محاسبه مشخصات لازم برای حل تابها باتیرهای اینرسی متغیر

نوشته :

ابراهیم چینی فروش

فارغ التحصیل پلی‌تکنیک تهران

معلم هنرسرای عالی

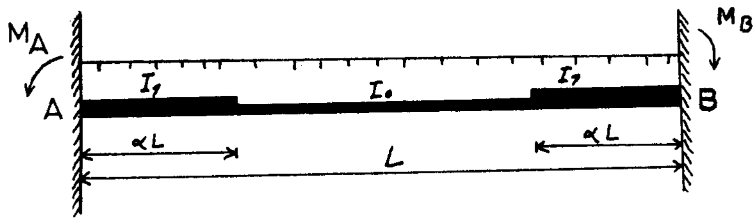
مقدمه ـ در طرح محاسبه ساختمانهای نامعین بتن‌آرمه یافلزی سعی میشود از نظر اقتصادی حداکثر استفاده از مصالح مصرفی بعمل آید برای رسیدن باین هدف مقاطع تیرها و بعضی‌اوقات ستونها را طوری‌طرح می‌کنند که توزیع تنش در تمام مقاطع یکسان باشد. بدین منظور برای جذب لنگر منفی درکنار بندها اغلب تیرها را ماهیچه‌دار میسازند ومشخصات لازم برای این قبیل‌تیرها از جدول Guldan و غیره که‌برای ماهیچه‌های سهمی و خطی داده شده است قابل استخراج میباشد.

دراین مقاله فقط محاسبهٔ مشخصات در تیرهای فلزی با صفحات تقویتی درکنار بندها (برای جذب لنگرهای منفی) بررسی میشود. البته در محاسبه ساختمانهادرمقابل زلزله استفاده از این مطالب لازم‌است چون لنگر نیروهای افقی بین دو سر یک تیر بطور خطی پخش میشود و تقریباً نقطه صفر وسط دهانه آن تیر میباشد پس کافی است لنگر تولید شده براثر نیروهای افقی که فقط درکنار بندها قابل توجه میباشد توسط صفحات تقویتی جذب گردد.

لازم به تذکر است که محاسبات عرضه شده دراین مقاله‌جنبه تحقیقاتی نداشته ، فقط استفاده‌عملی از معادلات معروف انرژی را بیان می‌کند. ضمناً اضافه می‌نماید چون نویسنده درموقع محاسبه یک ساختمان مرتفع به این مشخصات نیاز پیدا کرده بود و با مراجعهٔ بکتابهای فرانسه که در دسترس نویسنده و فاقد این جداول بود لذا اینجانب را برآن داشت محاسبات را شخصاً انجام دهد. واگر چنین جداولی درکتابهای انگلیسی یا آلمانی موجود باشد نویسنده از آن بی‌اطلاع بوده است دراین مقاله ضرائب سختی و انتقال و ضریب لنگرگیرداری ـ همچنین زوایای دوران انتهای تیرها مورد مطالعه قرارگرفته است . ضمناً دو نوع تیر موردبررسی‌واقع شدهٔ است : ۱ـ تیر متقارن با اینرسی متغیر. ۲ـ تیر غیر متقارن بااینرسی متغیر.

الف ـ تیرمقارن :

۱ـ مبحاله لنسگر گیرداری کامل برای تیر دو سر کاملاً گیردار که تحت‌تأثیر بارگسترده یکنواخت قرار داشته باشد.



شکل (۱)

عبارت لنگر خمشی در مقطع بفاصله x بشرح زیر است :

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_A + q\frac{L}{2}x - q\frac{x^2}{2}$$

انرژی تغییر شکل بصورت زیر نوشته میشود :

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M^2_x}{EI_x}dx$$

اگر تکیه‌گاهها غیر قابل نشت فرض شود بااستفاده از قضیه حداقل کار داریم :

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = \int \frac{M_x \cdot M'_x}{EI_x}dx = 0$$

$$M'_x = \frac{\partial M_x}{\partial M_A} = 1$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = \int\left(M_A + q\frac{L}{2}x - q\frac{x^2}{2}\right)\times\frac{1\times dx}{EIx} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = K_1\int_V^\beta f(x)dx + K_2\int_\beta^\gamma f(x)dx + K_1\int_\gamma^\theta f(x)dx = 0$$

که در آن :

$$\frac{1}{EI_1} = K_1$$

و :

$$\frac{1}{EI_0} = K_2$$

می‌باشد.

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = K_1 F(x)_v^{\beta} + K_2 F(x)_{\beta}^{\gamma} + K_1 F(x)_{\gamma}^{\theta} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = K_1[F(\beta) - F(v)] + K_2[F(\gamma) - F(\beta)] + K_1[F(\theta) - F(\gamma)] = 0$$

$$F(\beta)(K_1 - K_2) + (K_2 - K_1)F(\gamma) - K_1 F(v) + K_1 F(\theta) = 0$$

در محاسبه تیر مورد نظر :

$$v = 0 \text{ ، } \beta = \alpha L \text{ ، } \gamma = (1-\alpha)L \text{ ، } \theta = L$$

بعداز ایجام تمام محاسبات نتیجه زیر بدست می‌آید :

$$M_A = -\frac{qL^2}{12} \frac{\left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right)[\alpha^2(3-2\alpha) - (1-\alpha)^2(1+2\alpha)] + 1}{2\alpha\left(1 - \frac{K_2}{K_1}\right) + \frac{K_2}{K_1}} = -\mu \frac{qL^2}{12}$$

یا بصورت دیگر :

$$M_A = -\frac{qL^2}{12} \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} - 1\right)[\alpha^2(3-2\alpha) - (1-\alpha)^2(1+2\alpha)] + \frac{K}{K_1}}{2\alpha\left(\frac{K_1}{K_2} - 1\right) + 1}$$

مثال : حالت خاص :

$$I_1 = \infty$$

$$K_1 = \frac{1}{EI_1} = 0$$

$$\frac{K_1}{K_2} = 0 \qquad (K_2 \neq 0)$$

$$M_A = \frac{qL^2}{12} \cdot \frac{[\alpha^2(3-2\alpha) - (1-\alpha)^2(1+2\alpha)]}{1-2\alpha}$$

و اگر $\alpha = 0.1$ هم باشد :

$$M_A = \frac{\frac{1}{-100}(2.8) - 0.81 \times 1.2}{0.8} \times \frac{qL^2}{12}$$

خواهد بود :

$$\boxed{M_A = -0.0983 qL^2}$$

با قرار دادن :

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{I_0}{I_1}=n \quad \text{در عبارت } \mu$$

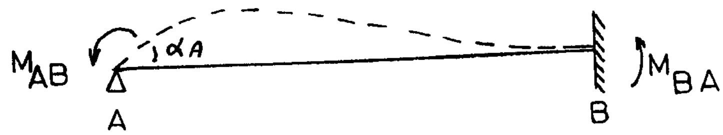
مقدار آن بصورت زیر :

$$\mu=\frac{1+2\alpha^2(1-n)(2\alpha-3)}{1+2\alpha(n-1)}$$

میباشد : مقادیر مختلفه μ در جدول ضمیمه داده شده است.

۲ـ محاسبه ضریب انتقال :

تیر شکل (۱) را با همان مشخصات لنگرماند درنظر میگیریم فرض می کنیم که تیر در B گیردار



شکل (۲)

و در A برتکیه گاه ساده تکیه دارد و در مقطع A لنگر M_{AB} برتیر اثر کند دراینصورت داریم :

$$bM_{AB}+aM_{BA}=0$$

$$bM_{BA}=-\frac{b}{a}M_{AB}$$

$$M_{BA}=KM_{BA}$$

که در آن a و b مقادیر زیر خواهند بود :

$$a=\frac{L}{3EI_0}\left[1+(1-n)(3\alpha^2-3\alpha-2\alpha^3)\right]$$

$$b=\frac{L}{6EI_0}\left[1+(1-n)(4\alpha^3-6\alpha^2)\right]$$

اگردر $K=-\frac{b}{a}$ مقادیر a و b قرار دهیم مقدار آن بعبارت زیر خواهد بود :

$$-\frac{b}{a}=K=-\frac{1}{2}\;\frac{1+(1-n)(4\alpha^3-6\alpha^2)}{1+(1-n)(3\alpha^2-3\alpha-2\alpha^3)}$$

حالت خاص :

$$n=1 \implies K=-\frac{1}{2}$$

$$n=0 \qquad \alpha=0.1 \implies K=-0.649$$

۳ـ محاسبه ضریب سختی :

تعریف ضریب سختی ـ ضریب سختی مقدار لنگر خمشی است که در نقطه A برتیر AB (شکل ۲) اثر کرده ایجاد زاویه‌ائی مساوی یک رادیان در نقطه A بنماید بعبارت دیگر :

$$\alpha_A = 1 \quad M_{AB} = R_{AB}$$

با درنظرگرفتن تیر نشان داده شده در شکل ۲ می‌توان نوشت :

$$\alpha_A = aM_{AB} + bM_{BA}$$

با درنظرگرفتن $M_{BA} = -\frac{b}{a} M_{AB}$ خواهیم داشت :

$$\alpha_A = M_{AB}\left(a - \frac{b^2}{a}\right) = M_{AB}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)$$

$$1 = R_{AB}\left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right) \Longrightarrow \boxed{R_{AB} = \frac{a}{a^2 - b^2}}$$

با درنظرگرفتن مقادیر a و b برحسب α و n ضرائب سختی به ترتیب زیر بدست می‌آید :

$$R_{AB} = R_{BA} = \frac{3EI_\circ}{L} \cdot \frac{1 + (1 - n)(3\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha^3)}{\left[\frac{3}{2} - 3\alpha(1 - n)\right]\left[\frac{1}{2} + (1 - n)(6\alpha^2 - 4\alpha^3 - 3\alpha)\right]}$$

حالت خاص :

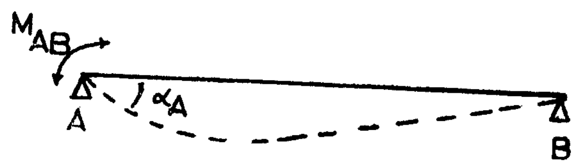
$$n = 1 \Longrightarrow R_{AB} = R_{BA} = 4\frac{EI_\circ}{L}$$

$$n = \circ \quad \alpha = 0.1 \Longrightarrow R_{AB} = R_{BA} = 7.11\frac{EI_\circ}{L}$$

$$n = \circ \quad = \alpha = 0.2 \Longrightarrow R_{AB} = R_{BA} = 15.56\frac{EI_\circ}{L}$$

٤ـ ضریب سختی برای تیری که یک طرف گیردار و طرف دیگر مفصلی باشد :

$$M_{BA} = \circ$$



شکل (۳)

تبصره : بجای ↻ باید علامت ↺ گذاشته شود

$$\alpha_A = aM_{AB} + bM_{BA}$$

$$\alpha_A = aM_{AB}$$

$$1 = aR_{AB} \implies R_{AB} = \frac{1}{a}$$

$$R_{AB} = \frac{3EI_\circ}{L}[1 + (1-n)(3\alpha^2 - 3\alpha - 2\alpha^3)]$$

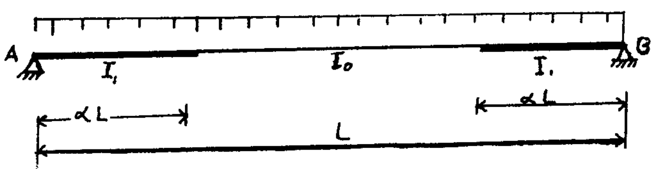
حالت خالص :

$$n = 1 \implies R_{AB} = \frac{3EI_\circ}{L}$$

$$n = \circ \quad \alpha = 0 \cdot 1 \implies R_{AB} = 2 \cdot 184 \frac{EI_\circ}{L}$$

۵- محاسبه زاویه دوران :

تیر شکل (۱) را با همان مشخصات برروی دو تکیه گاه ساده درنظر می گیریم .



شکل (٤)

مقدار لنگر خمشی در مقطعی بفاصله x بشرح زیر است :

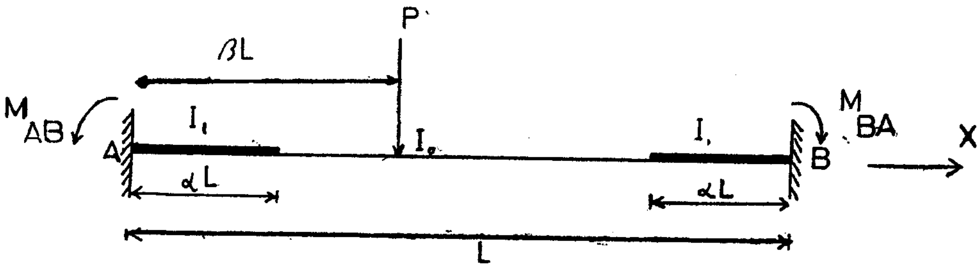
$$m_x = \frac{1}{2}qx(L-x)$$

$$\omega_A = -\omega_B = \int_\circ^{\alpha L} \frac{qx}{2} \cdot \frac{L-x}{EI_1} dx + \int_{\alpha L}^{\frac{L}{2}} q\frac{x}{2} \cdot \frac{L-x}{EI_\circ} dx$$

$$\omega_A = -\omega_B = \frac{q}{2EI_1}\left[\frac{x^2}{2}L - \frac{x^3}{3}\right]_\circ^{\alpha L} + \frac{q}{2EI_\circ}\left[\frac{x^2}{2}L - \frac{x^3}{3}\right]_{\alpha L}^{\frac{L}{2}}$$

$$\omega_A = -\omega_B = -\frac{qL^3}{2EI_\circ}\left[\frac{1}{12} + (1-n)\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\right)\right]$$

۶ـ محاسبه لنگرگیرداری کامل برای تیر دو سرگیردار که‌تحت‌تأثیر بار منفرد P قرارگرفته است.



شکل (٥)

$$M_x=m+M_{BA}+\left(\frac{L-x}{L}\right)(M_{AB}-M_{BA})$$

$$M_x=m+M_{BA}+\left(1-\frac{x}{L}\right)(M_{AB}-M_{BA})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_{AB}}=1-\frac{x}{L} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_{BA}}=\frac{x}{L}$$

$$m=Px(1-\beta) \implies 0<x<\beta L$$

$$m=P\beta(A-x) \implies \beta L<x<L$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_{BA}}=\int_0^{\beta L}\left[m+M_{AB}+\frac{x}{L}(M_{BA}-M_{AB})\right]\frac{x}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+$$

$$\int_{\beta L}^{L}\left[m+M_{AB}+\frac{x}{L}(M_{BA}-M_{AB})\right]\frac{x}{L}\cdot\frac{xdx}{LEIx}=0$$

$$M_{AB}\left[\int_0^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_x}\right]$$

$$+M_{BA}\left[\int_0^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}\right]$$

$$+\int_0^{\beta L}m\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}m\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}=0$$

با فرض :

$$\left\{\begin{array}{l}
\int_{0}^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{2}\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{2}\frac{dx}{EI_x}=a \\
\int_{0}^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}=b \\
\int_{0}^{\beta L}m\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}m\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{dx}{EI_x}=+d
\end{array}\right.$$

نتیده میشود :

$$\boxed{aM_{AB}+bM_{BA}+d=0}$$

همچنین داریم :

$$M_{AB}\left[\int_{0}^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}\right]+$$

$$\left[\int_{0}^{\beta L}\frac{x^2}{L^2}\cdot\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\frac{x^2}{L^2}\cdot\frac{dx}{EI_x}\right]M_{BA}+\int_{0}^{\beta L}\frac{mx}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+$$

$$+\int_{\beta L}^{L}\frac{mx}{L}\,\frac{dx}{EI_x}=0$$

با فرض :

$$\left\{\begin{array}{l}
\int_{0}^{\beta L}\frac{x^2}{L^2}\,\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\frac{x^2}{L^2}\cdot\frac{dx}{EI_x}=c \\
\int_{0}^{\beta L}\frac{mx}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\frac{mx}{L}\cdot\frac{dx}{EI_x}=+e
\end{array}\right.$$

نتیجه میشود :

$$\boxed{bM_{AB}+cM_{BC}+e=0}$$

از دو معادله زیر مقادیر M_{AB} و M_{BA} بدست می‌آیند :

$$\left\{\begin{array}{l}
aM_{AB}+bM_{BA}+d=0 \\
bM_{AB}+cM_{BA}+e=0
\end{array}\right.$$

$$M_{AB}=\frac{-dc+eb}{ac-b^2}$$

$$M_{BA}=\frac{-ae+bd}{ac-b^2}$$

در تیرهای متقارن $a=c$ می‌باشد پس :

$$M_{AB}=\frac{-dc+eb}{a^2-b^2}$$

$$M_{BA}=\frac{-ae+bd}{a^2-b^2}$$

۷ـ محاسبه ضرائب ثابت :

$$a=\int_{\circ}^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_x}+\int_{\beta L}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_x}$$

$$a=\int_{\circ}^{\alpha L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_1}+\int_{\alpha L}^{\beta L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_\circ}+\int_{\beta L}^{L-\alpha L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_\circ}+$$

$$+\int_{L-\alpha L}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_1}$$

$$a=\int_{\circ}^{\alpha L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_1}+\int_{\alpha L}^{L(1-\alpha)}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_\circ}+\int_{L(1-\alpha)}^{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2\frac{dx}{EI_1}$$

$$a=\frac{1}{EI_1}F(x)_{\circ}^{\alpha L}+\frac{1}{EI_\circ}F(x)_{\alpha L}^{L(1-\alpha)}+\frac{1}{EI_1}F(x)_{L(1-\alpha)}^{L}$$

$$a=\frac{1}{EI_1}F(\alpha L)+\frac{1}{EI_\circ}[L(1-\alpha)]-\frac{1}{EI_\circ}F(\alpha L)+\frac{1}{EI_1}F(L)-$$

$$-\frac{1}{EI_1}F[L\times(1-\alpha)]$$

$$a=\frac{1}{EI_1}F(L)+\left(\frac{1}{EI_\circ}-\frac{1}{EI_1}\right)[(F(L-\alpha L)-F(\alpha L)]$$

با فرض $\frac{I_\circ}{I_1}=n$ و بکار بردن مقادیر $F(L)$ و $F(\alpha L)$ و $F(L-\alpha L)$ نتیجه زیر حاصل میشود :

$$\frac{3EI_\circ}{L}a=\frac{3EI_\circ}{L}c=1+(1-n)(-2\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha)$$

به طریق مشابهٔ بقیه ضرائب نیز بدست می‌آیند :

$$\frac{6EI_\circ}{L}\,b=1+(1-n)(4\alpha^3-6\alpha^2)$$

$$\frac{6EI_\circ e}{PL^2}=(n-1)[2\alpha^3(1-2\beta)+3\beta\alpha^2]+\beta(1-\beta^2)$$

$$\frac{6EI_\circ d}{PL^2}=(1-\beta)\beta(2-\beta)+(n-1)\alpha^2[3(1\cdot\beta)-2\alpha(1-2\beta)]$$

$$F(x)=\int\frac{P}{L}\,(1-\beta)x^2dx=\frac{P}{3}\,(1-\beta)x^3$$

$$F'(x)=\int\frac{P\beta}{L}\,(L-x)xdx=\frac{P\beta}{L}\left(\frac{L}{2}-\frac{x}{3}\right)x^2$$

بعداز انجام عملیات و خلاصه کردن نتیجه میشود :

$$\begin{cases} M_{BA}=\mu_{BA}\cdot PL \\ M_{AB}=\mu_{AB}\cdot PL \end{cases}$$

که مقادیر عددی μ_{AB} و μ_{BA} بازاء مقادیر مختلف n و α و β در جداول داده خواهد شد.

بقیه در شمارهٔ بعد