«حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال با توابع والش[۱]»

IEEE* Transaction on «Circuit Theory» September 1973 No. 5

by : Murlan S. Corrington

ترجمهٔ

جلیل راشد

دانشجوی سال چهارم برق دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده :

هرشکل موج متناوب و مناسب[۲] را می‌توان بصورت یک سری از توابع والش بیان کرد. اگر سری در انتهای گروهی از جملات با مرتبهٔ معین قطع گردد جمع جزئی جمل تقریب پلکانی[۳] شکل موج خواهد بود. بلندی هرپله مساوی مقدار متوسط شکل موج درهمان فاصله خواهد بود.

اگر یک تبدیل غیرخطی حافظ صفر[۴] به‌یک سری والش اعمال گردد ، سری حاصل را می‌توان با اعمال جبری ساده بدست آورد. ضرایب‌سری‌اولیه تغییر خواهدکرد اما جمله‌های جدیدی درگروههای‌اصلی وجود نخواهد داشت.

معادلات دیفرانسیل و انتگرال غیرخطی بصورت یک سری والش قابل حل‌اند زیرا ازسری مشتقات آنها باکاوشی ساده در جدول همیشه می‌توان انتگرال گرفت. معادلهٔ دیفرانسیل ابتدا برای بالاترین مرتبهٔ مشتق حل و سپس از نتیجهٔ حاصل به‌تعداد دفعات لازم برای تعیین جواب انتگرال گیری می‌شود.

مقدمه

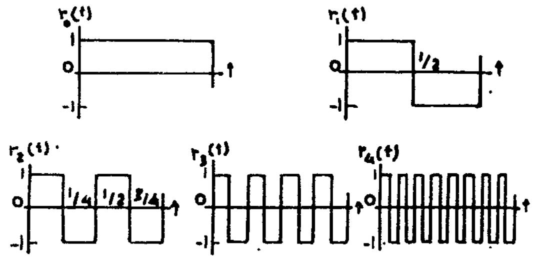
نظربه‌اینکه توابع‌والش اکثرخواص سری فوریه را داشته اما برای مطالعات سیستم‌های غیرخطی بسیارمناسب می‌باشند؛ امروزه بطور وسیعی درتجزیه‌وتحلیل‌سیستم‌های ارتباطی‌بکارمی‌روند. طرزنمایش‌های بکار رفته برای توابع والش‌توسط مؤلفان مختلف استاندارد نیست وبنابراین دراینجا دوباره گفته خواهد شد.

---

۱ - Walsh ۲ - Well - behaved ۳ - Stairstep ۴ - Zero - memory

* Institute of Electrical and Electronics Engineers. Inc.

مجموعهٔ ناقصی از توابع مستطیلی متناوب و متعامد توسط Rademacher در 1922 ایجاد شد. پنج تای اول آن‌ها در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. اولین آنها ، $r_0(t)$ برای $0 \leqslant t \leqslant 1$ مساوی واحد است.



شکل ۱ - توابع Rademacher

تابع بعدی $r_1(t)$ همانطورکه نشان داده شده است یک موج مربعی با ارتفاع واحد و پریودی مساوی یک می‌باشد. هر شکل موج متوالی $r_{k+1}(t)$ یک موج مربعی با نصف پریود موج قبلی $r_k(t)$ می‌باشد ؛ یا $r_{k+1}(t)=r_k(2t)$. تعداد سیکل های موج‌مربعی $r_k(t)$ در $0 \leqslant t \leqslant 1$ مساوی 2^{k-1} می‌باشد. توابع مزبور متناوب‌اند بنابراین $r_k(t+n)=r_k(t)$ که درآن $n=\pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \dots , $.

تمام توابع Rademacher حول $t=0$ و $t=\frac{1}{2}$ تقارن فرد دارند. مفهوم آن اینست که مجموعه ناقص است زیرا مجموع هرتعداد از توابع حول ایندونقطه تقارن فرد خواهد داشت. تابعی را که درحول $t=0$ یا $t=\frac{1}{2}$ تقارن زوج‌دارد نمی‌توان با یک سری‌از $r_k(t)$ بسط داد.

« توابع والش »

توابع Redemacher توسط والش ترکیب شده‌اند تا یک مجموعهٔ کامل‌متعامد ازشکل موج های مستطیلی‌تشکیل دهند. نمایش های بکار رفته دراین بحث با طرزنمایش های داده شده توسط والش یکسان نیستند اما توابع همان شکل را دارا می‌باشند.

گیریم $b_n \cdots b_2 b_1$ یک‌عدد باینری[1] n رقمی باشد که b_i ها هرکدام . یا ۱ بوده و $b_n=1$ میباشد توابع والش توسط حاصلضرب n تابع Rademacher تعریف می گردد :

$$\psi_{b_n \cdots b_2 b_1}(t)=[r_n(t)]^{b_n} \cdots [r_2(t)]^{b_2} [r_1(t)]^{b_1} \qquad (۱)$$

۱ - Binary

بنابراین :

$$\psi_{0}(t)=r_{0}(t) \quad (۲)$$

$$\psi_{1}(t)=r_{1}(t) \quad (۳)$$

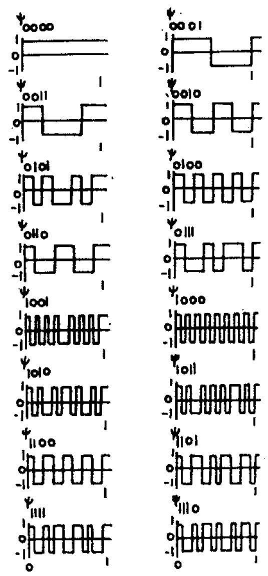
$$\psi_{10}(t)=r_{2}(t) \quad (۴)$$

$$\psi_{11}(t)=r_{2}(t)\cdot r_{1}(t) \quad (۵)$$

$$\psi_{100}(t)=r_{3}(t) \quad (۶)$$

$$\psi_{101}(t)=r_{3}(t)r_{1}(t) \quad (۷)$$

دربحثی که دنبال می‌شود زیرنویس با ارقام باینری معمولاً برای مشخص کردن توابع والش بکار می‌رود اما گاهی برای سهولت حرف معادلی بکار خواهد رفت، ۱۶ تابع اول ازاین دسته درشکل ۲ نشان داده شده‌اند. توابع ستون چپ تقارن زوج و توابع ستون راست تقارن فرد درحول مبداء دارند.



شکل ۲ - توابع والش

ضرب :

اگر دوتابع والش

$$\psi_{b_n\cdots b_2 b_1}=[r_n(t)]^{b_n}\cdots[r_2(t)]^{b_2}[r_1(t)]^{b_1}$$

و :

$$\psi_{a_m\cdots a_2 a_1}=[r_m(t)]^{a_m}\cdots[r_2(t)]^{a_2}[r_1(t)]^{a_1} \quad (۹)$$

درهم‌ضرب شوند حاصلضرب را می‌توان از جمع کردن ارقام باینری درمبنای ۲ بدست آورد زیرا توان دوم هرتابع Rademacher درحاصلضرب (۸) و (۹) برابر واحد است بنابراین توابع والش تحت عمل ضرب مجموعه‌ای بسته تشکیل می‌دهند.

مثال : $\psi_{101}(t)$ را در $\psi_{11}(t)$ ضرب کنید. با جمع ارقام بانیری درمبنای ۲ ؛

$$\psi_{101}(t)\times\psi_{11}(t) = \psi_{110}(t)$$

این مطلب را می‌توان با شکل ۲ امتحان نمود.

تعامد :

ثابت شده است که توابع والش در $0\leqslant t\leqslant 1$ یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. بنابراین.

$$\int_0^1 \psi_m(t)\times\psi_n(t)dt=0 \qquad m\neq n \qquad (۱۰)$$

$$=1 \qquad m=n$$

سری والش

هرتابع $f(t)$ را که در فاصلهٔ $0\leqslant t\leqslant 1$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد می‌توان بصورت یک سری بشکل

$$f(t)= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\psi_n(t) \qquad (۱۱)$$

بسط داد که ثابت‌های C_n از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$C_n=\int_0^1 f(t)\psi_n(t)dt \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (۱۲)$$

همگرایی

شرایط همگرایی توسط Walsh ، Paley ، و Fine داده شده‌اند. اگر $f(t)$ در $0\leqslant t\leqslant 1$ پیوسته باشد؛ سری (۱۱) بطوریکنواخت بسمت مقدار $f(t)$ میل خواهد کرد ، بشرط‌آنکه جملات طوری دسته‌بندی شوند که هردسته حاوی تمام توابع والشی باشد که با یک عدد از ارقام بینری داده شده معرفی شده است. اگر $f(t)$ پیوسته نباشد ، همگرایی مقدار متوسط وجود خواهد داشت. اگر سری والش در انتهای هرگروه که توسط جملاتی با n رقم باینری مشخص شده قطع شود ، مجموع جزئی [1] 2^n جملهٔ اول سری مساوی میانگین تابع در هرزیرفاصله بطول 2^{-n} خواهد بود.

---

۱ - Partial

سری والش برای t^m ؛ $o \leqslant t \leqslant 1$ ، $m=0,1,2,\ldots$

سری والش برای $f(t)=t^m$ ، $o \leqslant t \leqslant 1$ ، $m=0,1,2,\ldots$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n(m)\psi_n(t) \tag{۱۳}$$

از رابطهٔ :

$$D_n(m)=\int_0^1 t^m\psi_n(t)dt \tag{۱٤}$$

بدست می‌آید. برای بدست آوردن یک $D_n(m)$ داده شده، بسهولت می‌توان مقدار انتگرال برای ضریب والش موردنظر را با طریقهٔ جزء بجزء محاسبه کرد.

مثال : با استفاده از انتگرال گیری جزء بجزء فرمولی برای $D_{10}(m)$ بدست آورید.

$$D_{10}(m)=\int_0^1 t^m\psi_{10}(t)dt$$

$$=\left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\psi_{10}(t)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{t^{m+1}}{m+1}\psi_{10}{}^{(t)}(t)dt$$

$$=-\int_0^1 \frac{t^{m+1}}{m+1}\left[\delta(t)-2\delta\left(t-\frac{1}{4}\right)+2\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)-2\delta\left(t-\frac{3}{4}\right)+\delta(t-1)\right]dt$$

$$=\frac{2}{4^{m+1}(m+1)}\left[1-2^{m+1}+3^{m+1}-\frac{1}{2}4^{m+1}\right] \tag{۱۵}$$

که درآن $\delta(t)$ تابع ضربهٔ واحد است. با این عمل ثابت‌های جدول I نتیجه می‌شوند. جدول مزبور را می‌توان برای بسط یک چند جمله‌ای از t از فاصلهٔ $o \leqslant t \leqslant 1$ بصورت یک سری از توابع والش بکمک بسط هرتوان از t به‌یک‌سری والش و جمع نتایج پس‌ازضرب درضرایب چندجمله‌ای بکاربرد.

انتگرال‌گیری توابع والش

انتگرال‌های نامعین چهار تا از اولین توابع والش درشکل ۳ نشان داده شده‌اند پس :

جدول ۱ ـ ضرایب سری والش

$$D_n(m)=\int_0^1 t^m\psi_n(t)\,dt \qquad\qquad t^m=\sum_{n=0}^{\infty} D_n(m)\psi_n(t)$$

n=	m=0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{-7}{32}$	$\frac{-3}{16}$	$\frac{-31}{192}$	$\frac{-9}{64}$	$\frac{-127}{1024}$	$\frac{-85}{768}$
10	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{-31}{256}$	$\frac{-15}{128}$	$\frac{-691}{6144}$	$\frac{-219}{2048}$	$\frac{-13231}{131072}$	$\frac{-9325}{98304}$
11	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{55}{512}$	$\frac{429}{4096}$	$\frac{819}{8192}$	$\frac{18565}{196608}$
100	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{-127}{2048}$	$\frac{-63}{1024}$	$\frac{-11971}{196608}$	$\frac{-3939}{65536}$	$\frac{-993007}{16777216}$	$\frac{-731725}{12582912}$
101	0	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{111}{2048}$	$\frac{235}{4096}$	$\frac{7659}{131072}$	$\frac{15309}{262144}$	$\frac{1454125}{25165824}$
110	0	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{123}{4096}$	$\frac{295}{8192}$	$\frac{10749}{262144}$	$\frac{23499}{524288}$	$\frac{2390725}{50331648}$
111	0	0	0	$\frac{-3}{256}$	$\frac{-3}{128}$	$\frac{-535}{16384}$	$\frac{-645}{16384}$	$\frac{-46179}{1048576}$	$\frac{-37065}{786432}$
1000	0	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-511}{16384}$	$\frac{-255}{8192}$	$\frac{-195331}{6291456}$	$\frac{-64899}{2097152}$	$\frac{-66198511}{2147483648}$	$\frac{-49424845}{1610612736}$

$$I_0(x)=\int_0^x \psi_0(t)dt=x \;, \qquad o\leqslant x<1$$

$$=\frac{1}{2}\psi_\circ(x)-\frac{1}{4}\psi_1(x)-\frac{1}{8}\psi_{10}(x)-\frac{1}{16}\psi_{100}(x)-\cdots \qquad (۱۶)$$

بطور مشابه با جدول I :

$$I_1(x)=\int_0^x \psi_1(t)dt=x \;, \qquad o\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$$

$$=1-x \qquad \frac{1}{2}\leqslant x<1$$

$$=\frac{1}{2}x\Big[\psi_\circ(x)+\psi_1(x)\Big]+\frac{1}{2}(1-x)\,[\psi_\circ(x)-\psi_1(x)]$$

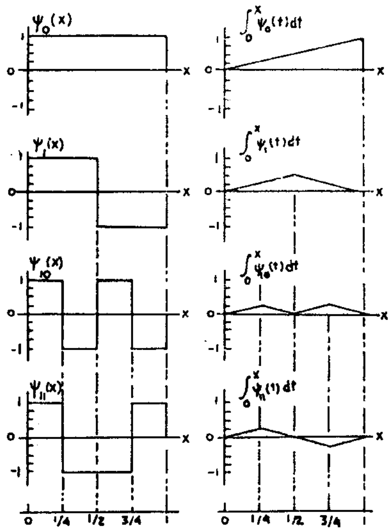
$$=\frac{1}{2}\psi_\circ(x)-\frac{1}{2}\psi_1(x)+x\psi_1(x)$$

$$=\frac{1}{4}\psi_\circ(x)-\frac{1}{8}\psi_{11}(x)-\frac{1}{16}\psi_{101}(x)-\frac{1}{32}\psi_{1001}(x)\cdots \qquad (۱۷)$$

هرانتگرال می‌تواند بوسیلهٔ یک سری بیان گردد.

$$\int_0^x \psi_n(t)dt=\sum_{m=0}^{\infty}E_n(m)\psi_m(x)$$

که $E_n(m)$ ها با جدول II داده شده‌اند.



شکل ۳ - انتگرال توابع والش

جدول ۲ ـ ضرایب $E_n(m)$ برای انتگرال‌گیری توابع والش

n=	m=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{-1}{16}$	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{-1}{16}$	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0	0	0	0	0
10	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{16}$	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0	0	0	0
11	0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{16}$	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0	0	0
100	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0	0
101	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0	0
110	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{32}$	0
111	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{32}$
1000	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1001	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1010	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1011	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1100	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1101	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1110	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1111	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0

حل معادلات دیفرانسیل با توابع والش

وقتی از توابع والش مشتق گرفته می‌شود ، نتیجهٔ حاصل یک سری از توابع دلتای دیراک هریک برای یک ناپیوستگی؛ باعلائم یک‌درمیان می‌باشد. مشتقات مرتبهٔ دوم و بالاتر ازآن به‌توابع ویژه مراتب بالا منجر می‌گردند. مطالعهٔ دقیق این توابع نشان داده است که چنین سری‌هائی چندان درحل معادلات دیفرانسیل مفید نیستند زیرا سری‌های حاصله معمولاً واگرا می‌باشند.

بطوریکه درشکل ۳ نشان داده شده چنانچه از توابع والش انتگرال گرفته شود ناپیوستگی ازبین می‌رود. انتگرالهای متوالی تابع راحتی بیشتر هموار[1] می‌کنند. جدول II ضرایب $E_n(m)$ برای‌تشکیل انتگرال یک سری والش داده شده را بدست می‌دهد. معادلات دیفرانسیل ابتدا برای بالاترین مرتبهٔ مشتق حل می‌شوند. این نتیجه سپس متوالیاً بدفعات مورد نیاز برای بدست آوردن جواب معادلهٔ دیفرانسیل انتگره خواهد شد.

نمایش انتگرالی مشتقات

معادلهٔ دیفرانسیل :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(y) \qquad (۱۹)$$

را درنظربگیرید که درآن a ها درمبداء مناسب فرض شده‌اند. گیریم بالاترین مشتق برابر باشد با :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \qquad (۲۰)$$

بنابراین

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(t)dt + C_1 \qquad (۲۱)$$

که C_1 ثابت انتگرال گیری می‌باشد. انتگرال گیری مجدد نتیجه می‌دهد :

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x ds \int_0^s u(t)dt + C_1 x + C_2 \qquad (۲۲)$$

که C_2 دومین ثابت انتگرال گیری می‌باشد تعویض ترتیب انتگرال گیری چنین نتیجه می‌دهد.

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x u(t)dt \int_t^x ds + C_1 x + C_2$$

$$= \int_0^x (x-t)u(t)dt + C_1 + C_2 \qquad (۲۳)$$

1 - Smoth

این عمل را می‌توان ادامه داد تا چنین بدست آید :

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt+\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-k}\frac{x^k}{K!} \tag{۲۴}$$

اگر نمایش انتگرالی برای مشتقات (۲۱) ، (۲۳) ، و (۲۴) در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۹) جایگذاری شوند نتیجه چنین است :

$$u(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}]u(t)dt$$

$$=f(x)-a_1(x)C_1-a_2(x)[C_1x-C_2]-\cdots-a_n(x)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-k}\frac{x^k}{k!} \tag{۲۵}$$

یا

$$u(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(x)}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1}u(t)dt=g(x) \tag{۲۶}$$

که درآن :

$$g(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-j}\frac{x^j}{j!} \tag{۲۷}$$

حل معادلات انتگرال با استفاده از توابع والش

رابطهٔ (۲۶) معادلهٔ انتگرال خطی نوع دوم Volterra می‌باشد. برای اینکه معادله جواب داشته‌باشد لازم‌است که C ها مقادیر معینی داشته باشند این مقادیربکمک شرایط حدی معادلهٔ دیفرانسیل تعیین می‌شوند.

حل مسئله با روش جایگذاری‌های متوالی‌بدست می‌آید. فرض کنید $g(x)\neq 0$ و $a_k(x)\neq 0$ در $0\leqslant t<1$ حقیقی و پیوسته باشند برای شروع حل فرض کنید:

$$\mu_1(x)=g(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(x)}{(K-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1}\mu_0(t)dt \tag{۲۸}$$

وتقریبی برای نتیجهٔ موردنظر $\mu_0(x)$ درنظربگیرید. این مقدار را در (۲۸) قراردهید و $\mu_1(x)$ را که نتیجهٔ بهتری است بدست آورید. $\mu_1(x)$ را در انتگرال (۲۸) جایگذاری کرده و تقریب جدید $\mu_2(x)$ ا بیابید.

عمل تکرار آنقدر ادامه می‌یابد تا نتیجه با دقت مورد لزوم بدست آید. دنبالهٔ این مجموع های جزء مطلقاً همگراست هرگاه که تابع مورد انتگرال گیری مناسب باشد. تقریب اولیه می‌تواند یک یا دو جمله از سری والش باشد. حل مسئله به‌بسط انتگرالهایی بشکل :

$$\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k\psi_n(t)dt \qquad k=0,1,2,\cdots$$

برحسب یک سری والش نیاز دارد. حالت $k=0$ قبلاً حل شده است : و سری ضرایب $E_n(m)$ درجدول II داده شده‌اند. برای مقادیر بیشتر k ، سری مزبور اکنون بدست خواهد آمد.

محاسبهٔ انتگرالهای وزنی

انتگرالهای وزنی نامعین $\psi_n(x)$ بکار رفته برای حل‌معادلهٔ انتگرالی Volterra را بیک سری والش بسط دهید پس :

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_0^x (x-t)^m\psi_n(t)dt=\sum_{r=0}^{\infty} F_r(m,n)\psi_r(x). \qquad (۲۹)$$

طرفین را در $\psi_r(x)dx$ ضرب کرده و بین 0 , 1 انتگرال بگیرید. ضرایب سری والش بوسیلهٔ :

$$F_r(m\ ,n)=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_0^1 \psi_r(x)dx\int_0^x (x-t)^m\psi_n(t)dt \qquad (۳۰)$$

داده می‌شوند. ضرایب $F_r(m,n)$ می‌توانند به‌روش زیر محاسبه گردند.

مثال : انتگرال $\frac{1}{m!}\int_0^x (x-t)^m\psi_1(t)dt$ را برحسب یک سری والش بسط دهید.

حل :

$$\frac{1}{m!}\int_0^x (x-t)^m\psi_1(t)dt=\frac{-1}{m!}\left[\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_0^x=\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \qquad 0\leqslant x<\frac{1}{2}$$

$$=\frac{-1}{m!}\left[\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{m!}\left[\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_{\frac{1}{2}}^x$$

$$=\frac{x^{m+1}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \frac{1}{2}\leqslant x<1$$

$$=\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)-\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{(m+1)!}[\psi_0(x)-\psi_1(x)]\ ,$$

$$0\leqslant x<1 \qquad (۳۱)$$

هرتوانی از x , $x-\frac{1}{2}$ در(۳۱) را با استفاده از ضرایب $D_n(m)$ جدول ، بصورت یک سری والش بسط دهید ، توابع والش را ضرب و عبارات حاصل را جمع کنید تا ضرایب $F_r(m,1)$ بدست آیند. نتایج برای $m=1,2$ در جداول III , IV داده شده‌اند. عمل مشابهی برای مقادیر بیشتر n می‌توان بکاربرد.

جدول III

جدول مقادیر $F_r(1,n)$

$$\int_0^x (x-t)\,\psi_n(t)dt=\sum_{r=0}^{\infty} F_r(1,n)\,\psi_r(x)$$

r=	0	1	10	11	100	101	110	111
n= 0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{32}$	0	$\frac{-1}{64}$	0	0	$\frac{1}{128}$
10	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{-1}{48}$	0	$\frac{-1}{128}$	0	0	0
11	$\frac{1}{32}$	0	0	$\frac{-1}{48}$	0	$\frac{-1}{128}$	0	0
100	$\frac{1}{32}$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{-1}{128}$	0	$\frac{-1}{192}$	0	0	0
101	$\frac{1}{64}$	0	0	$\frac{-1}{128}$	0	$\frac{-1}{192}$	0	0
110	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{192}$	0
111	0	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{192}$

جدول IV

جدول مقادیر $F_r(2, n)$

$$\frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2\psi_n(t)dt=\sum_{r=0}^{\infty} F_r(2,n)\,\psi_r(x)$$

r=	0	1	10	11	100	101	110	111
n= 0	$\frac{1}{24}$	$\frac{-7}{192}$	$\frac{-31}{1536}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{-127}{12288}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{-1}{512}$
1	$\frac{7}{192}$	$\frac{-1}{32}$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{17}{1536}$	$\frac{-1}{128}$	$\frac{65}{12288}$	$\frac{1}{512}$	0
10	$\frac{31}{1536}$	$\frac{-1}{64}$	$\frac{-1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{-1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{17}{12288}$	0
11	$\frac{1}{64}$	$\frac{-17}{1536}$	$\frac{-1}{256}$	0	$\frac{-1}{512}$	0	0	$\frac{17}{12288}$
100	$\frac{127}{12288}$	$\frac{-1}{128}$	$\frac{-1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{-1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	0
101	$\frac{1}{128}$	$\frac{-65}{12288}$	$\frac{-1}{512}$	0	$\frac{-1}{1024}$	0	0	$\frac{1}{2038}$
110	$\frac{1}{256}$	$\frac{-1}{512}$	$\frac{-17}{12288}$	0	$\frac{-1}{2048}$	0	0	0
111	$\frac{1}{512}$	0	0	$\frac{-17}{12288}$	0	$\frac{-1}{2048}$	0	0

مثال : معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{dx}-y=o$ را با شرط حدی $y=1$ در $x=o$ حل کنید.

حل : گیریم $\frac{dy}{dx}=u(x)$ بنابراین $y=\int_0^x u(t)dt+1$ معادلهٔ انتگرال عبارتست از:

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)dt$$

اولین تقریب برای x های کوچک جملهٔ ثابت سمت راست معادلهٔ انتگرال درنظرگرفته خواهد شد. گیریم $u_o(x)=\psi_o(x)$ پس با استفاده ازجدول II .

$$u_1(x)=\psi_\circ(x)+\int_0^x \psi_\circ(t)dt=\frac{3}{2}\psi_\circ(x)-\frac{1}{4}\psi_1(x)$$

تقریب دوم با استفاده از جدول II عبارتست از :

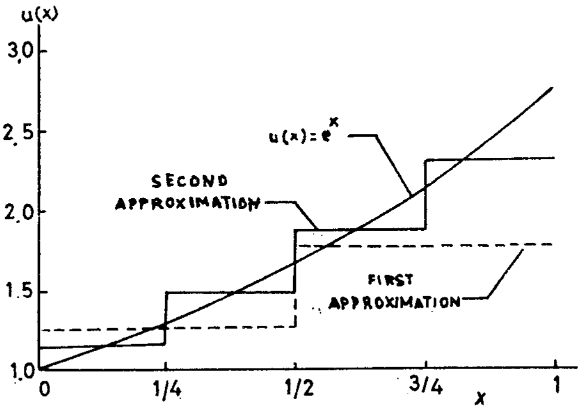
$$u_2(x)=\psi_\circ(x)+\int_0^x \left[\frac{3}{2}\psi_\circ(t)-\frac{1}{4}\psi_1(t)\right]dt$$

$$=\frac{27}{16}\psi_\circ(x)-\frac{3}{8}\psi_1(x)-\frac{3}{16}\psi_{10}(x)+\frac{1}{32}\psi_{11}(x)-\cdots$$

تقریب سوم با استفاده از جدول II عبارتست از :

$$u_3(x)=\psi_\circ(x)+\int_0^x \left[\frac{27}{16}\psi_\circ(t)-\frac{3}{8}\psi_1(t)-\frac{3}{16}\psi_{10}(t)+\frac{1}{32}\psi_{11}(x)-\cdots\right]dt$$

$$=1.7266\psi_\circ(x)-0.4180\psi_1(x)-0.2109\psi_{10}(x)+0.0469\psi_{11}(x)$$
$$-0.0625\psi_{100}(x)+0.0234\psi_{101}(x)+0.0117\psi_{110}(x)-0.0020\psi_{111}(x)+\cdots$$



شکل ۴- اولین و دومین تقریب برای $u(x)=e^x$

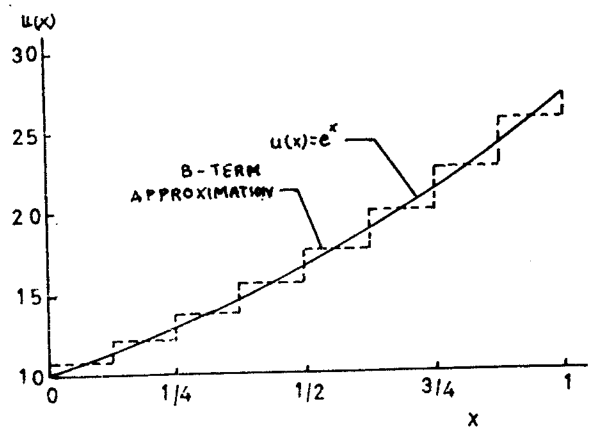
این عمل می‌تواند تا بدست آوردن هردقت لازم ادامه یابد نتیجهٔ نهایی برای یک تقریب ۸ جمله‌ای عبارتست از :

$$u(x)=\frac{dy}{dx}=e^x=1.71828\psi_\circ(x)-0.4208\psi_1(x)-0.21367\psi_{10}(x)$$
$$+0.05233\psi_{11}(x)-0.10725\psi_{100}(x)+0.02627\psi_{101}(x)$$
$$+0.01334\psi_{110}(x)-0.00327\psi_{111}(x)+\cdots$$

با انتگرال گیری بکمک جدول II مقدار y چنین بدست می‌آید.

$$y=1+\int_0^x \mu(x)dx=e^x$$

شکل ٤ تقریب اول و دوم و شکل ٥ تقریب ٨ جمله را برای جواب مسئله نشان می‌دهد اگر یک منحنی هموار از نقطهٔ وسط هرپله افقی رسم شود این منحنی به‌مقدار واقعی بسیار نزدیک خواهد بود. جدول V



شکل ٥ - تقریب ٨ جمله برای $u(x) = e^x$

جدول V

مقایسه تقریب ٨ جمله با مقدار واقعی

Range	Eight - term approximation	e^x at mid - interval
$0 - \frac{1}{8}$	1.06519	1.06449
$\frac{1}{8} - \frac{2}{8}$	1.20701	1.20623
$\frac{2}{8} - \frac{3}{8}$	1.36773	1.36684
$\frac{3}{8} - \frac{4}{8}$	1.54983	1.54883
$\frac{4}{8} - \frac{5}{8}$	1.75621	1.75505
$\frac{5}{8} - \frac{6}{8}$	1.99003	1.98874
$\frac{6}{8} - \frac{7}{8}$	2.25499	2.25353
$\frac{7}{8} - 1$	2.55525	2.55359

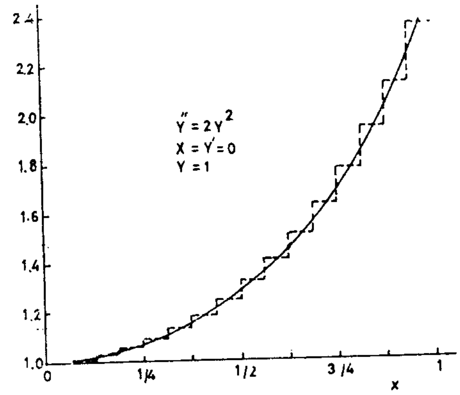
مقایسه‌ای از تقریب ۸ جمله و مقدار واقعی را در وسط هرفاصله نشان می‌دهد. با درنظرگرفتن اینکه سری پس‌از ۸ جمله قطع شده دقت بسیار خوبست.

اثر اعمال غیرخطی برروی سری والش

دریک فاصلهٔ داده شده هرشکل موج مناسب می‌تواند بصورت یک سری والش بیان گردد. اگر سری مزبور درپایان یک گروه معین از توابع والش با مرتبهٔ داده شده قطع شود مجموع جزئی حاصله یک تقریب پلکانی برای شکل‌موج موردنظرخواهدبود. اگر یک تبدیل غیرخطی تک مقدار[1] به‌این تابع‌پلکانی اعمال شود نتیجه تابع پلکانی دیگری با همان تعداد پله خواهد بود اما بلندی تک‌تک پله های آن تغییر خواهدکرد. درصورت لزوم سری جدید بدست آمده را می‌توان با اپراتورهای غیرخطی اضافی تبدیل کرد. اثراپراتور همیشه تغییر ضرایب سری داده شده است، اما سری حاصله هرگز جملاتی اضافی که درگروهها قبل‌ازآنکه سری اصلی ناقص شود نباشد، نخواهد داشت. برای محاسبه ضرایب لزومی به‌تشکیل انتگرال نیست و آنهارا می‌توان با اعمال ساده جبری بدست آورد.

این خاصیت را می‌توان برای حل انواع زیادی ازمعادلات دیفرانسیل غیرخطی بکاربرد زیرا تکرارهای متوالی بدون روش‌های انتگرال گیری پیچیده قابل انجام‌اند.

شکل ۶ حل معادلهٔ دیفرانسیل :



شکل ۶ - تقریب توابع والش برای‌حل معادلهٔ $y''=2y^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2y^2$$

را با شرایط خدی $x=0$ ، $y=1$ و $y'=0$ نشان می‌دهد. معادلهٔانتگرالی‌غیرخطی متناظر عبارتست از

$$u(x)=2[1+\int_0^x (x-t)u(t)dt]^2$$

---

۱ - Single Valued

با توجه به‌تعداد محدود جملات مورد استفاده ازسری والش دقت کاملاً خوب است.

« نتایج »

معادلات دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان با استفاده از توابع والش و بکاربردن جداولی که قبلاً تهیه شده‌اند حل کرد. درهرفاصلهٔ کوچک جواب تقریبی بسوی مقدار متوسط جواب واقعی در همان فاصله نزدیک می‌شود. توابع والش برای ضرب و محاسبهٔ جمع‌های جزئی سری قواعد ساده‌ای دارند.

جواب معادلات انتگرال یا دیفرانسیل تناوبی خواهد بود اما می‌تواند برای توابع غیرتناوبی با استفاده ارمقادیر انتهای یک دورهٔ تناوب بعنوان شرایط حدی برای شروع دورهٔ تناوب بعد توسعه یابد.