه تابع سودمندی داده نشدهباشد یا بهعبارت دیگرندانیم که تصمیم گیرنده کدام بدیل [1] را ترجیح [2] میدهد درآن صورت همهٔ بدیل های ممکن که براثر انتخاب های مختلف از مقادیر $X_i(t)$ ، $i=1,2,...N$ بهدست میآیند از نظر فراتری [3] ویا فروتری [4] قابل مقایسه نخواهند بود . بدیهی است که اگر در مورد دوبدیل a_1 و a_2 همواره داشته باشیم :

$$dR_{a_1}(t) \geq dR_{a_2}(t) \qquad (۲۶)$$

یعنی نرخ بازدهمتناظربا انتخاب a_1 هیچگاه کمتر از نرخبازده متناظربا انتخاب a_2 نباشد ، درآن صورت گوئیم a_1 از نظر استوکاستیکی بر a_2 غالب است [5] امّا رابطه (۲۶) به ندرت درمورد دو انتخاب مختلف صدق میکند ، وبطور کلی بدون دانستن امتیازات [6] تصمیم گیرنده اکثر بدیل هایمتناظر با انتخاب های مختلفرا نمیتوان مقایسه کرد . ولی بااستفاده از قضیهٔ ۱ میتوان (در صورت صحت مفروضات این قضیه) تعریفیجامعتر از غلبهٔ استوکاستیکی بهصورت زیر ارائه کرد .

تعریف ۱: گوئیم بدیل a_2 را نسبت به بدیل a_1 فروتر گوئیم چنانچه روابط

$$E\left[dR_{a_2}(t) \mid I_t\right] \leq E\left[dR_{a_1}(t) \mid I_t\right] \qquad (۲۷)$$

$$d\langle R_{a_2}, R_{a_2}\rangle_t \geq d\langle R_{a_1}, R_{a_1}\rangle_t \qquad (۲۸)$$

برقرار باشند وحداقل یکیاز دونامساوی فوق به حالت تساوی صدق نکند. درآن صورت گوئیم بدیل a_1 فراتر از بدیـــل a_2 است .

تعریف ۲: گوئیم بدیل e موثر [7] یا نافروتر [8] است . چنانچه هیچ بدیل دیگری وجودنداشتهباشد که بنابر تعریف ۱ از آن فراتر باشد .

با استفاده ازملاکهای (۱۷) و (۱۸) میتوانتعریف فوق را بدین صورت نیز بیان کرد . بدیلی موثر است کهنتوان برای آن بدیلدیگری یافت که لااقل در یکی از ملاکهای فوق فراتر باشد در حالی که در ملاک دیگر نیز فروتر نباشـــــد ، بهعبارت دیگر امکان نداشته باشد مقدار داده شده به توسط عبارت (۱۸) را کاهش داد (بهبودبخشید) بی آن که ناچار باشیم مقدار داده شده به توسط عبارت (۱۷) را نیز کاهش دهیم (بدتر کنیم) .

با استفاده از تعاریف فوق میتوان مجموعه هـــای سرمایه گذاری موثر را از حل مسئله برنامه ریزی زیر بهدست آورد :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \qquad (۲۹)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i = M \qquad (۳۰)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad (۳۱)$$

که درآن یکیازدوتابع هدف به صورت محدودیت [9] مسئله با پارامتر M ظاهرشده است وباتغییر M کلیهٔ نقاط موثربهدست میآیند . (برای سادگی ، عامل زمان را در عبارت فوق حذف کردهانیم) . ثابتمیشود کهتحت مفروضاتی بسیارکلی (مثلا" در حالتاستاتیکیفرضنرمال بودن نرخ بازده ،ویا در درجهٔ دوم بودن تابع سودمندی انتخاب بهینه ضمنا" یک انتخاب موثر خواهد بود (۲)

امتیاز بزرگ طرح مسئله به صورت فوق این است که مسئله بهینه سازی [10] داده شده به توسط روابط (۲۹) و (۳۰ و (۳۱) یک مسئلهٔ برنامه ریزی درجهٔ دوم [11] بـــا راهحل های شناخته شده است (روش سیمپلکس درجهٔ دوم) . حسن دیگر این صورتبندی آن است که در صورت وجـــود محدودیت های اضافی دیگر (عدم امکان "فروش کوتاه" [12] ، محدودیتدراستقراض ، شرط حداقل ویاحداکثر سرمایه گذاری در یک یاچند فعالیت خاص ....) اینگونه محدودیت ها نیزبهصورت تساویها ویانامساویهایخطی مانند روابط (۳۰) و (۳۱) قابل بیاناند وشکل برنامه ریزی درجهٔ دوم و روش حلآن عوض نخواهد شد .

برای ساده کردن محاسبات میتوان روابط (۲۹) و (۳۰) و (۳۱) را به صورت ماتریسی زیر نیز نشان داد :

1- Alternative 2- Prefer 3- Superiority 4- Inferiority
5- Stochastically dominant 6- Preferences 7- Efficient
8- Noninferior 9- Constraint 10-Sptimezation
11-Quadratic programming 12-Short selling

$$V = S^2 = \bar{X}' \ \underline{C} \ \bar{X} \qquad (۳۲)$$

$$\bar{X}' \ \bar{\mu} = M \qquad (۳۳)$$

$$\bar{X}' \ \bar{e} = 1 \qquad (۳۴)$$

که در آن بردارها با حروفی که بالای آنها وماتریس ها با حروفی که زیر آنها خط کشیده شده مشخص شده‌اند. روابط این بردارهاوماتریس‌ها با متغیرهایی‌که قبلا"تعریف‌کرده‌ایم به‌صورت زیر است:

$$\underline{C} = (\sigma_{ij}) \qquad (۳۵)$$

$$\bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \\ \mu_N \end{bmatrix} \qquad (۳۶)$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \\ X_N \end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۳۸)$$

اکنون می‌توان قضایای زیر را درمورد این مسئله اثبات کرد.

قضیه ۲: در بین‌بدیل‌های مختلفی که از انتخاب نسبت‌های مختلف سرمایه‌گذاری X به دست می‌آیند یکی‌از بدیلها دارای کمترین‌میزان‌خطر است (بدیل‌دارای‌کمترین خطر [1]). کوواریانس بازده این بدیل با بازده بدیل های دیگر همیشه مقداری است ثابت.

برهان: بدیل دارای کمترین خطر از حل مسئله برنامه ریزی داده شده‌به‌توسط رابطه (۲۹) و (۳۱) ویا به‌بیان ماتریسی از حل مسئلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{کمینه سازی} \quad \frac{1}{2} \ X' \ \underline{C} \ X \qquad (۳۹)$$

$$\text{مشروط به} \quad \bar{X}' \ \bar{e} = 1 \qquad (۴۰)$$

تابع لاگرانژ [2] مسئلهٔ فوق (چنانچه λ متغیردوگان [3] متناظر با رابطهٔ (۴۰) باشد) عبارت است از:

$$L\ (\bar{X},\lambda) = \frac{1}{2} \ X' \ \underline{C} \ X - \lambda \ (\bar{X}' \ \bar{e} - 1) \qquad (۴۱)$$

با مشتق گیری از تابع لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\underline{C} \ \bar{X} = \lambda \ \bar{e} \qquad (۴۲)$$

که عنصر هر سطر این تساوی عبارت است از:

$$\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} \ X_j = \lambda \qquad (۴۳)$$

(علامت * در روابط فوق نشان دهنده پاسخ بهینهٔ مسئله داده شده به توسط روابط (۳۹) و (۴۰)) است.

چنانچه نرخ بازده بدیل دارای کمترین خطر را با اندیس نشان‌دهیم داریم:

$$dR_o(t) = \sum_{j=1}^{N} X_j^* \ dR_j(t) \qquad (۴۴)$$

بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۴۳) می‌توان نوشت:

$$d < R_i, R_o >_t = \sum_{j=1}^{N} X_j^* \ d < R_i, R_j >_t = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} \ X_j^* \ dt = \lambda dt \qquad (۴۵)$$

همچنین برای هر انتخاب دیگری که در رابطهٔ (۳۱) صدق کند نیز می‌توان چنین نوشت:

$$dR(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i \ dR_i(t) \qquad (۴۶)$$

وبنابراین:

$$d < R, R_o >_t = \sum_{i=1}^{N} X_i \ d < R_i, R_o >_t = \lambda dt \qquad (۴۷)$$

لذا ثابت می‌شود که همواره

$$d < R, R_o >_t = d < R_o, R_o >_t \qquad (۴۸)$$

فرع [4] ۱: هر بدیل موثر دیگر دارای نرخ بازده متوسطی

1- Minimum risk atternative

2- Lagrangian function

3- Dual variable

4- Corollary

بیشتر از نرخ‌بازده‌متوسط بدیل دارای کمترین خطر است زیرا درغیر این صورت این بدیل ،هم دارای بازده متوسط‌کمتر و هم دارای خطر بیشتر خواهدبود وبنابرتعریف ۲ نمی‌تواند یک بدیل موثر باشد.

قضیهٔ ۳: همیشه می‌توان یک‌بدیل‌موثر راطوری انتخاب‌نمود که هر بدیل موثر دیگر از ترکیب خطی آن با بدیل دارای کمترین خطر به دست آید.

برهان : چنانچه مسئله‌تعیین‌بدیل موثر را که‌به توسط‌روابط (۲۹) الی (۳۱) ویا روابط (۳۲) الی (۳۴) داده می‌شوند در نظر بگیریم تابع لاگرانژ آن‌عبارت خواهد بوداز :

$$L(\bar{x},\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}\bar{x}'\,\underline{C}\,\bar{x} - \lambda_1(\bar{x}\,\bar{\mu}-M)-\lambda_2(\bar{x}'\bar{e} - 1) \quad (۴۹)$$

با مشتق گیری ازتابع لاگرانژ خواهیم داشت :

$$.\ \underline{C}\,\bar{x} + \lambda_1\,\bar{\mu} + \lambda_2\,\bar{e}$$

$$\bar{x} = \lambda_1\,\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu} + \lambda_2\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e} \quad (۵۰)$$

مقادیر λ_1 و λ_2 از قراردادن رابطهٔ (۵۰) در روابط (۳۲) و (۳۴) به دست می‌آیند.

$$\lambda_1\,\bar{\mu}\,\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu} + \lambda_2\,\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e} = M \quad (۵۱)$$

$$\lambda_1\,\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e} + \lambda_2 . e'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e} = 1 \quad (۵۲)$$

روابط (۵۱) و (۵۲) دومعادلهٔ خطی برحسب λ_1 و λ_2 هستند که‌از آنها دو مجهول λ_1 و λ_2 به‌دست می‌آیند.

$$\lambda_1 = \frac{M\,\bar{e}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e} - \bar{\mu}\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}}{(\bar{\mu}'\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu})\,(\bar{e}\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}) - (\bar{\mu}'\underline{C}^{-1}\bar{e})^2} \quad (۵۳)$$

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu} - M\,\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}}{(\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\bar{\mu})\,(\bar{e}\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}) - (\bar{\mu}'C^{-1}\,\bar{e})^2} \quad (۵۴)$$

۱: چنانچه $M = \frac{\bar{\mu}'\underline{C}^{-1}\bar{e}}{\bar{e}'\,\underline{C}^{-1}\bar{e}}$ انتخاب شود رابطهٔ (۳۳) محدود کننده نخواهد بود $(\lambda_1=o)$ بنابراین در این حالت بدیلی باکمترین خطر به‌دست خواهد آمد. نسبتهای به‌دست آمده دراین حالت عبارتند از:

$$x^{(o)} = \frac{\underline{C}^{-1}\,e}{\bar{e}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}} \quad (۵۵)$$

۲: چنانچه انتخاب شود رابطهٔ (۳۴) محدودکننده نخواهدبود $(\lambda_2=o)$ ونسبتهای به دست آمده برای بدیل موثر در این حالت عبارت خواهند بود از:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu}}{\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}} \quad (۵۶)$$

پاسخ مسئلهٔ انتخاب بدیل‌موثر با بازده متوسط M درحالت کلی از قرار دادن روابط (۵۳) و (۵۴) در رابطهٔ (۵۰) بدست می‌آید . ملاحظه می‌شود که این پاسخ ترکیبی است خطی ازبدیل دارای کمترین خطر (داده شده در ۱) و بدیل تعریف شده در ۲.

$$x^{*} = \beta\ \bar{x}^{(1)} + (1 - \beta)\ x^{(o)} \quad (۵۷)$$

که در آن

$$\beta = \frac{M(\bar{e}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e})\,(\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e}) - (\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e})^2}{(\bar{e}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e})\,(\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{\mu}) - (\bar{\mu}'\,\underline{C}^{-1}\,\bar{e})^2} \quad (۵۸)$$

وبه‌همین ترتیب می‌توان بااستفاده ازرابطهٔ (۴۶) نرخ بازده بدیل موثر را هم به‌دست آورد.

$$dR^{*}(t) = \beta\ dR_{(1)}(t) + (1 - \beta)\ dR_o(t) \quad (۵۹)$$

فرع ۲: می‌توان (با استفاده از قانون برهمین [2]) به جای بدیل‌موثر که در ۲ تعریف‌شد هربدیل موثر دیگری (مانند بدیل e) را در قضیهٔ ۳ قرار داد:

$$\bar{x}^{*} = \beta\ \bar{x}^{(e)} + (1 - \beta)\ \bar{x}^{(o)} \quad (۵۷')$$

$$dR^{*}(t) = \beta\ dR_e(t) + (1- \beta)\ dR_o(t) \quad (۵۹')$$

فرع ۳: همچنین با استفاده از قانون برهم‌نهش‌در معادلات (۴۹) و (۳۳)و (۳۴) می‌توان‌نتیجه گرفت که‌هرگاه دوبدیل موثر متمایز [3] را در نظر بگیریم ، از ترکیب خطی آنها تمام

1- Corollary 2- Superposition 3- Distinct

بدیل های موثر دیگر در همان زمان به دست می‌آیند.

فرع ۴: از رابطهٔ (۵۹) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$d < R^{*}, R_e >_t = \beta\, d < R_e, R_e >_t + (1 - \beta)\, d < R_o, R_e >_t \qquad (۶۰)$$

با استفاده از قضیهٔ ۲ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\beta = \frac{d < R^{*} - R_o, R_e, R_o >_t}{d < R_e - R_o, R_e - R_o >_t} = \frac{\mathrm{Cov}\ (d(R^{*} - R_o), d(R_e - R_o)\quad I_t\ )}{\mathrm{Var}\ (d(R_e - R_o)\quad I_t\ )} \qquad (۶۱)$$

این نسبت در مدیریت مالی بد "فراریت"[1] مابه‌التفاوت‌نرخ بازده $d(R^{*} - R_o)$ نسبت به مابه‌التفاوت $d(R_e - R_o)$ موسوم است.

قضیهٔ ۴: هر گاه خواسته باشیم سرمایه گذاری را طوری انتخاب کنیم که مقدار سرمایهٔ نهایی حداکطر شود، آنگاه مجموعهٔ سرمایه‌گذاریهای انتخاب شده، یک مجموعهٔ موثر (مطابق تعریف ۲) خواهد بود.

برهان: از رابطهٔ (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت‌که مجموعهٔ سرمایه‌گذاری در این حالت از حل‌مسئله زیر به‌دست‌می‌آید:

$$\frac{1}{2}\ \bar{X}'\ \underline{C}\ \bar{X} - \bar{X}'\ \bar{\mu} \qquad (۶۲)$$

$$\bar{X}'\ \bar{e} = 1 \qquad (۶۳)$$

پس از مشتق گیری از تابع **لاگرانژ** خواهیم داشت:

$$\underline{C}\ \bar{X} = \bar{\mu} + \lambda\bar{e} \qquad (۶۴)$$

چون رابطهٔ (۶۴) حالت خاصی از رابطه (۴۹) (به ازای $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = \lambda$) است بنابراین پاسخ این مسئله نیز یک مجموعهٔ سرمایه گذاری موثر خواهد بود.

قضیهٔ ۵: مکان هندسی بدیل های موثر در صفحهٔ M-V یک سهمی ودر صفحه S-M یک هذلولی است.

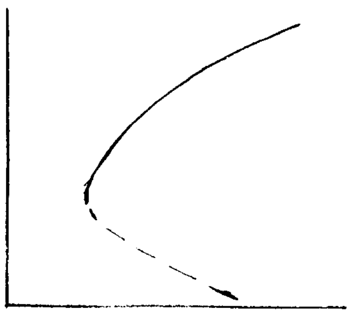
برهان: در برهان قضیهٔ ۳ دیدیم که بدیل‌های موثر ازحل معادلات (۴۹) و (۳۳) و (۳۴) بدست می‌آیند که همگی (برحسب X, λ_1, λ_2) خطی هستند، وبنابراین پاسخ X (و نیز λ_1, λ_2) نیزتابعی‌خطی‌از M خواهد بود. چون $V = X\ C\ X$ یک تابع درجه دوم از X است، بنابراین رابطهٔ بین V و M نیز از درجهٔ دوم خواهد بود. چنانچه بازده متوسط‌بدیل دارای کمترین خطر M_o، و خطر آن V_o فرض شود خواهیم داشت:

$$V = a(M - M_o)^2 + V_o \qquad (۶۵)$$

که معادلهٔ‌یک سهمی‌ودر آن‌$a > o$ است (با استفاده از تعریف بدیل موثر). چنانچه‌رابطهٔ بین S و M خواسته شده باشدبا قرار دادن S^2 بجای V در رابطه فوق خواهیم داشت:

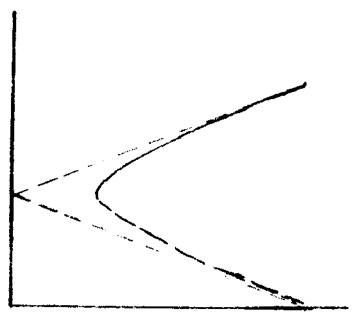
$$S^2 - a\ (M - M_o)^2 = V_o \qquad (۶۶)$$

که معادلهٔ یک هذلولی‌است (اشکال ۱ و ۲)



شکل ۱

شکل ۱: مکان V-M بدیل‌های موثر (سهمی)



شکل ۲

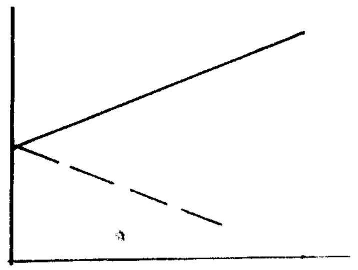
شکل ۲: مکان S-M بدیل‌های موثر (هذلولی)

1- Volatility

فرع ۵: در حالت‌خاصی‌که بتوان با انتخاب مجموعهٔ مناسب سرمایه‌گذاری ها خطر را به کلی از بین برد (یعنی $V_o=0$) مکان‌بدیل های مناسب خطر راستی است که از نقطهٔ (o,M_1) می‌گذرد. M_o در این حالت نرخ بازده بدون خطر [1] کاملا" مطمئن مثلا" نرخ بهره‌بانکی در نظر گرفته شود (شکل ۳) در این حالت داریم:

$$d < R_o, R_o > = o \qquad \text{(۶۷)}$$

شکل ۳



شکل ۳: مکان S-M بدیل های موثر در حالت خاص (خطر است)

متوسط‌نرخ بازده دراین حالت با مقدار انحراف معیار[2] این نرخ یک رابطهٔ خطی دارد. درحالت کلی این رابطهٔ خطی فقط به‌طورتقریبی (مجانبی)[3] و برای‌سرمایه‌گذاریهای‌پرخطر صدق می‌کند.

فرع ۶: مجموعهٔ همه بدیل های ممکن (که در روابط (۳۳) و (۳۴) صدق می‌کند. عبارت اند از نقاط‌داخل سهمی در شکل ۱ و یا نقاط‌داخل هذلولی درشکل۲ (و نقاط‌داخل دو خط‌مجانب در سکل ۳) .

قضیهٔ ۶: چنانچه یک بدیل موثر بخصوص را در نظر بگیریم (بدیل e) آنگاه‌بازده‌متوسط هربدیل‌دیگر (موثریاغیر موثر) با کوواریانس آن‌بدیل بابدیل‌موثر e یک رابطه خطی دارد.

برهان: چون نسبت های هر بدیل موثر در رابطهٔ (۴۹) صدق می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت (از سطر iام این رابطه)

$$\frac{1}{2} \Sigma x_j^{(e)} \sigma_{ij} = \lambda_1 \mu_i + \lambda_2 \qquad \text{(۶۸)}$$

$$d < R_i, R_e >_t = \lambda_1 E[dR_i(t) \mid I_t] + \lambda_2 dt \qquad \text{(۶۹)}$$

و با قرار دادن این رابطه در رابطهٔ ۴۶) می‌توان برای هر بدیل دلخواهی نتیجه گرفت:

$$d < R, R_e >_t = \lambda_1 E[dR(t) \quad I_t] + \lambda_2 dt \qquad \text{(۷۰)}$$

تعبیر قضیهٔ ۶ بدین صورت است که اگرچه عموما" می‌توان با تقبل خطر بیشتر مقدار متوسط‌بازده را افزایش داد (اشکال ۱ و ۲ و ۳) اما تقبل هر نوع خطری باعث افزایش نرخ متوسط بازده نمی‌شود و فقط‌بخشی از خطر متقبل شده که همجهت با خطربدیل‌های‌موثرباشد با بازده متوسط‌بالاتر جبران می‌شود و در برابر خطر های غیر ضروری هیچگونه افزایشی جهـــت نرخ بازده متوسط‌صورت‌نمی‌گیرد. به خطری که با خطر بدیل موثر همجهت باشد" خطر سیستماتیک"[4] اطلاق می‌شـــود. بطورکلی ازقضیهٔ ۳ می‌توان نتیجه گرفت‌که نیازی به ایـــن که همهٔ فعالیت‌ها برای افراد تصمیم گیرندهٔ مختلف قابل سرمایه‌گذاری باشدنیست وهرگاه دو بدیل موثر مختلف جهت سرمایه گذاری دردسترس‌این گونه افرادباشد،آنان می‌توانند با تغییرنسبت فرایت درترکیب‌خطی این بدیل ها هر بدیل موثردلخواه‌دگررا که ازنظر آنان بهینه باشد، انتخاب کنند. در نتیجه این انتخاب‌افراد کل سرمایهٔ موجود که در اختیار همهٔ آنهااست نیز (در صورت موثر بودن‌انتخاب همه افراد) به صورت‌یک بدیل موثر کلی مورد سرمایه گذاری قرار می‌گیرد (که نرخ بازده متناظر با آن نرخ بازار[5] بازده نام دارد). عاملی که افرادرا تشویق به‌سرمایه گذاری به‌طریق موثرمی‌کند آن است که در برابر تقبل هرگونه خطای غیر سیستماتیک هیچگونه‌افزایشی به نرخ‌متوسطبازده آنان تعلق نخواهدگرفت و چون همهٔ افرادبدیل های‌کم خطر تر را در شرایط‌برابر بر بدیل‌های باخطر بیشتر ترجیح می‌دهند، بنابراین هر کدام از افراد با توجه به تابع سودمندی خود یک بدیل موثر را انتخاب خواهندکرد.

1- Risk free rate of return
2- Interest rate
3- Standard deviation
4- Asymptotical
5- Systematic risk

۳. اثر افزایش اطلاعات ویا تغییر باورهای احتمالاتی[1]

از ملاحظه روابط (۱۵) و (۱۶) نتیجه می‌شود که در تبدیل مسئلهٔ دینامیکی به الگوهای دوپارامتری استاتیکی عبارت دوم بستگی به اطلاعات اضافی تصمیم گیرنده و یا باورهای او در بارهٔ نحوهٔ توزیع احتمال متغیرهای مختلف مسئله ندارد در حالی که عبارت اول یعنی متوسط نرخ بازده به هردوعامل فوق بستگی دارد. بنابراین لازم است که برخی از نتایج به‌دست آمده عوض شود. اهم نتایج به دست آمده به قرار زیرند ۱

فرع ۷: در اثر تغییر اطلاعات ویا باورهای احتمالاتی بدیل دارای کمترین خطر تغییر نمی‌کند.

برهان: از روابط (۴۲) یا (۵۵) نتیجه می‌شود (بطورکلی در برهان قضیهٔ ۲ مقدار μ دخالت نمی‌کند).

فرع ۸: در اثر تغییر اطلاعات ویا باورهای احتمالاتی مقدار فراریت (فرع ۴) تغییر نمی‌کند.

برهان: از رابطه (۶۱) نتیجه می‌شود.

برهان ۹. بطورکلی، فرد تصمیم گیرنده چنانچه به جای اطلاعات I_t دارای اطلاعات بیشتر I_t' باشد بطوری که $I_t' > I_t$ ویا به‌جای احتمال P_1 فرد تصمیم گیرنده به احتمال P_2 عقیده‌مند باشد بطوری‌که P_2 نسبت به P مطلقا" پیوسته[3] باشد (شرط لازم وکافی برای این امر همقیده بودن همهٔ تصمیم گیرندگان در باره پیشامدهای غیر محتمل است)، آنگاه به جای بردار μ باید یک بردار دیگر به صورت $\mu+\alpha$ را جانشین کرد.

الف:

اگر داشته باشیم:

$$\mu_i(t)dt = E\left[dR_i(t) \mid I_t\right] \qquad (۷۱)$$

$$\mu_i(t)\,dt + \alpha_i(t)dt = E\left[dR_i(t) \quad I_t'\right] \qquad (۷۲)$$

آنگاه بنابر قاعدهٔ تصاویر مکرر در فضای هیلبرت خواهیم داشت:

$$E\left[\alpha_i(t) \quad I_t\right] = o \qquad (۷۳)$$

ب:

اگر نماد Λ معرف مشتق رادن نیکودیم[4] P_2 نسبت به P_1 باشد یعنی داشته باشیم:

$$\Lambda = \frac{d\,P_2}{d\,P_1} \qquad (۷۴)$$

آنگاه بازده متوسط اضافی α که براثر این تغییر در باورهای احتمالاتی ظاهر می‌شود بر اثر اطلاعات اضافی عوض نمی‌شود زیرا اگر داشته باشیم:

$$\Lambda_t = E\left[\Lambda \mid I_t\right] \qquad (۷۵)$$

$$\frac{d\Lambda_t}{\Lambda_t} = dy_t \qquad (۷۶)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$E_2\left[dZ(t) \mid I_t\right] = E_1\left[dZ(t) \mid I_t\right] + d\,\langle Z, Y\rangle_t \qquad (۷۷)$$

با قرار دادن R_i به جای Z خواهیم داشت:

$$E_2\left[dR_i(t) \mid I_t\right] = E_1\left[dR_i(t) \mid I_t\right] + d\,\langle R_i, Y\rangle_t \qquad (۷۸)$$

و با قرار دادن مقادیر μ_i و $\mu_i+\alpha_i$ در رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\alpha_i(t)\,dt = d\langle R_i, Y\rangle_t \qquad (۷۹)$$

1- Market rate of return

2- Probability beliefs

3- Absolutelg cortinuous

4- Radon-Nikodim derivative

مراجع

۱ . **لوکس، کارو**. " مدل سرمایه گذاری دینامیک تحـــــت اطلاعات وباور های ناهمگن". نشریه دانشکده‌فنی دوره‌دوم شماره ۳۷. ۱۳۵۶ ص ص ۳۰ – ۳۵.

2. Lucas, Caro, "Application of the Theory of Stochastic Control to Financial and Economie Systems." Memorandum No ERL-M597,U.C.Berkeley 1976.
3. Wong, Eugene. "Recent Progress in Stochastic Processes A Survey". IEEE Transactions on Information Theory 19 1973 PP 262-275.