محاسبه حداقل فاصله زمانی بین دو قطار متوالی

نوشتهٔ :

هاشم مهرآذین

استاد یار دانشکده‌فنی دانشگاه‌تهران

۱ـ چکیده :

دراین بررسی فاصله زمانی اپتیمال(حداقل) بین دوقطار متوالی به‌صورت تابعی‌از سرعت بررسی شده‌است ابتدا معادله‌هائی‌که سرعت وشتاب هریک از دوقطار باید درآن‌ها صدق کنند نوشته شده‌اند سپس دوحالت مطالعه شده‌است:

درحالت اول بافرض ساده‌ای که سرعت هردو قطار برابر مقدار ثابت باشد رابطه بین فاصله‌زمانی وسرعت‌معین شده ومنحنی‌های تغییرات فاصله زمانی به‌صورت تابعی از سرعت، فاصله زمانی حداقل به‌صورت تابعی ازسرعت اپتیمال وفاصله زمانی به‌صورت تابعی از طول قطار رسم شده‌اند.

درحالت دوم‌چنین فرض‌شده است که دوقطار در وضعیتی هستند که هردو بایک شتاب ثابت وبرابر به‌سرعت‌خود می‌افزایند ناگهان قطاراول می‌ایستد وهمزمان باآن قطار دوم بایک شتاب‌منفی وثابت ترمز میکند. در اینجا نیز معادله های حرکت نوشته شده ومنحنی‌های نظیر حالت اول رسم شده‌اند.

اگر بتوان به‌وسائلی مثلاً گیرنده وفرستنده یا کمپوتر وغیره ارتباط‌های لحظه‌ای بین دوقطار برقرار کرد وهمچنین اگر فرض کنیم که در فاصله مطالعه شده‌ایستگاهی وجود ندارد نتائج بدست آمده ازاین قرار خواهند بود.

۱ـ فاصله زمانی بین‌دوقطار به‌رقم‌های کوچکی در حدود ۲۰ تا ۳۰ ثانیه تقلیل پیدامیکنند، بطوریکه حداقل این مقداردر حالت اول ۱۷/۳ ثانیه وبرای سرعتی در حدود ۶۲/۳ کیلومتر درساعت ودرحالت دوم ۱۰/۸ ثانیه برای سرعتی در حدود ۴۸/۷ کیلومتر در ساعت است .

رابطه بین فاصله زمانی حداقل وسرعت اپتیمال در هردوحالت خطی‌است.

فاصله زمانی حداقل وسرعت اپتیمال توابع افزایشی از طول قطار هستند ومنحنی تغییرات آنها به‌صورت یک شاخه از یک سهمی است.

۲ـ پارامترهای بکار رفته :

قبل‌از تعریف پارامترهای که در اینجا بکار رفته‌اند فرض‌میکنیم که دوقطار متوالی بایکدیگر طوری در تماس هستند که درهرلحظه قطار دوم از موقعیت قطار اول باخبراست ودراین صورت میخواهیم بدانیم که چه‌فاصله زمانی باید

بین آنها موجود باشد به‌طوریکه اگر قطاراول توقف کرد قطار دوم بتواند بااستفاده از ترمزاضطراری در فاصله‌ای برابر D از قطار اول بایستد. پارامترهائی که در اینجا بکار میبریم عبارتنداز :

L : طول قطار به‌متر

t : زمان به ثانیه

$x(t)$: فاصله قطاراول از مبداء حرکت در زمان t

$v(t)$: سرعت‌قطار اول به‌متر در ثانیه .

$\alpha(t)$: شتاب قطار اول به‌متر درثانیه، ثانیه.

z : فاصله زمانی بین دوقطار متوالی به‌ثانیه .

D : فاصله ایمنی بین دوقطار بعداز توقف به‌متر .

γ : شتاب اضطراری ترمزگیری به‌متر در ثانیه، ثانیه .

به‌این ترتیب‌باتوجه به‌فاصله زمانی z بین‌دوقطار پارامترهای مربوط به‌قطار دوم‌عبارت‌خواهند بوداز $x(t-z)$ و $V(t-z)$ و $\alpha(t-z)$

۳ـ فاصله زمانی حداقل :

اگرفرض کنیم درلحظه t قطاراول از حرکت بایستد وبلافاصله قطار دوم ازآن مطلع شود وبا شتاب اضطراری ثابت γ ترمز کند قبل‌از توقف فاصله‌ای برابر $\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}$ را طی میکند . پس فاصله بین ابتدای دوقطار که قبل از ترمزگیری $x(t)-x(t-z)$ است به $x(t)-x(t-z)-\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}$ میرسد . بنابراین فاصله بین انتهای قطار اول بالکوموتیو قطار دوم برابراست با :

$$x(t)-x(t-z)-\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}-L$$

برای اینکه برخوردی روی ندهد باید رابطه

$$x(t)-x(t-z)-\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}-L\geqslant D$$

برقرار باشد یعنی فاصله بالا حداقل برابر فاصله ایمنی D شود. این فاصله اپتیمال است اگر سه‌رابطه زیر برقرار باشند:

$$x(t)-x(t-z)-\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}=L+D \qquad (۱)$$

$$v(t)-v(t-z)-\frac{V(t-z)\alpha(t-z)}{2\gamma}=0 \qquad (۲)$$

$$\alpha(t)-\alpha(t-z)-\frac{\alpha^2(t-z)}{2\gamma}-\frac{\alpha(t-z)\alpha'(t-z)}{2\gamma}\geqslant 0 \qquad (۳)$$

٤ـ مطالعه فاصله حداقل درحالت سرعت ثابت :

دراین حالت فرض میکنیم:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dx(t-z)}{dt}=V$$

برابر مقدار ثابت است. بنابراین رابطه(۱) به‌صورت زیر درمیاید.

$$x(t)-x(t-z)-\frac{V^2}{2\gamma}=L+D$$

اما

$$x(t)-x(t-z)=zV$$

است و بنابراین

$$zV-\frac{V^2}{2\gamma}=L+D$$

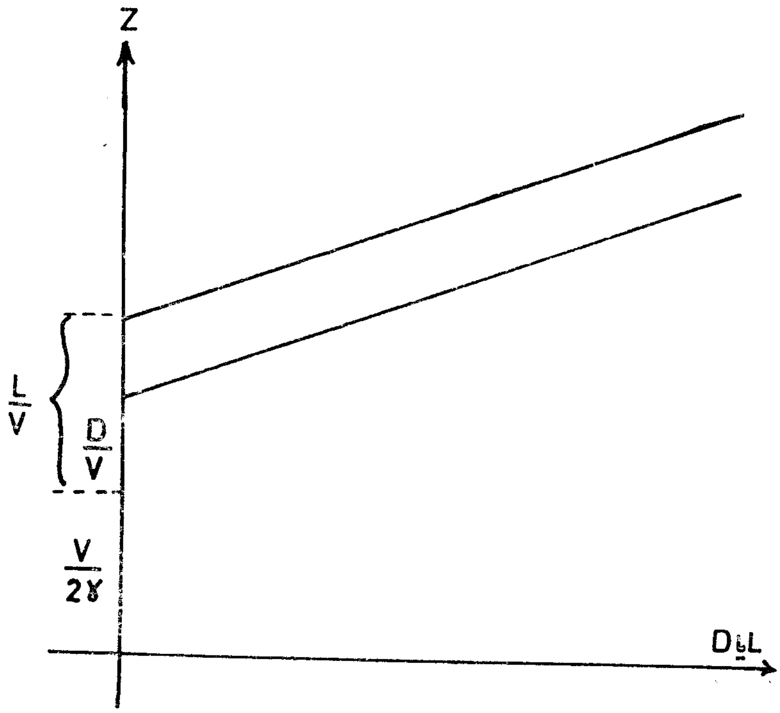
به‌عبارت دیگر Z به‌صورت تابعی از V با رابطه (٤)

$$z=\frac{L+D}{V}+\frac{V}{2\gamma} \qquad (٤)$$

نشان داده می‌شود.

۱-٤- بررسی فاصله زمانی حداقل بصورت تابعی از طول قطار و از فاصله ایمنی

از رابطه (٤) نتیجه میشود که z یعنی فاصله زمانی بین‌دوقطار برای مقادیر V و γ ثابت وبه‌صورت‌تابعی از L یا D بایک خط نمایش داده میشود که ضریب زاویه‌آن درهرمورد $\frac{1}{V}$ و عرض از مبداء آن برای $z(L)$ برابر با $\frac{D}{V}+\frac{V}{2\gamma}$ و برای D برابر با $\frac{L}{V}+\frac{V}{2\gamma}$ است .شکل مقابل این دو خط را نشان میدهد دراین شکل فرض شده‌است که طول قطار از فاصله ایمنی بین آنها بیشتر وتقریباً در برابر این فاصله است.



منحنی تغییرات فاصله زمانی بصورت تابعی از طول قطار وفاصله ایمنی.

۲-٤- بررسی فاصله زمانی حداقل به‌صورت تابعی از سرعت

اگر بخواهیم می‌نیمم z را از رابطه $z = \frac{L+D}{V} + \frac{V}{2\gamma}$ بدست آوریم از رابطه :

$$\frac{dz}{dV} = -\frac{L+D}{V^2} + \frac{۱}{2\gamma} = o$$

سرعت اپتیمال V_m وفاصله زمانی اپتیمال z_m چنین بدست می‌آیند :

$$V_m = \sqrt{2\gamma(L+D)} \qquad z_m = \sqrt{\frac{2(L+D)}{\gamma}} = \frac{V_m}{\gamma}$$

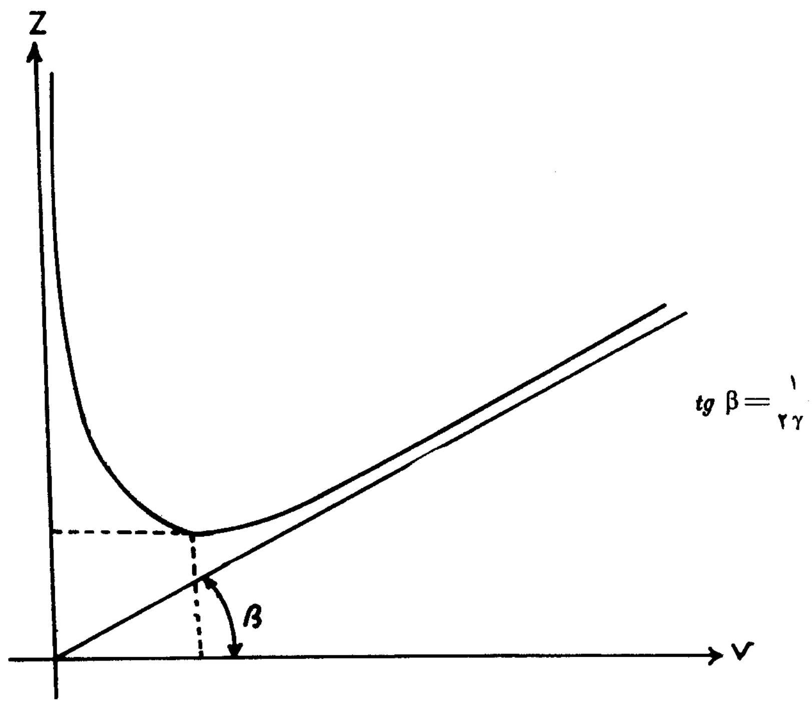
توجه میکنیم که وقتی V خیلی بزرگ شود یاوقتی V بسمت صفر میل کند z خیلی بزرگ میشود وخطوط $V = \frac{۱}{2\gamma} V$ و $V = o$ مجانب‌های منحنی تغییرات z(V) هستند

اگر زمان توقف در ایستگاه‌ها را که معمولا بین ٥٠ ثانیه تایک دقیقه است وباید به‌اعداد پیداشده برای z اضافه کنیم به‌حساب نیاوریم جدول تغییرات ومنحنی را برای تابع z(V) پیدامیکنیم به‌صورت زیر هستند:

جدول تغییرات z به‌صورت تابعی از V برای $L = 100 \quad D = 50 \quad \gamma = ۱$

V به کیلومتردرساعت	۹	۱۸	۳٦	$۳٦\sqrt{۳}$	۹۰	۱۰۸	۱٤٤
$\frac{dz}{dV}$		-		۰		+	
Z به‌ثانیه	٦۱/۳	۳۲/٥	۲۰	۱۷/۳	۱۸/٥	۲۰	۲۳/۸

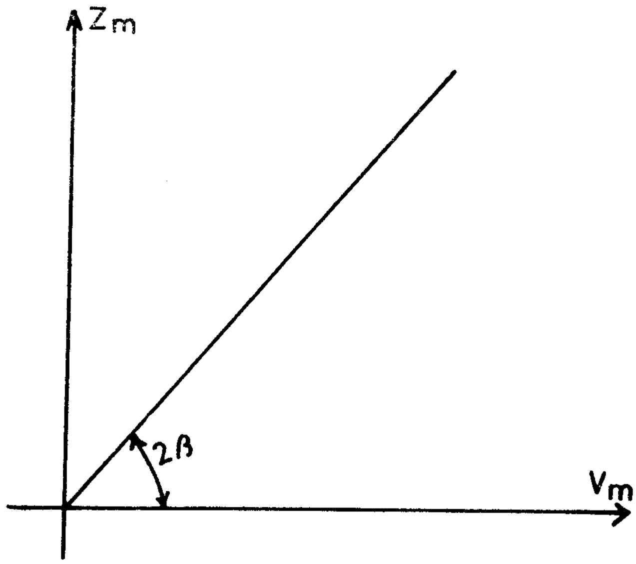
ازمشاهده جدول و منحنی تغییرات z چنین برمی‌آید که برای سرعت‌های نسبتاً زیاد فاصله زمانی به‌صورت یک تابع خطی از سرعت افزایش پیدا میکند.



منحنی تغییرات فاصله زمانی بین دو قطارمتوالی به‌صورت تابعی از سرعت.

۴-۳- فاصله حداقل به‌صورت تابعی از سرعت اپتیمال

چنکه در ۲-۴ دیدیم بین V_m و z_m رابطه V_m $z_m = \frac{1}{\gamma}$ برقرار است. یعنی z_m به شکل یک تابع خطی‌از V_m زیاد میشود ومنحنی تغییرات آن خطی باضریب‌زاویه $\frac{1}{\gamma}$ است.



منحنی تغییرات z_m برحسب V_m

۴-۴- بررسی z_m و V_m به‌صورت توابعی از L و V :

از رابطه

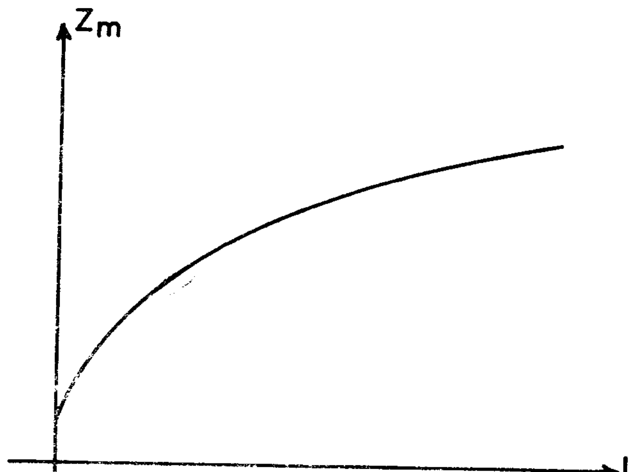
$$z_m = \sqrt{\frac{2(L+D)}{\gamma}}$$

با توجه به‌اینکه

$$\frac{dz_m}{dL} = \frac{dz_m}{dD} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(L+D)}} > 0$$

چنین نتیجه میشود که z_m یک تابع افزایشی از L است که جدول‌ومنحنی‌تغییرات‌آن به‌صورت‌زیر است وهمچنین V_m یک تابع افزایشی از L است وتغییرات‌آن در جدول مربوط به z_m دیده میشود .

L به‌متر	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰
z_m به ثانیه	۱۷/۳	۲۲/۴	۲۶/۵	۳۰
V_m به کیلومتر در ساعت	۶۲/۳	۸۰/۵	۹۵/۲	۱۰۸



۵ـ فاصله زمانی حداقل وقتی به‌سرعت هردو قطار با شتاب ثابت α افزوده می‌شود :

اگر فرض کنیم که سرعت دوقطار متوالی از روابط : $v(t-k)=\alpha(t-z)$ و $v(t)=\alpha t$ بدست بیایند. خواهیم داشت :

$$x(t)-x(t-z)=\frac{1}{2}\alpha\left[t^2-(t-z)^2\right]=\frac{1}{2}\alpha(2tz-z^2)$$

و رابطه (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{\alpha}{2}z(2t-z)-\frac{V^2(t-z)}{2\gamma}=L+D$$

۱ـ۵ـ بررسی z به‌صورت تابعی از V

اگر برای سهولت $V(t-z)=V$ فرض شود رابطه بالا به صورت

$$\frac{t}{2}\left[2\alpha(t-z)+\alpha z\right]-\frac{V^2}{2\gamma}=L+D$$

درمی‌آید که باتوجه به‌رابطه $V(t-z)=(t-z)\alpha$ میتوان آنرا به‌صورت

$$\frac{z}{2}\left[2V+\alpha z\right]-\frac{V^2}{2\gamma}=L+D$$

یعنی به‌صورت

$$\alpha\frac{z^2}{2}+vz-\left(\frac{v^2}{2\gamma}+L+D\right)=o$$

نوشت. از این معادله درجه دوم Z به‌صورت زیر بدست می‌آید :

$$z=\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma}\right)V^2+2(L+D)}-\frac{V}{\alpha}$$

رابطه $\frac{dz}{dv}=o$ چنین نتیجه می‌دهد :

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma}\right)V^2+2(L+D)}}-\frac{1}{\alpha}=0$$

یعنی

$$V_m=\gamma\sqrt{\frac{2(L+D)}{\alpha^2+\gamma}}$$

اگر این مقدار V_m را در رابطه (٤) ببریم مقدار z_m چنین بدست می‌آید :

$$z_m=\alpha\sqrt{\frac{2(L+D)}{\alpha^2+\gamma}}$$

پس در اینجا نیز بین z_m و V_m یک رابطه خطی ساده به‌صورت

$$z_m=\frac{\alpha}{\gamma}V_m$$

برقرار است.

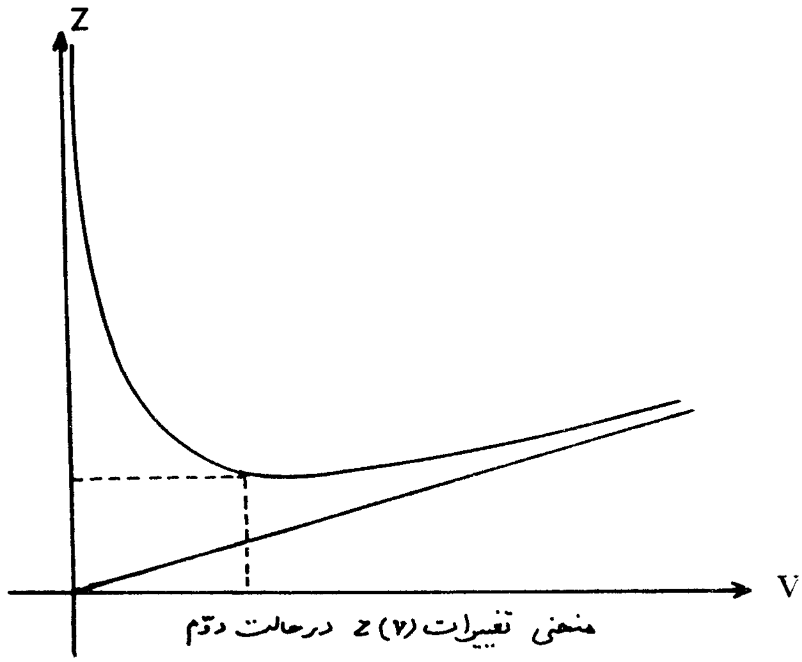
جدول تغییرات ومنحنی z برحسب V شبیه حالت اول است. باین ترتیب که خطوط $V=0$ و :

$$z=\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma}}-\frac{1}{\alpha}\right)V$$

مجانب‌های منحنی مزبور هستند ونتایئج بدست آمده به‌صورت زیراست :

جدول تغییرات z برحسب V وبرای مقادیر : $D=۵۰$ $L=۱۰۰$ $\alpha=۰٫۸$ $\gamma=۱$

V به کیلو متر در ساعت	۹	۱۸	۳۶	٤۸/۷	۷۲	۹۰	۱۰۸
$\frac{dz}{dv}$		-	۰	+			
Z	۱٤/۷	۱۳	۱۱/۳	۱۰/۸	۱۱/٤	۱۲/٤	۱۳/٦

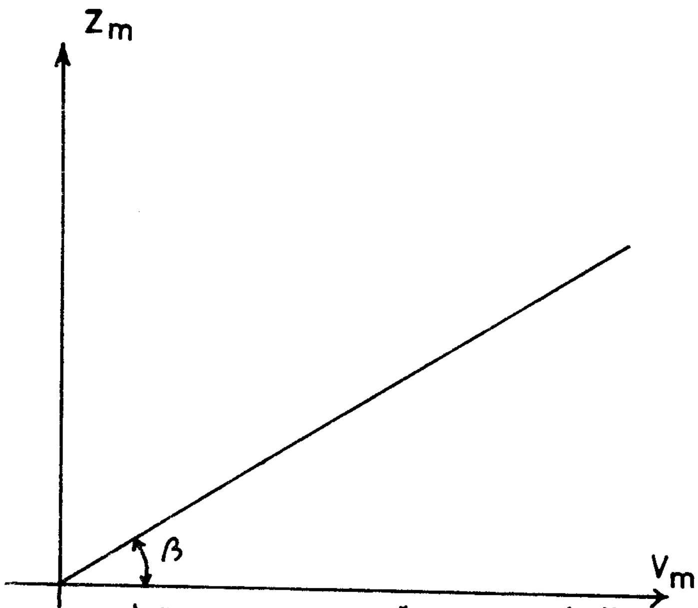


منحنی تغییرات z (۷) درحالت دوم

بهطوریکه ملاحظه میشود منحنی تغییرات دراین حالت هم کاملا شبیه حالت قبل است وفقط شیب مجانب آن کمتر از شیب مجانب در حالت اول است. ضمناً باید توجه داشت که V سرعت قطار دوم است .

۲ـ۵ـ فاصله حداقل بهصورت تابعی از سرعت اپتیمال :

دراینجا نیز باتوجهبهرابطه $z_m = \frac{\alpha}{\gamma} V_m$ مشاهده میشود که z_m یک تابع خطی از V_m است و منحنی تغییرات آن یکخط بازاویه β است بطوریکه $tg\beta = \frac{\alpha}{\gamma}$ است.



تغییرات فاصله حداقل برحسب سرعت اپتیمال

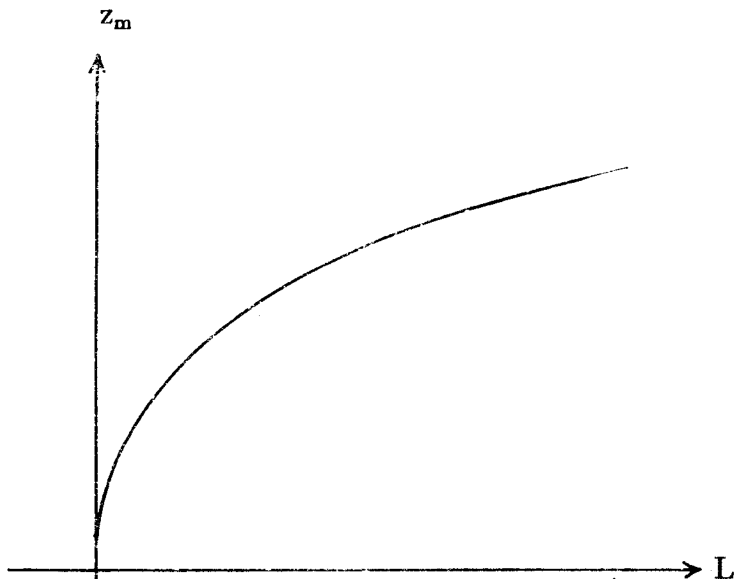
۳ـ۵ـ مطالعه z_m و V_m بهصورت توابعی از L و D :

دراینجا مثل حالت قبل z_m و V_m توابع مطلقاً افزایشی از پارامترهای L و D هستند و جدول تغییرات z_m و V_m بهصورت تابعی از L بهصورت زیراست:

جدول تغییرات z_m و V_m بهصورت تابعی از L برای مقادیر $\gamma =$ ۱ و $\alpha =$ ۰٫۸ و $D =$ ۵۰

L بهمتر	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	٤۰۰
z_m بهثانیه	۱۰/۸	۱۲/۵	۱۵/۳	۱۷/۷
V_m بهکیلومتر درساعت	٤۸/۷	۵٦/۲	٦۹/۵	۷۹/۵
V'_m بهکیلومتر درساعت	۷۹/۸	۹۲/۲	۱۱۳/۵	۱۳۰/۵

V'_m سرعت قطار اول است.



منحنی تغییرات فاصله زمانی اپتیمال برحسب
طول قطار درحالت دوم

٦- **نتیجه** : از بررسی فوق چنین برمی‌آید که فاصله زمانی بین دوقطار متوالی چه درحالت سرعت ثابت وچه برای سرعت افزاینده باید برای سرعت‌های کم وسرعت‌های زیاد بیشتر از سرعت‌های متوسط باشد. در صورتیکه طول هریک از قطارها ۱۰۰ متر وفاصله ایمنی بعداز توقف آنها ٥۰ متر فرض شود. فاصله زمانی حداقل در حالت سرعت ثابت برابر ۱۷/۳ ثانیه وسرعت اپتیمال مربوط ٦۲/۳ کیلومتر در ساعت ودر حالت سرعت افزاینده باشتاب ۰/۸ متر برثانیه برابر ۱۰/۸ ثانیه وباسرعت اپتیمال مربوط ٤۸/۷ کیلومتر درساعت برای قطار دوم یعنی ۷۹/۸ کیلومتر در ساعت برای قطار اول است به‌طوریکه میانگین دوسرعت ٦٤/۲٥ کیلومتر در ساعت وعددی خیلی نزدیک به‌حالت اول است.

بعلاوه همانطورکه جدول‌های ٤-٤و۳-٥ نشان میدهند فاصله زمانی حداقل وسرعت اپتیمال باطول قطار ـ افزایش مییابد ومنحنی تغییرات آنها به‌صورت یک شاخه سهمی است.

مسئله بسیار قابل توجه اینست که فاصله زمانی حداقل بین دوقطار وسرعت اپتیمال قطاردوم در حالت سرعت ثابت بزرگتراز حالت دوم یعنی حالت سرعت افزاینده است.

منابع :

BIAIS (1964) — Cours de chemin de fer, E. N. P. C. Paris.

LANCE (1967) — Etude sur l'intervalle minimum des trains S. N. C. F. Paris.

FAURE (1970) — Recherche Operationnelle, E. N. S. E. Paris.

MEHRAZINE (1971) — Mathématiques et Economie appliquées aux transports, Université Paris.

MEHRAZINE (1977) — Interstation optimale sur une ligne de chemin de fer. R. G. C. F. Paris.