تنش‌های غشائی پوسته‌های چندین دهانه بشکل سهموی بیضوی(۱) *[۱]

نوشتهٔ

محمد حسین کاشانی ثابت

PH.D.

دانشیار مقاومت مصالح دانشکدهٔ فنی

۱ـ محورها ، مختصات هندسی پوسته‌ها و بارگذاری :

چون پوسته های بشکل سهموی بیضوی با محیط مربع مستطیلی عموماً درعمل کاربردهای بسیاری دارد، ازاینرو دراین‌مقاله چنین پوسته هائی راکه بدهانهٔ متعددباشد بمبنای نظریهٔ غشائی گنبدها موردبررسی قرار میدهیم.

محورهای مختصات x , y و z درشکلهای ۱ و۲ نموده شده‌است.

فرض میکنیم که شکل میانگین صفحه بمعادلهٔ زیر باشد :

$$z = \frac{x^2}{h_1} + \frac{y^2}{h_2} \qquad (۱)$$

برای سهولت درمحاسبات آتی ، علامتهای زیر را قائل میشویم :

$$\frac{1}{h_1} = \frac{\alpha}{h} \quad , \quad \frac{1}{h_2} = \frac{\beta}{h} \qquad (\text{۲ الف و ب})$$

معادلهٔ (۱) را با بکار بردن علامت‌های (۲ الف و ب) درآن بصورت زیر میتوان نوشت :

$$z = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{h} \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۳) استنباط میگردد که اگر این سطح را با صفحهٔ $z_1 = z$ قطع کنیم بیضی‌ای بدست خواهدآمد.

۱- Elliptic Paraboloid

* - عدد داخل ابروها معرف نمرهٔ هرمرجع در فهرست مرجع ها میباشد.

همچنین اگر این سطح را باصفحهٔ $x_1=x$ یا $y_1=y$ قطع کنیم دوسهمی بدست میآید.

درحالت خاص که $\alpha=\beta$ باشد شکل میانگین پوسته یک سهمی دوار خواهد بود یعنی :

$$z=\frac{\alpha x^2+\alpha y^2}{h'}$$

اگربجای $\frac{\alpha}{h'}$ عدد h را قرار دهیم پس معادلهٔ یک سهمی دوار بصورت :

$$z=\frac{x^2+y^2}{h} \tag{۴}$$

خواهد بود.

در بحث آینده فرض میکنیم که درازای دهانه‌های پوسته یکسان و باروارد برآن بترتیب زیرباشد:

$$\overline{P}_x=\overline{P}_y=0 \quad , \quad \overline{P}_Z=p=\text{مقداری ثابت} \tag{۵ الف و ب}$$

که‌درآن $\overline{P}_x$ ، $\overline{P}_y$ و $\overline{P}_Z$ عبارت‌ازمؤلفه‌های‌نیروهای‌خارجی‌درامتداد x , y , z که‌مؤثر برواحدسطح تصویرافقی سطح میانگین باشد ، خواهد بود.

۲ـ تابع تنش و نیروهای پوسته‌ای :

بارعایت معادله‌های (۵ الف و ب) در معادله‌های (۴ الف و ب) مقالهٔ سابق‌اینجانب منتشرشده درشمارهٔ دهم مجلهٔ دانشکدهٔ فنی خواهیم داشت :

$$\overline{N}_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \quad , \quad \overline{N}_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{۶ الف و ب}$$

معادلهٔ (۴ ج) مقالهٔ سابق اینجانب تغییر نکرده و بصورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\overline{N}_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{۶ ج}$$

بطوریکه درمقالهٔ گذشته اینجانب ذکر شد ، مؤلفه‌های نیروهای غشائی درواحد طول افقی dx یا dy تصویر افقی عنصر پوسته را بترتیب با $\overline{N}_x$ ، $\overline{N}_{xy}$ ، $\overline{N}_y$ ، $\overline{N}_{xy}$ نموده بودیم و دیدیم که $\overline{N}_{yx}=\overline{N}_{xy}$ میباشد.

اگر بجای $\overline{P}_x$ ، $\overline{P}_y$ ، $\overline{P}_z$ از معادله‌های (۵ الف و ب) در معادلهٔ (۵) مقالهٔ سابق اینجانب قرار دهیم و توجه کنیم که :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

است ، خواهیم داشت :

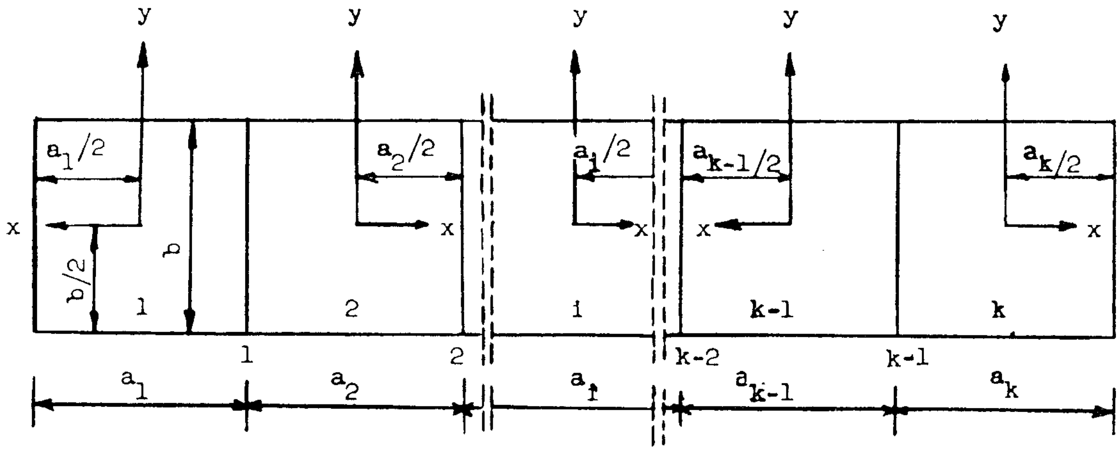
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-p \tag{۷}$$

ازمعادلهٔ (۳) ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ بشرح زیر میباشد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\alpha}{h} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\beta}{h} \qquad \text{(۸ الف و ب)}$$

با بکار بردن معادله‌های (۸ الف و ب) در معادلهٔ (۷) ، معادلهٔ دیفرانسیل با مشتق جزئی ناهمگن زیر بدست میآید :

$$\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=-\frac{ph}{2}$$

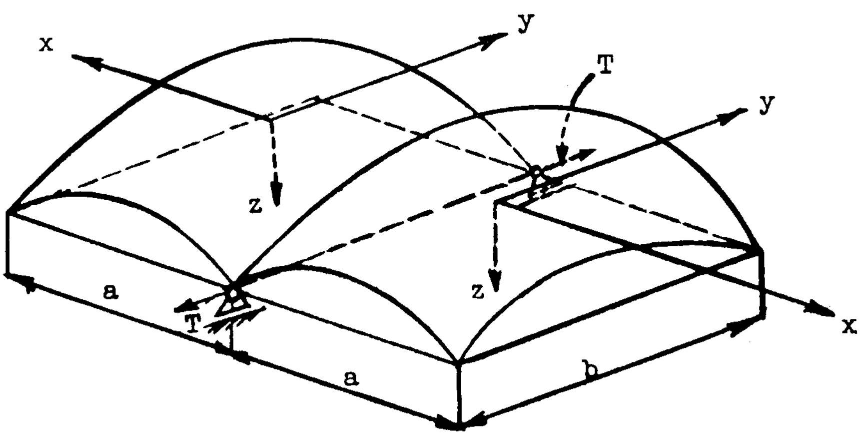


شکل ۱- پوسته بادهانه‌های مکرر ومحورهای مختصات

چون $\alpha \neq 0$ است ، پس اگر طرفین این‌معادله را بر α تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=-\frac{ph}{2\alpha} \qquad (۹)$$

این‌معادلهٔ دیفرانسیل بامشتق جزئی ، خطی ، ناهمگن ، باضرایب ثابت ، واز رستهٔ دوم میباشد. اینمعادله



شکل ۲- پوستهٔ با دودهانهٔ برابر

دیفرانسیل را میتوان حل کرد و بارعایت شرایط حدی مناسبی (بمعادله های ۴ ۲مقالهٔ سابق اینجانب درمجلهٔ شمارهٔ ۱ دانشکدهٔ فنی مراجعه شود) ، جواب آنرا کاملاً مشخص نمود.

۳ـ شرایط حدی :

فرض میکنیم که لبه های خارجی پوسته های سراسری با دیافراگمهای برشی محکم و سفت‌شده ودر تکیه گاههای وسط برقوس‌های نازکی قرارداشته باشد، شکل(۱)؛ لذا شرایط حدی زیررا خواهیم داشت:

الف ـ بازای $x=\frac{a_i}{۲}$ ؛ $\overline{N}_x=۰$ بالنتیجه $\frac{\partial^۲\Phi}{\partial y^۲}=۰$ برای $i=۱$, k

ب ـ بازای $y=\pm\frac{b}{۲}$ ؛ $\overline{N}_y=۰$ » $\frac{\partial^۲\Phi}{\partial x^۲}=۰$

برای لبه های چهارم دهانه های کناری باید گفت چون این اضلاع بر قوسهای نازکی تکیه دارد پس این‌قوسها باید فارغ وآزاد ازلنگرخمشی بوده وجمع جبری‌مؤلفهٔ نیروهای پوسته‌ای که عمود برسطح جانبی این‌قوسها است صفر باشد [۲]. باضافه در دولبهٔ مقابل هر دهانهٔ وسطی پوسته های سراسری که متصل بدو قوس نازك است ، باید همین شرط صادق باشد.

٤ـ حل معادلهٔ دیفرانسیل :

اگر قسمت متجانس‌معادلهٔ(۹) را درنظرگرفته ومتغیرهارا ازیکدیگر بطریق زیرجدا کنیم[۳,٤,٥]،

$$\Phi(x\,,y)=X(x)\cdot Y(y) \qquad (۱۰)$$

قسمت متجانس معادلهٔ دیفرانسیل (۹) بصورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{X''(x)}{X}+\frac{Y''(y)}{Y}=۰ \qquad (۱۱)$$

چون جملهٔاول معادلهٔ (۱۱) مستقل از y و جملهٔ دوم‌آن مستقل از x میباشد ، پس هریك از ایندو بایستی برابر مقدار ثابتی باشد یعنی :

$$-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\text{مقداری ثابت}=-\lambda \qquad (۱۲)$$

معادلهٔ (۱۲) منجر بدو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی (هریك بایك متغیر مطلق) میگردد.

باتوجه بتقارن پوسته بالنسبه بمحور x و شرایط حدی (ب) ، و ملاحظهٔ رستهٔ معادلهٔ دیفرانسیل ، لازم میاید که درطول لبه های $y=\pm\frac{b}{۲}$ ، $\Phi=۰$ باشد .

این شرط حدی ومعادلهٔ (۱۲) معادله های زیر را نتیجه میدهد :

$$\begin{cases} Y''+\lambda^۲Y=۰ \\ Y\left(y=\pm\frac{b}{۲}\right)=۰ \end{cases} \qquad (\text{۱۳ الف و ب})$$

و

$$\frac{\beta}{\alpha}X''-\lambda^۲X=۰ \qquad (۱٤)$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) را میتوان بصورت :

$$\cos \lambda y = Y(y)$$

که شرط (۳ ب) در آن صادق باشد، حل کرد؛ اگر $\lambda = \frac{\pi}{b} n$ و $n = ۱ , ۳ , ۵ , ..$ اختیار شود. آنگاه جواب مربوط بمعادلهٔ (۱۴) را برای یکعدد صحیح n بصورت زیر میتوان نوشت:

$$X_n = A_n \operatorname{Cos h} \left(\frac{n\pi x}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) + B_n \operatorname{Sin h} \left(\frac{n\pi x}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \tag{۱۵}$$

سپس با توجه بمعادلهٔ (۱۰) و رعایت جمیع مقادیر n، جواب قسمت متجانس معادلهٔ (۹) بصورت زیر خواهد بود:

$$\Phi_c = \sum_{۱,۳,۵,\dots}^{\infty} \left[A_n \operatorname{Cosh} \left(\frac{n\pi x}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) + B_n \operatorname{Sinh} \left(\frac{n\pi x}{b} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \right] \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{۱۶}$$

ضریب‌های A_n و B_n ثابتهای انتگراسیون میباشد که با دوشرط حدی دیگر باید محاسبه گردد. اگر علامت زیر را برای سهولت نگارش قائل شویم:

$$c = b \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{۱۷}$$

عبارت Φ_c بشرح زیر نوشته خواهد شد:

$$\Phi_c = \sum_{۱,۳,۵,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{Cosh} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{۱۸}$$

یک جواب خصوصی مقتضی برای معادلهٔ (۹) را میتوان بصورت زیر انتخاب کرد:

$$\Phi_p = \frac{ph}{۴\alpha} \left(\frac{b^۲}{۴} - y^۲ \right) \tag{۱۹}$$

معادلهٔ (۹۱) نه‌تنها در معادلهٔ (۹) صادق میباشد بلکه دارای این مزیت است که شرط حدی (۳ ب) را نیز برآورده میکند و این خاصیت مقدار زیادی از عملیات جبری آینده را آسان خواهد کرد. اینک جواب کلی معادلهٔ (۹) را بعبارت زیر توان نوشت:

$$\Phi = \frac{ph}{۴\alpha} \left(\frac{b^۲}{۴} - y^۲ \right) + \sum_{۱,۳,۵,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{Cosh} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{۲۰}$$

جواب خصوصی (۹۱) را بکمک یک‌سری فوریه میتوان بشرح زیر بیان کرد زیرا مقدار این تابع بازای:

$$\pm \frac{b}{۲} = y$$

صفر میگردد.

$$\frac{ph}{۴\alpha}\left(\frac{b^۲}{۴}-y^۲\right)=\frac{۲phb^۲}{\alpha\pi^۳}\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\frac{۱}{n^۳}(-۱)^{(n-۱)/۲}\cdot\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (۲۱)$$

با این‌عبارت ، Φ شکل زیر را احراز خواهد کرد :

$$\Phi=\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\left[\frac{۲phb^۲}{\alpha\pi^۳}\cdot\frac{(-۱)^{(n-۱)/۲}}{n^۳}+A_n\mathrm{Cosh}\frac{n\pi x}{c}+B_n\,\mathrm{Sinh}\frac{n\pi x}{c}\right]\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (۲۲)$$

آنگاه عبارتهای $\overline{N}_x$, $\overline{N}_y$, $\overline{N}_{xy}$ باتکاء معادله های (۶ الف ـ ج) ، برابر :

$$\begin{cases}\overline{N}_x=\frac{\pi^۲}{b^۲}\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\left[\frac{۲phb^۲}{\alpha\pi^۳}\cdot\frac{(-۱)^{(n-۱)/۲}}{n^۳}-\left(A_n\mathrm{Cosh}\frac{n\pi x}{c}+B_n\,\mathrm{Sinh}\frac{n\pi x}{c}\right)n^۲\right]\cos\frac{n\pi y}{b}\\ \overline{N}_y=\frac{\pi^۲}{c^۲}\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}n^۲\left(A_n\,\mathrm{Cos\,h}\frac{n\pi x}{c}+B_n\mathrm{Sin\,h}\frac{n\pi x}{c}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}\\ \overline{N}_{xy}=\frac{\pi^۲}{bc}\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}n^۲\left(A_n\,\mathrm{Sin\,h}\frac{n\pi x}{c}+B_n\mathrm{Cosh}\frac{n\pi x}{c}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}\end{cases}$$

(۲۳ الف ـ ج)

خواهد بود .

حال یک پوستهٔ با دودهانهٔ مساوی را (شکل ۲) انتخاب و ثابتهای A_n و B_n رامحاسبه میکنیم .
بااستفاده از رابطهٔ (۲۳ الف) وشرط حدی (الف) خواهیم داشت :

$$\frac{\pi^۲}{b^۲}\sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty}\left[\frac{۲phb^۲}{\alpha\pi^۳}\cdot\frac{(-۱)^{(n+۱)/۲}}{n^۳}-n^۲\left(A_n\mathrm{Cos\,h}\frac{n\pi a}{۲c}+B_n\mathrm{Sinh}\frac{n\pi a}{۲c}\right)\right]\cos\frac{n\pi y}{b}\equiv۰$$

این اتحاد متضمن این‌معنی است‌که هرجملهٔ این سری باید صفر باشد . اگر علامت زیررا قائل شویم:

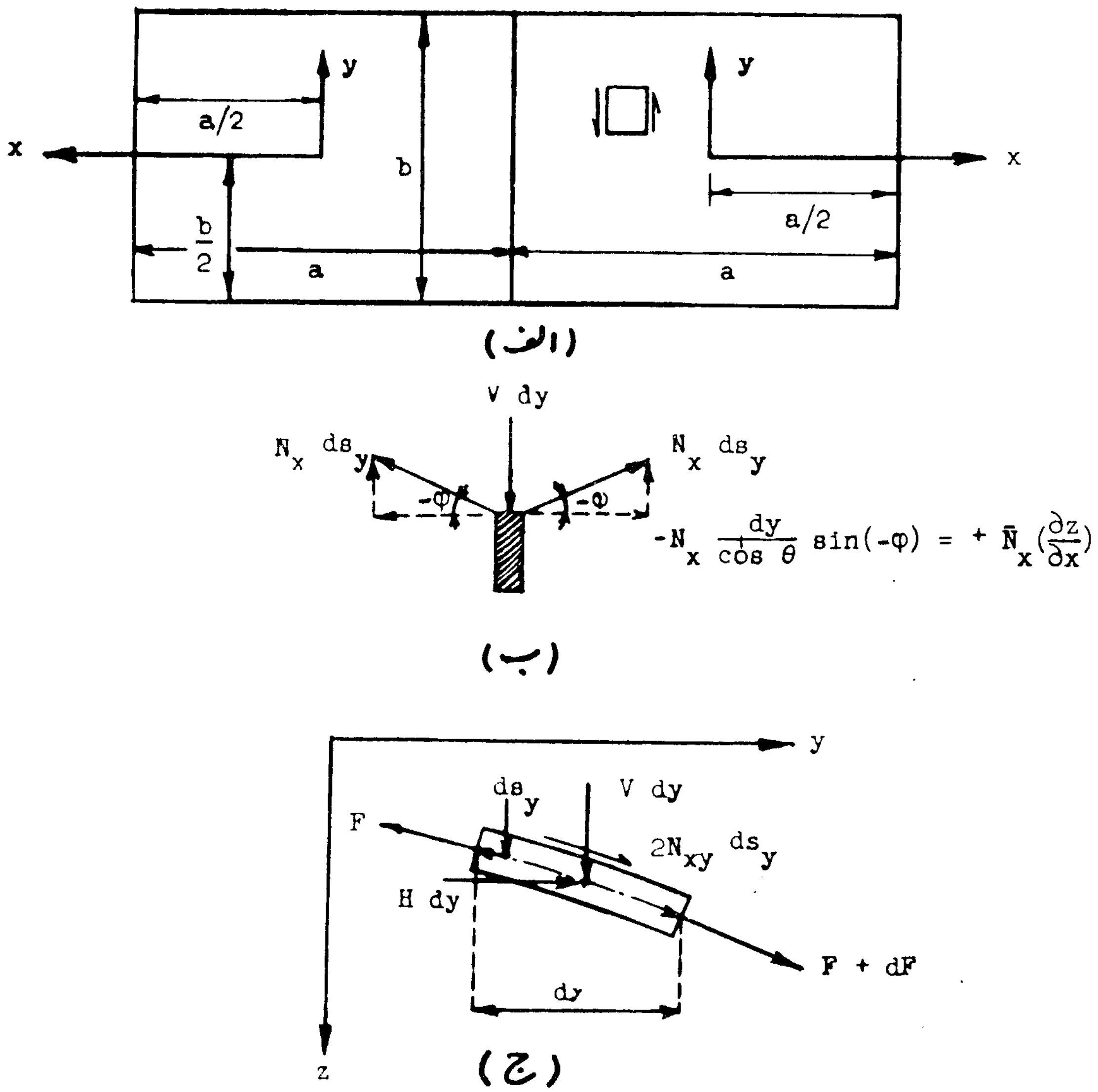
$$\mathrm{Cosh}\frac{n\pi a}{۲c}=C_n\ ,\ \mathrm{Sinh}\frac{n\pi a}{۲c}=S_n$$

شرط بالا بصورت زیر نوشته خواهد شد :

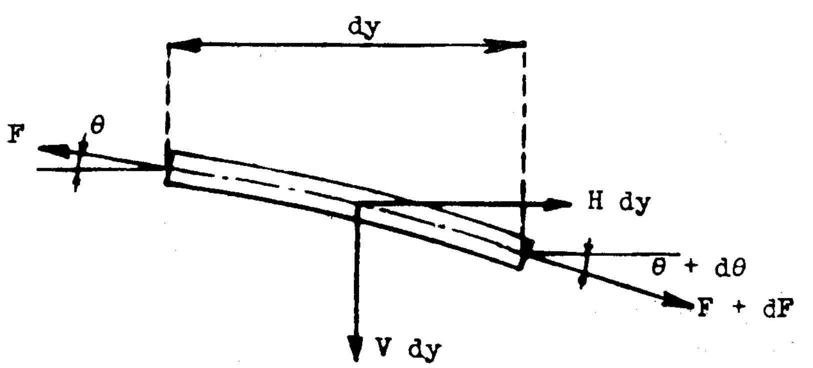
$$C_nA_n+S_nB_n=\frac{۲phb^۲}{\alpha\pi^۳}\cdot\frac{۱}{n^۳}(-۱)^{(n+۱)/۲} \qquad (۲۴)$$

۵ـ شرط حدی درقوس نازك یك پوستهٔ دودهانه‌ای

اثر پوسته برروی عنصر طول dS_y قوس نازك را میتوان با یك مؤلفهٔ افقی Hdy و یك مؤلفهٔقائم Vdy واقع درسطح تقارن آن نمود ؛ که در آن dy معرف تصویر افقی dS_y (شکل ۳) میباشد. جهت‌های مثبت H و V در (شکلهای ۳ و ۴) نشان داده شده است.



شکل ۳- پوستهٔ دودهانه‌ای و عنصری از قوس نازك



شکل ٤- نیروهای مؤثر برعنصری از قوس نازك

بعلت‌تقارن پوسته ودستگاه تنش بالنسبه بقوس، مؤلفه های افقی نیروهای $N_x dS_y$ دردوطرف قوس یکدیگر را خنثی میکند ولی‌مؤلفه های افقی نیروهای برشی پوسته‌ای دردوطرف قوس برهم‌افزوده‌شده بکمیت $۲N_{xy}dS_y \cos\theta$ یا $۲\bar{N}_{xy}\,dy$ خواهد بود. مؤلفه های قائم این نیروها بترتیب برابر :

$$۲\,N_x \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} dy = -۲N_x dS_y \sin(-\varphi)$$

و

$$۲N_{xy}\tan\theta\, dy = ۲N_{xy}dS_y\sin\theta$$

(شکلهای ۳ ب و ج) میباشد. ازاینرو Hdy و Vdy بشرح زیر نوشته میشود :

$$Hdy = ۲N_{xy}dy = ۲\bar{N}_{xy}dy$$

$$Vdy = ۲N_{xy}\tan\theta dy + ۲N_x\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}dy$$

باتوجه بآنکه :

$$\bar{N}_x = N_x\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\ ,\ \bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} = N_{xy} = N_{yx}\ ,\ \bar{N}_y = Ny\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$$

و

$$\tan\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\ \ ,\ \ \tan\theta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

میباشد ، بااستفاده از اینروابط در دومعادلهٔ بالا H و V بعبارتهای زیر بدست خواهدآمد :

$$H = ۲\bar{N}_{xy}\ ,\ V = ۲\bar{N}_{xy}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + ۲\,\bar{N}_x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{(۲۰ الف و ب)}$$

۶ـ شرایط تعادل برای یک عنصر ازقوس نازک :

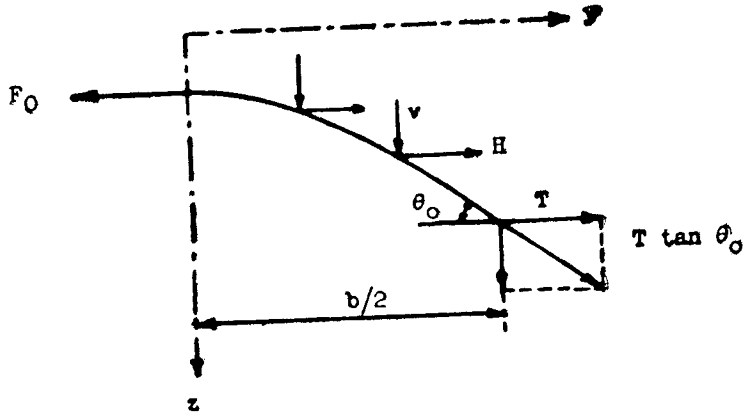
چون قوس نازک باید آزاد از لنگر خمشی باشد، لذا هیچ نیروی برشی‌جانبی درقوس بوجودنخواهد آمد ؛ بنابراین نیروهای مؤثر بر قوس بایستی با نیروی داخلی‌ایکه مماس بر امتداد میانتار آن باشد متعادل گردد . اگر این نیرو را با F بنمائیم ، از (شکل ٤) نتیجه میگردد که مؤلفه های افقی و قائم آن بترتیب $F\cos\theta$ و $F\sin\theta$ خواهد بود . در بند پنجم این مقاله دیدیم که نیروهای جزئی مؤثر بر قوس برابر Hdy و Vdy است که مقدار H و V درمعادلهٔ (۲۰ الف و ب) داده شده است ؛ ازاینرو شرط تعادل دو امتدادهای y و z منجر بمعادله های زیر خواهد شد :

$$\frac{d}{dy}(F\cos\theta)\,dy + Hdy = ۰\quad ,\quad \frac{d}{dy}(F\sin\theta)\,dy + Vdy = ۰ \qquad \text{(۲۶ الف و ب)}$$

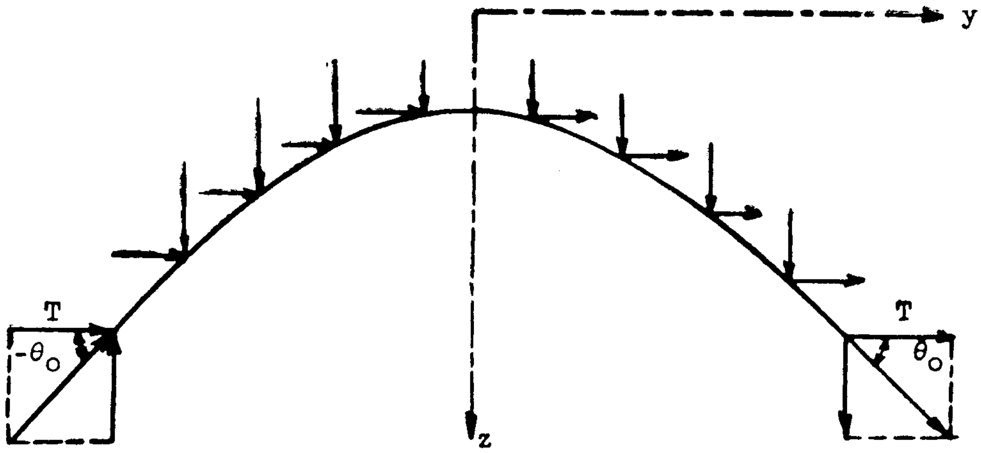
اگر ازمعادله های (۲۶ الف و ب) تابع اولیه بگیریم ، خواهیم داشت :

$$F\cos\theta = -\int_{۰}^{y} Hdy + F_{۰}\quad ,\quad F\sin\theta = -\int_{۰}^{y} Vdy \qquad \text{(۲۷ الف و ب)}$$

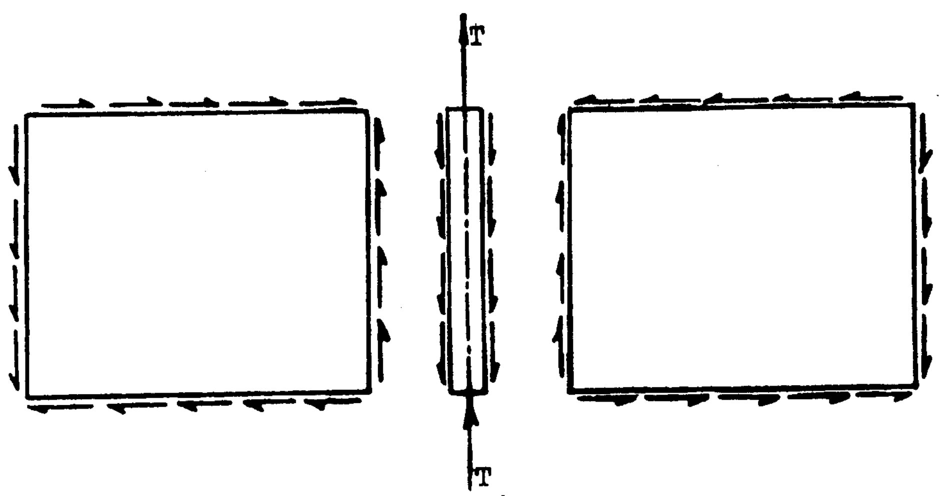
که درآن $F_{۰}$ کمیت F در $\theta = ۰$ است .



شکل ۵ ـ قوس نازك و نیروهای F_0 و T



(الف)



(ب)

شکل ۶ـ نمودار جسم‌آزاد پوسته که تحت تأثیر نیروی غیرمتقارن T باشد

اگر $\theta_\circ$ معرف زاویهٔ θ در :

$$+\frac{b}{۲}=y$$

و T مؤلفه افقی نیروی محوری و $T\tan\theta_\circ$ مؤلفهٔ قائم آن که مطابق با عکس‌العمل قائم تکیه گاه در همان نقطه است (شکلهای ۲ و ۵) باشد ، آنگاه از معادله های (۲۷ الف و ب) خواهیم داشت:

$$T=-\int_{\circ}^{\frac{b}{۲}} Hdy+F_\circ\ ,\ T\tan\theta_\circ=-\int_{\circ}^{\frac{b}{۲}} Vdy \qquad \text{(۲۸ الف و ب)}$$

اگر بجای $F_\circ$ درمعادلهٔ (۲۷ الف) از رابطهٔ (۲۸ الف) استفاده کنیم ، نتیجه میشود:

$$F\cos\theta=\int_{y}^{\frac{b}{۲}} Hdy+T \qquad \text{(۲۹)}$$

از تقسیم کردن معادلهٔ (۲۷ الف) بر (۲۹) و بکار بردن :

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\tan\theta$$

رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\int_{y}^{\frac{b}{۲}} Hdy+T\right)=-\int_{\circ}^{y} Vdy \qquad \text{(۳۰)}$$

اگر از طرفین رابطهٔ (۳۰) برحسب y مشتق بگیریم و بجای H و V از رابطه های (۲۵الف‌وب) قراردهیم، نتیجه میگردد :

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}\left(\int_{y}^{\frac{b}{۲}} ۲\overline{N}_{xy}dy+T\right)=-۲\overline{N}_x\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{(۳۱)}$$

در این معادله بایستی کمیت‌های حدی نیروهای پوسته‌ای را گزارد تا درقوس خمشی بوجود نیاید. معادله های (۲۴)و(۳۱) را میتوان برای تعیین ثابتهای A_B و B_n بکار برد. ازآنجائیکه معادلهٔ(۳۱) دارای یک مجهول دیگر T میباشدپس وجودشرط دیگری هم لازم میباشد. فعلاً، فرض میکنیم که T معلوم باشد ومعادله های (۲۴) و (۳۱) را جداگانه در دوحالت زیر حل میکنیم :

حالت (۱) : $T=\circ$ و $p\neq\circ$

حالت (۲) : $T=۱$ و $p=\circ$

۷ـ حالت اول $p\neq\circ$ و $T=\circ$:

با $T=\circ$ ، معادلهٔ (۳۱) ساده‌تر خواهد شد :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\int_{y}^{\frac{b}{2}} 2\overline{N}_{xy}dy = -2\overline{N}_x\frac{\partial z}{\partial x} \tag{۳۲}$$

با بکار بردن معادله های (۸ب) و (۲۳ الف وج) بجای $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ، $\overline{N}_x$ و $\overline{N}_{xy}$ درمعادلهٔ (۳۲) وتوجه باینکه

$$\frac{-\alpha a}{h}=\frac{\partial z}{\partial x}$$

بازای :

$$-\frac{a}{2}=x$$

و تابع اولیه گرفتن ، خواهیم داشت :

$$\frac{2\beta}{h}\cdot\frac{\pi}{c}\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} n\left(-A_n S_n+B_n c_n\right)\cos\frac{n\pi y}{b}=$$

$$\frac{a\alpha\pi^2}{h}\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty}\left[\frac{2ph}{\alpha\pi^3}\cdot\frac{1}{n}\cdot(-1)^{(n+1)/2}-A_n\cdot\frac{n^2}{b^2}\cdot c_n+B_n\cdot\frac{n^2}{b^2}S_n\right]\cos\frac{n\pi y}{b}$$

این رابطه مستلزم آنست که بازای هرعدد صحیح فردی معادلهٔ زیر صادق باشد :

$$-A_nS_n+B_nC_n=\frac{a\alpha\pi c}{2\beta}\left[\frac{2ph}{\alpha\pi^3}\cdot\frac{1}{n^2}(-1)^{(n+1)/2}-\frac{nC_n}{b^2}A_n+\frac{nS_n}{b^2}B_n\right] \tag{۳۳}$$

بانوشتن علامت زیر :

$$\gamma=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۳۴}$$

و ملاحظهٔ آنکه :

$$\frac{\alpha c}{\beta}=\gamma b$$

معادلهٔ (۳۳) بصورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\left(-S_n+\frac{\pi a\gamma n c_n}{2b}\right)A_n+\left(C_n-\frac{\pi a\gamma n}{2b}S_n\right)B_n=\frac{phab\gamma}{\alpha\pi^2}\;\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \tag{۳۵}$$

ازحل معادله های (۲۴) و (۳۵) ، برای A_n و B_n خواهیم داشت :

$$\left\{\begin{aligned} A_n&=\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3}\cdot\frac{\left(1-\frac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)}{C_n\left(1+T_n^2-\frac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)}\\ B_n&=\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3}\cdot\frac{T_n}{C_n\left(1+T_n^2-\frac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)}\end{aligned}\right. \tag{۳۶ الف وب}$$

که درآن :

$$T_n = \frac{S_n}{c_n} = \operatorname{Tanh} \frac{n\pi a}{۲c}$$

میباشد.

از معادله های (۳۶ الف و ب)، نتیجه میگردد که A_n و B_n سریعاً باافزایش n، کاهش خواهد یافت، زیرا T_n بسمت واحد میل خواهد کرد درحالتیکه C_n بطور قوه‌ای (توان‌وارانه[1]) افزایش خواهد یافت. کسرهائیکه برحسب T_n در رابطه های بالا بیان شده بمقدار ثابتی نزدیک خواهد شد و بتقارب سریها کمکی نخواهد کرد.

از معادلهٔ (۲۸ الف)، باتوجه بآنکه $T=o$ است میتوان $F_\circ$ را بشرح زیر بدست‌آورد :

$$F_\circ = \frac{۲\pi}{c} \sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty} n(-A_n S_n + B_n C_n) \qquad (۳۷)$$

اگر بجای A_n و B_n از معادله‌های (۳۶ الف و ب) درمعادلهٔ (۳۷) قراردهیم، نتیجه میگردد:

$$F_\circ = \frac{۴pha}{\beta\pi} \sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty} \frac{۱}{n} (-۱)^{(n+۱)/۲} \cdot \frac{T_n^۲}{۱+T_n^۲ - \frac{\pi a \gamma n}{b} T_n} \qquad (۳۸)$$

درصورتیکه سطح میانگین یک سهمی دوار باشد، داریم :

$$\alpha = \beta = \gamma = ۱$$

ومعادله های (۳۶ الف و ب) و (۳۷) بصورت زیر درخواهد آمد :

$$\left\{ \begin{aligned} A_n &= \frac{۲phb^۲}{\pi^۳} \cdot \frac{(-۱)^{(n+۱)/۲}}{n^۳} \cdot \frac{۱ - \frac{\pi a n}{b} T_n}{C_n (۱+T_n^۲ - \frac{\pi a n}{b} T_n)} \\ B_n &= \frac{۲phb^۲}{\pi^۳} \cdot \frac{(-۱)^{(n+۱)/۲}}{n^۳} \cdot \frac{T_n}{C_n (۱+T_n^۲ - \frac{\pi a n}{b} T_n)} \\ F_\circ &= \frac{۴pha}{\pi} \sum_{۱,۳,۵,\cdots}^{\infty} \frac{(-۱)^{(n+۱)/۲}}{n^۳} \cdot \frac{T_n^۲}{۱+T_n^۲ - \frac{\pi a n}{b} T_n} \end{aligned} \right. \qquad (۳۹ \text{ الف-ج})$$

در یک سهمی دوار با $b=a$ معادله‌های (۳۹ الف - ج) خیلی ساده‌تر خواهد شد :

---

[1] Exponentially

$$
(\text{۴۰ الف-ج})\qquad \begin{cases} A_n=\dfrac{2pha^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3}\cdot\dfrac{1-\pi n T_n}{C_n(1+T_n^2-\pi n T_n)} \\[2ex] B_n=\dfrac{2pha^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^3}\cdot\dfrac{T_n}{C_n(1+T_n^2-\pi n T_n)} \\[2ex] F_o=\dfrac{4\pi ha}{\pi}\sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n}\cdot\dfrac{T_n^2}{1+T_n^2-\pi n T_n} \end{cases}
$$

ازاین معادله‌ها بعداً برای یک مثال عددی استفاده خواهیم کرد.

۸ـ حالت دوم $p=0$ و $T=1$

این‌حالت را بـه دو بخش قسمت میکنیم: در بخش (الف) فرض میشود کـه T بحالت قرینه بدو انتهای قوس‌نازك اثر کند، درحالتیکه در بخش(ب) حالت غیرمتقارن این نیرو موردبحث قرارخواهد گرفت.

بخش(الف) ـ بعلت تقارن‌پوسته ودستگاه تنش بالنسبه بمحور x (شکلهای ۲و۳ الف)، تابع‌تنش Φ را باتکاء بحث قبلی میتوان چنین نوشت:

$$
(\text{۴۱ الف})\qquad \Phi=\sum_{1,3,5,\dots}^{\infty}\left(A_n \operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c}+B_n \operatorname{Sinh}\frac{n\pi x}{c}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}
$$

$$
(\text{۴۱ ب-د})\qquad \begin{cases} \overline{N}_x=\dfrac{\pi^2}{b^2}\sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2\left(-A_n\operatorname{Cosh}\dfrac{n\pi x}{c}-B_n\operatorname{Sin h}\dfrac{n\pi x}{c}\right)\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\[2ex] \overline{N}_y=\dfrac{\pi^2}{c^2}\sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2\left(A_n\operatorname{Sin h}\dfrac{n\pi x}{c}+B_n\operatorname{Cos h}\dfrac{n\pi x}{c}\right)\cos\dfrac{n\pi y}{b} \\[2ex] \overline{N}_{xy}=\dfrac{\pi^2}{bc}\sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2\left(A_n\sin h\dfrac{n\pi x}{c}+B_n\cos h\dfrac{n\pi x}{c}\right)\cos\dfrac{n\pi y}{b} \end{cases}
$$

معادله‌های (۱ ٤الف ـ د) همانند معادله‌های (۲۲) و(۲۳ الف ـ ج) است جزآنکه جملهٔ مربوط ببار وجود ندارد، معادلهٔ (۲٤) دراینحالت بصورت زیر نوشته میشود:

$$
(\text{۴۱})\qquad C_nA_n+S_nB_n=0
$$

و معادلهٔ (۳۱) بارعایت $T=1$ بعبارت زیر خواهد بود:

$$
(\text{۴۳})\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\int_y^{\frac{b}{2}} 2\overline{N}_{xy}dy+1\right)=-2\overline{N}_x\frac{\partial z}{\partial x}
$$

نتیجهٔ معادلهٔ (۴۳)، پس از اجرای محاسبات بصورت زیر میباشد:

$$\frac{\pi}{c}\sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty} n(-A_nS_n+B_nC_n)\cos\frac{n\pi y}{b}+\frac{1}{2} \tag{44}$$

$$=\frac{a\alpha\pi^2}{2b^2\beta}\sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty} n^2(-A_nC_n+B_nS_n)\cos\frac{n\pi y}{b}$$

اگر ثابت $\frac{1}{2}$ را بصورت یکسری کوسینوس فوریه بسط دهیم خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{45}$$

بااستفاده از معادلهٔ اخیر درمعادلهٔ (٤٤) و بکار بردن علامت ٢ از رابطهٔ (٣٤) ، نتیجه میگردد :

$$\left(-S_n+\frac{\pi a\gamma n}{2b}C_n\right)A_n+\left(C_n-\frac{\pi a\gamma n}{2b}S_n\right)B_n=\frac{2c}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2} \tag{46}$$

معادله‌های (٤٢) و (٤٦) دومعادله است که با حل آن برای A_n و B_n بشرح زیر بدست میآید :

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2c}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2}\cdot\dfrac{-T_n}{C_n\left(1+T_n^2-\dfrac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)} \\[2ex] B_n=\dfrac{2c}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2}\cdot\dfrac{1}{C_n\left(1+T_n^2-\dfrac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)} \end{cases} \tag{٤٧ الف و ب}$$

همچنین :

$$F_o=1+\frac{4}{\pi}\sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n}\cdot\frac{1+T_n^2}{1+T_n^2-\dfrac{\pi a\gamma n}{b}T_n} \tag{٤٧ ج}$$

$$=\frac{4a\gamma}{b}\sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(n+1)/2}\cdot\frac{T_n}{1+T_n^2-\dfrac{\pi a\gamma n}{b}T_n}$$

آشکار است که A_n و B_n باافزایش n سریعاً کاهش خواهد یافت.

اگر $\gamma=1$ (سهمی دوار) و $b=a$ باشد (محیط مربعی‌شکل) ، داریم :

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2a}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2}\cdot\dfrac{-T_n}{C_n(1+T_n^2-\pi nT_n)} \\[2ex] B_n=\dfrac{2a}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2}\cdot\dfrac{T_n}{C_n(1+T_n^2-\pi nT_n)} \end{cases} \tag{٤٨ الف و ب}$$

و

$$F_{\circ} = ۱ + \frac{٤}{\pi} \sum_{۱,۳,۵,\dots}^{\infty} \frac{(-۱)^{(n+۱)/۲}}{n} \cdot \frac{۱+T_n^{۲}}{۱+T_n^{۲}-\pi n T_n} \qquad (\text{ج } ٤۸)$$

$$= ٤ \sum_{۱,۳,۵,\dots}^{\infty} (-۱)^{(n+۱)/۲} \cdot \frac{T_n}{۱+T_n^{۲}-\pi n T_n}$$

بخش (ب) - اکنون حالت بارگذاری غیرقرینه را بطوریکه در شکل (۶) نموده شده است ، مورد توجه قرار میدهیم . تابع تنش را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$\Phi = \Phi_{\circ} + \Phi_{۱}$$

و

$$\Phi_{\circ} = Dxy$$

$$\Phi_{۱} = \sum_{۲,٤,٦,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

که درآن $\Phi_{\circ}$ معرف حالت نیروی برشی پوسته‌ای ثابت در سراسر پوسته میباشد و وضع نیروی برشی پوسته‌ای با $\overline{N}_{xy}$ = ثابت ، در شکل (۶ ب) نموده شده است . میتوان استنباط کرد که این حالت تنش شرط آزاد بودن قوس نازك را از خمش تأمین نمیکند . ازطرف دیگر ، $\Phi_{۱}$ بتنهائی دارای جملهٔ $n=o$ نیست (بمعادلهٔ ۲۸ الف توجه شود) که بتواند با بار T تعادل برقرار کند ولی اگر $\Phi_{\circ}$ و $\Phi_{۱}$ برهم افزوده گردد ، جواب کامل مسئله بدست خواهد آمد . ازاینرو تابع تنش و نیروهای پوسته‌ای بشرح زیر خواهد بود :

$$\Phi = \sum_{۲,٤,٦,\dots}^{\infty} \left(A_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} \right) \sin \frac{n\pi y}{b} + Dxy$$

$$\overline{N}_x = -\frac{\pi^{۲}}{b^{۲}} \sum_{۲,٤,٦,\dots}^{\infty} n^{۲} \left(A_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \sin h \frac{n\pi x}{c} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\overline{N}_y = \frac{\pi^{۲}}{b^{۲}} \sum_{۲,٤,٦,\dots}^{\infty} n^{۲} \left(A_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\overline{N}_{xy} = -\frac{\pi^{۲}}{bc} \sum_{۲,٤,٦,\dots}^{\infty} n^{۲} \left(A_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} - D$$

ثابتهای A_n ، B_n و D را بایستی محاسبه کرد . دیده میشود که معادلهٔ (۴۲) تغییر نخواهد کرد و بعلت عدم تقارن $F_{\circ}=o$ ومعادلهٔ (۲۸ الف) ، با $T=۱$ بصورت زیر :

$$۱ = \int_{\circ}^{\frac{b}{۲}} -H dy \qquad (۵۰)$$

نوشته میگردد .

با بکار بردن معادله های (۲۵ الف) و (۴۹ د) در معادلهٔ (۵۰) نتیجه میگردد :

$$۱ = -\int_{۰}^{\frac{b}{۲}} \left[-\frac{۲\pi^{۲}}{bc} \sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty} n^{۲} \left(A_n \operatorname{Sin h} \frac{n\pi x}{c} + B_n \operatorname{Cos h} \frac{n\pi x}{c}\right) \cos\frac{n\pi y}{b} - ۲D \right] dy$$

انتگرال توابع هذلولی صفر میگردد ، بنابراین خواهیم داشت :

$$D = \frac{۱}{b} \qquad (۵۱)$$

معادلهٔ (۳۱) با $T = ۱$ و $D = \frac{۱}{b}$ بصورت :

$$-\frac{۲\beta}{a\alpha}\left[\frac{۲\pi}{c}\sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty} n\left(-A_nS_n + B_nC_n\right)\sin\frac{n\pi y}{b} + \frac{۲y}{b} - ۱ + ۱\right] =$$

$$+\frac{۲\pi^{۲}}{b^{۲}}\sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty} n^{۲}\left(A_nC_n - B_nS_n\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

پس از ساده کردن داریم :

$$-\frac{۲\beta}{a\alpha}\left[\frac{\pi}{c}\sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty} n\left(-A_nS_n + B_nC_n\right)\sin\frac{n\pi y}{b} + \frac{y}{b}\right] = \qquad (۵۲)$$

$$\frac{\pi^{۲}}{b^{۲}}\sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty} n^{۲}\left(+A_nC_n - B_nS_n\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$$

با بسط y بصورت یکسری سینوس فوریه خواهیم داشت :

$$y = \frac{۲b}{\pi}\sum_{۲,۴,۶,\ldots}^{\infty}\frac{(-۱)^{(n/۲)+۱}}{n}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (۵۳)$$

بااستفاده از معادله های (۳۴) ، (۵۱) و (۵۳) در معادلهٔ (۵۲) نتیجه میگردد:

$$\left(\frac{\pi a\gamma n}{۲b}C_n - S_n\right)A_n + \left(C_n - \frac{\pi a\gamma n}{۲b}S_n\right) = \frac{۲c}{n^{۲}\pi^{۲}}(-۱)^{n/۲} \qquad (۵۴)$$

ازمعادله های (۴۲) و (۵۴) ، A_n و B_n بدست میآید :

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \frac{۲c}{\pi^{۲}}\cdot\frac{(-۱)^{(n/۲)}}{n^{۲}}\cdot\frac{-T_n}{C_n\left(۱ + T_n^{۲} - \frac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)} \\ B_n &= \frac{۲c}{\pi^{۲}}\cdot\frac{(-۱)^{(n/۲)}}{n^{۲}}\cdot\frac{۱}{C_n\left(۱ + T_n^{۲} - \frac{\pi a\gamma n}{b}T_n\right)} \end{aligned}\right. \qquad \text{(۵۵ الف و ب)}$$

کمیت‌های متوالی A_n و B_n دارای علامتهای مختلف خواهد بود و باافزایش n توان‌وارانه کاهش خواهد یافت .

درمورد سهمی دوار با ۲ = ۱ و $c=b=a$ ،معادله های(۵۰ الف و ب) بیشتر ساده خواهد شد:

$$\begin{cases} A_n = \frac{2a}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{(n/2)}}{n^2} \cdot \frac{-T_n}{C_n(1+T_n^2-\pi n T_n)} \\ B_n = \frac{2a}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{(n/2)}}{n^2} \cdot \frac{1}{C_n(1+T_n^2-\pi n T_n)} \end{cases} \qquad \text{(۵۶ الف و ب)}$$

فرمولهای (۴۸ الف و ب) و (۵۶ الف و ب) بیک‌صورت میباشد ولی در اولی n فرد و در دومی زوج است.

۹ ـ نمودار نیروهای غشائی پوستهٔ دودهانه‌ای بامحیط مربع :

برای نتیجه گیری از بحث قبلی پوستهٔ دودهانه‌ایرا با محیط مربعی شکل $(b=a)$ درنظر گرفته و کمیت برآیند تنش‌هارا در دوحالت پیدامیکنیم: درحالت نخستین فرض‌میکنیم که $T=0$ باشد، معادله های (۴۰ الف و ب) و (۴۳) بکار برده شده و نمودار نیروهای پوسته‌ای را ترسیم کرده‌ایم (شکلهای ۷-۱۱) . درحالت دوم $p=o$ ، باحالت قرینهٔ $T=1$ ، درنظر گرفته شده و معادله های (۴۸ الف و ب) و (۴۱) بکار برده شده ونمودار برآیندهای تنش در شکل (۷ الف - ۹ الف) رسم گردیده است.

شکل (۷) تغییرات $\overline{N}_y$ را درطول خط $y=o$ که درآن حداکثر $\overline{N}_y$ اتفاق میافتد ، نشان میدهد. دیده میشود که درطول این خط $\overline{N}_y$ بطور ملایم از $x=\frac{a}{2}$ تاحوالی $x=\frac{a}{4}$ کاهش مییابد و سپس طوری افزایش می‌یابد که درمحاذات تکیه گاه‌وسط کمیت $\overline{N}_y$ تقریباًسه برابرمقدار آن‌در $x=\frac{a}{2}$ و $x=o$ میباشد.

شکل (۸) تغییرات $\overline{N}_y$ را درطول لبهٔ $x=\frac{a}{2}$ مینماید. چون در این‌لبه $\overline{N}_x=o$ میباشد ، لذا از معادلهٔ (۹) نتیجه میگردد که $\overline{N}_y=-\frac{ph}{2}=$ مقداریست ثابت. اگر مقادیر شکل (۸) بااین‌مقدارثابت تفاوت دارد بدانجهت است که فقط تعداد معدودی (چهار) جملهٔ ازسری فوریه درمحاسبات منظور شده‌است.

در شکل (۹) تغییر $\overline{N}_y$ درطول قوس نازك و بازای $x=-\frac{a}{2}$ نموده شده است . شکل مزبور نموداری از توزیع نیرو میباشد ولی حالت موجی آن باحتمال قوی ناشی از درنظرگرفتن تعداد معدودی از جمله های سری فوریه تواند بود. در شکلهای (۱۰ و ۱۱) تغییر $\overline{N}_x$ درطول محور تقارن $y=o$ و $x=-\frac{a}{2}$ نموده شده است. ازآنجائیکه در این مثال $\alpha=\beta=1$ اختیارشده است ، معادلهٔ (۹) بارعایت علامت :

$$K=\frac{2ph}{\pi}$$

بصورت زیر نوشته میشود :

$$\frac{\overline{N}_x}{K}+\frac{\overline{N}_y}{K}=-\frac{\pi}{4} \tag{۵۷}$$

این رابطه نشان میدهد که شکلهای (۷و. ۲) و همچنین(۹و۱۱) بطور نزدیک با هم ارتباط دارد. ازمعادلهٔ (۱۴ ج) ، $\overline{N}_y$ شکلهای (۷ الف و ۹ الف) محاسبه گردیده است.

شکلهای (۷ الف و ۹ الف) نشان میدهد که $\overline{N}_y$ یک نیروی فشاری ، بطوریکه قابل پیش بینی بوده است ، میباشد. زیرا دراینحالت معادلهٔ (۹) منجر به رابطهٔ زیر میگردد :

$$\overline{N}_x+\overline{N}_y=0 \tag{۵۸}$$

یا $\overline{N}_x=\overline{N}_y-$ ، بنابراین لزومی ندارد برای $\overline{N}_x$ درطول $y=0$ و $x=-\frac{a}{2}$ ؛ نمودارهائی رسم گردد ؛ زیرا عیناً شکلهائی شبیه نمودارهای (۷ الف و ۹ الف) منتها باعلامت مخالف ، نتیجه خواهد شد. باضافه با توجه بشرایط حدی ، درطول لبه‌های $x=\frac{a}{2}$ و $y=\pm\frac{a}{2}$ ، $\overline{N}_x=\overline{N}_y=0$ خواهد بود.

۱۰ ـ طریقهٔ تعیین T :

چون یک پوسته که برسطح میانگین آن‌نیرو اثر کند میتواند با $T=0$ درحال‌تعادل‌باشد، پس‌نتیجه میگردد که اگر نیروی T در پوسته‌ای مخالف صفر باشد ، لذا کمیت آن نمیتواند بستگی بتعادل داشته باشد وبالنتیجه تابع تغییر شکل خواهد بود ، یعنی T نیروئی است نامعین(*).

اگر δ_{10} ، δ_{11} و δ_I بترتیب‌عبارت از مؤلفهٔ y تغییرمکان انتهای قوس نازك ، ناشی ازتأثیر بار p ، نیروی واحد T $(T=1)$ وتغییرشکل Inextensional آن باشد وفرض کنیم که قوس نازك برتکیه گاههای صلبی تکیه دارد ، لذا ازاین بیان نتیجه میگردد که برآیند تغییر مکان v دوانتهای قوس‌نازك صفر باشدیعنی:

$$v=\delta_{10}+T\delta_{11}+\delta_I=0$$

یا :

$$T=-\frac{\delta_{10}+\delta_I}{\delta_{11}} \tag{۵۹}$$

پس از محاسبهٔ δ_{10} و δ_{11} [۸] و δ_I [۱] ، مقدار T بدست میآید. دراینحالت $\delta_I=0$ [۱] میباشد وخواهیم داشت :

$$T=-\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \tag{۶۰}$$

۱۱ـ روش اجتماع اثر قوا (**) :

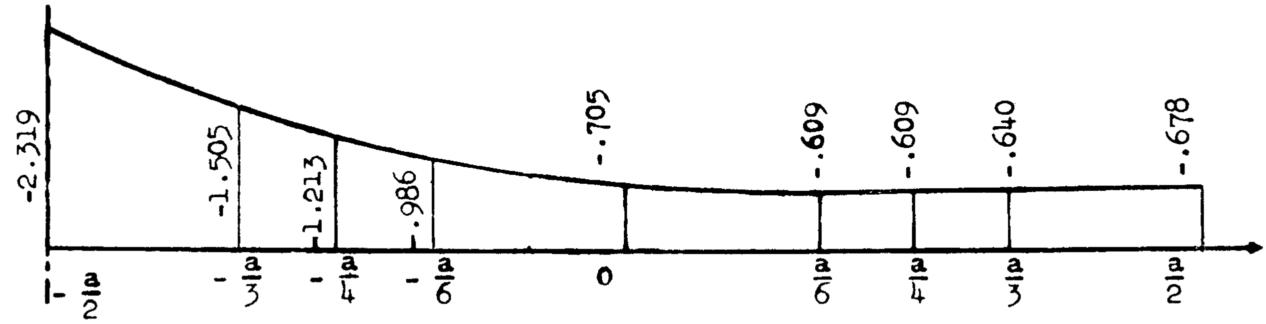
وقتیکه نیرویT بشرح فوق (بمعادلهٔ ۶۰ توجه شود) بدست‌آمد، تابع تنش که مربوط بحالت $T=1$ بود بایستی در T ضرب گردد آنگاه باتابع تنش ناشی از بار خارجی‌جمع گردد. پس‌ازآنکه Φ مشخص گردید

Method of Superposition ** Redundant Force *

تنش‌ها و تغییر شکلها را از فرمولهای مربوط میتوان بدست‌آورد .

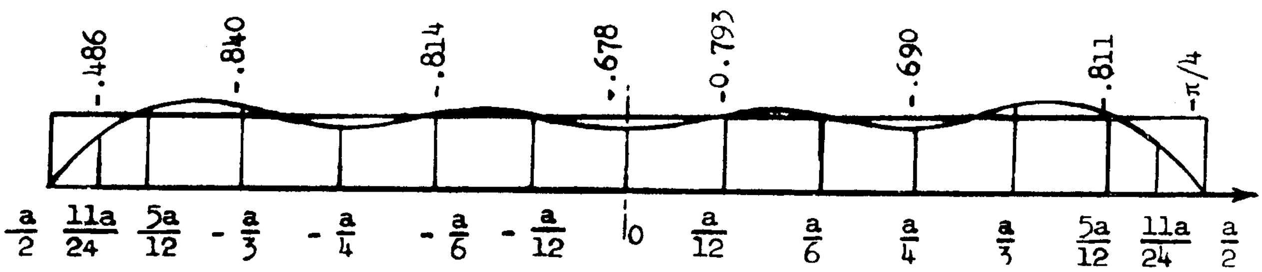
۱۲ ـ پوسته با سه دهانه مساوی :

باتوجه بشکل (۱) ، دراین‌حالت $k=3$ و $a_1=a_2=a_3=a$ میباشد. فرض میکنیم که :



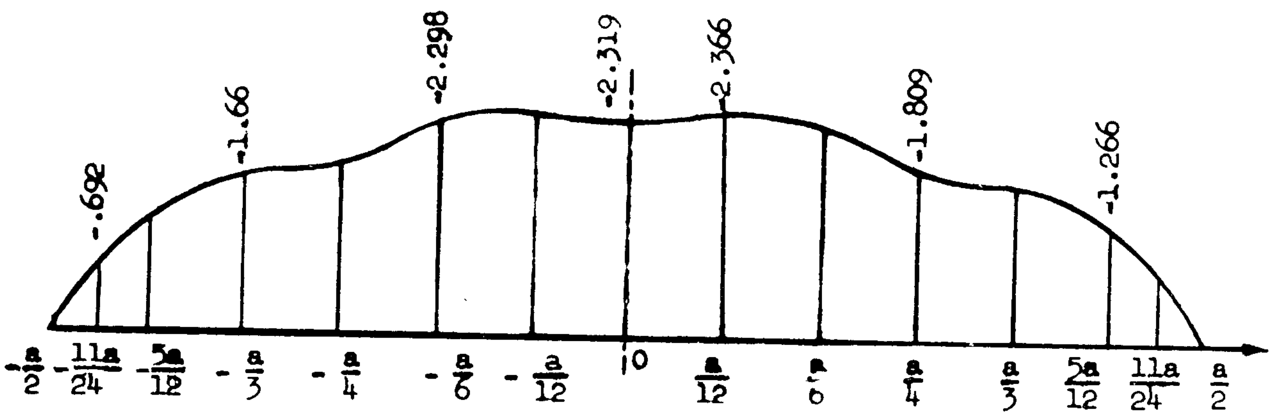
شکل ۷ ـ نمودار $\bar{N}_y$ درطول خط $y=0$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_y}{K}$ و $K=\frac{2ph}{\pi}$ میباشد)



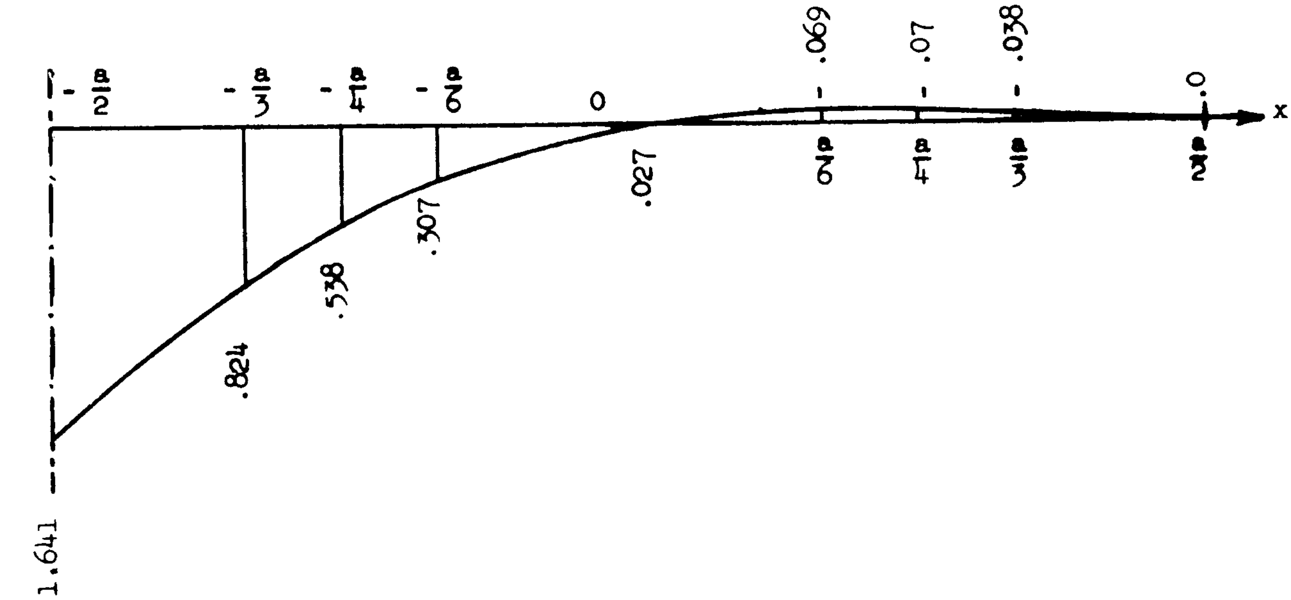
شکل ۸ـ نمودار $\bar{N}_y$ درطول لبهٔ $x=a/2$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_y}{K}$ میباشد)



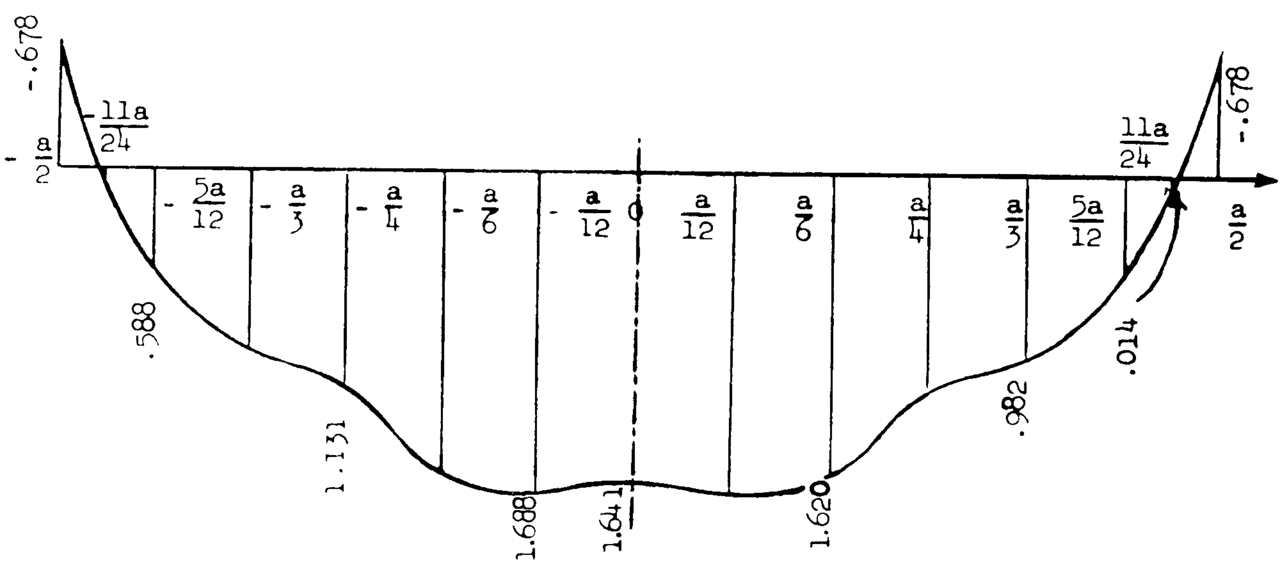
شکل ۹ ـ نمودار $\bar{N}_y$ درطول خط $x=-a/2$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_y}{K}$ میباشد)



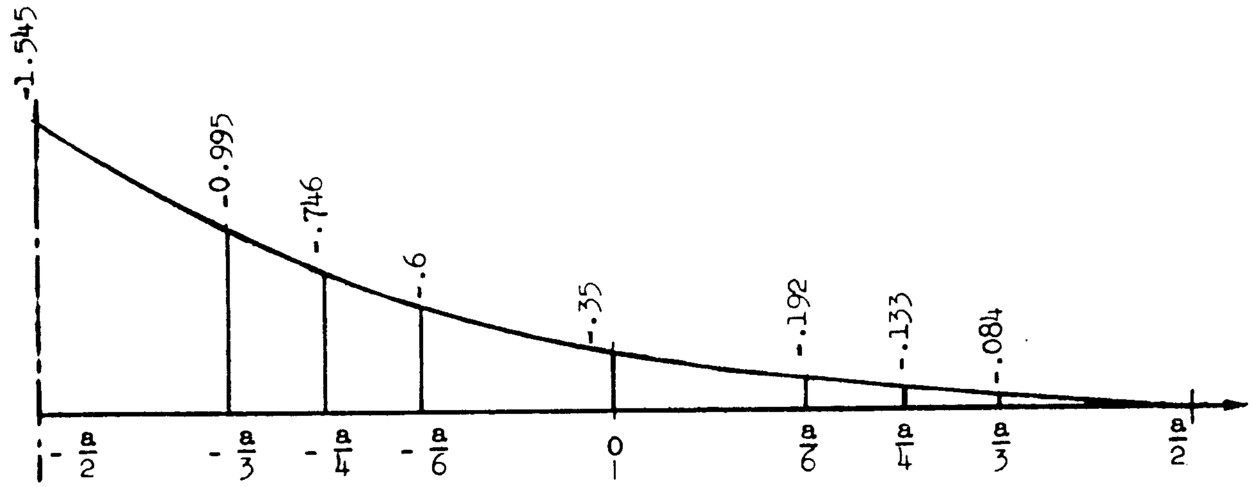
شکل ۱۰- نمودار $\bar{N}_x$ درطول خط $y=o$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_x}{K}$ میباشد)



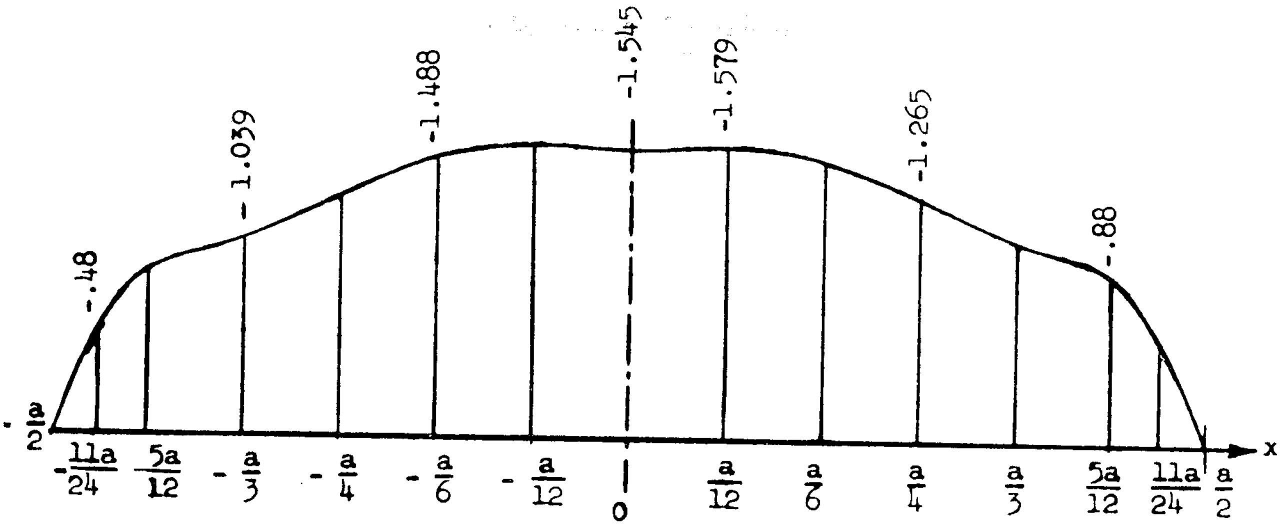
شکل ۱۱- نمودار $\bar{N}_x$ درطول خط $x=-{}^{a}/_{۲}$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_x}{K}$ میباشد)



شکل ۷ الف – نمودار $\bar{N}_y$ درطول خط $y=0$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_y}{K_1}$ و $K_1=\frac{2}{a}$ میباشد)



شکل ۹ الف ـ نمودار $\bar{N}_y$ درطول $x=-a/2$

(کمیت‌ها معرف $\frac{\bar{N}_y}{K_1}$ میباشد)

$\bar{p}_x=\bar{p}_y=0$ ، $\bar{p}_z=$ مقدار ثابت $=p$ ، شکل و ابعـاد سه دهانهٔ پوسته با یکدیگـر یکسان فرض میگردد . ازاینرو میتوان انتظار داشت که کمیت T در دوانتهای قوسهای نازك یکسان باشد.

قبل تجزیه وتحلیل تنش‌ها را مانند حالت در دوحالت انجام‌میدهیم: نخست وقتیکه $p\neq 0$ است ولی $T=0$ میباشد و درثانی $p=0$ و $T=1$.

حالت I ـ $p\neq 0$ و $T=0$

اگر Φ_1 و Φ_2 (شکل ۱) توابع تنش دهانه‌های ۱ و ۲ باشد ، بعلت تقارن پوسته و بار ، تنش‌ها

دردهانهٔ وسطی نسبت بمحورهای x و y قرینه خواهد بود. ازاینرو جملات $\operatorname{Sin} h\frac{n\pi x}{c}$ در معادلهٔ (۱۶) باید حذف گردد. لذاعبارت‌های Φ_1 ، $\overline{N}_{x1}$ ، $\overline{N}_{y1}$ ، $\overline{N}_{xy1}$ و Φ_2 ، $\overline{N}_{x2}$ ، $\overline{N}_{y2}$ ، $\overline{N}_{xy2}$ بشرح زیر خواهد بود :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} + A_{n1}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} + B_{n1}\operatorname{Sin} h\frac{n\pi x}{c} \right] \cos\frac{n\pi y}{b} \\ \overline{N}_{x1} = \frac{\pi^2}{b^2} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 \left[\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n+1}{2}} - \left(A_{n1}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} + B_{n1}\operatorname{Sin} h\frac{n\pi x}{c} \right) \right] \cos\frac{n\pi y}{b} \\ \overline{N}_{y1} = \frac{\pi^2}{c^2} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 \left(A_{n1}\operatorname{Cos} h\frac{n\pi x}{c} + B_{n1}\operatorname{Sin} h\frac{n\pi x}{c} \right) \cos\frac{n\pi y}{b} \\ \overline{N}_{xy1} = \frac{\pi^2}{bc} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 \left(A_{n1}\operatorname{Sin} h\frac{n\pi x}{c} + B_{n1}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} \right) \sin\frac{n\pi y}{b} \end{cases}$$

(۶۱ الف ـ د)

و

$$\begin{cases} \Phi_2 = \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} + A_{n2}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} \right] \cos\frac{n\pi y}{b} \\ \overline{N}_{x2} = \frac{\pi^2}{b^2} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 \left[\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^3} - A_{n2}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} \right] \cos\frac{n\pi y}{c} \\ \overline{N}_{y2} = \frac{\pi^2}{c^2} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 A_{n2}\operatorname{Cosh}\frac{n\pi x}{c} \cos\frac{n\pi y}{b} \\ \overline{N}_{xy2} = \frac{\pi^2}{bc} \sum\limits_{1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 A_{n2}\operatorname{Sinh}\frac{n\pi x}{c} \sin\frac{n\pi y}{b} \end{cases}$$

(۶۲ الف ـ د)

بازای هر n سه ثابت A_{n1} ، B_{n1} و A_{n2} وجود دارد که باید محاسبه گردد :

چون‌در $x = \frac{a}{2}$ ، کمیت $\overline{N}_{x1} = 0$ است ، ازآن یک معادله بدست میآید :

$$A_{n1}C_n + B_{n1}S_n = \frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^3} \qquad (63)$$

در بند سوم این مقاله نشان دادیم که برآیند مؤلفه های نیروهای غشائی عمودبرسطح قوس‌نازک، باید صفر باشد . این‌شرط لازم میآورد که :

$$\overline{N}_{x2} = \overline{N}_{x1} \qquad (64)$$

بازای $x = -\frac{a}{2}$ ؛

معادلهٔ (٦٤) بصورتیکه نوشته شده است حتی اگر α و β و α در دهانه‌های ۱ و ۲ باهم متفاوت باشد، نیز معتبر و درست است. درحالت خاص که سه دهانهٔ پوسته‌ای ازحیث انحناء واندازه یکی باشد معادلهٔ (٦٤) منجر برابطهٔ زیر خواهد شد :

$$N_{x1} = N_{x2}$$

اگر ازمعادله های (٦١ ب) و (٦٢ ب) بجای $\overline{N}_{x1}$ و $\overline{N}_{x2}$ درمعادلهٔ (٦٤) قرار دهیم ، نتیجهٔ زیر بدست میآید :

$$\frac{\pi^2}{b^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty} n^2 \left(\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^3} - (A_{n1}C_n - B_{n1}S_n) \right) \cos\frac{n\pi y}{b} =$$

$$\frac{\pi^2}{b^2} \sum_{1,3,5,\ldots}^{\infty} n^2 \left(\frac{2phb^2}{\alpha\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n+1}{2}} - A_{n2}C_n \right) \cos\frac{n\pi y}{b}$$

این اتحاد باید بازای هریک ازمقادیر n صادق باشد پس :

$$A_{n1}C_n - B_{n1}S_n = A_{n2}C_n \qquad (65)$$

شرط حدی سوم دایر برآزاد بودن قوس نازك از خمش را میتوان با تغییر دادن معادلهٔ (٥٢ الف و ب) و درنظر گرفتن نیروهای مؤثر بردودهانهٔ متوالی که دیگر برابر با یکدیگر نیست ، نوشت.

بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{cases} V = \overline{N}_{x1} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 + \overline{N}_{x2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2 + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\overline{N}_{xy1} + \overline{N}_{xy2}\right) \\ H = \overline{N}_{xy1} + \overline{N}_{xy2} \end{cases} \qquad \text{(٦٦ الف و ب)}$$

چون این معادله را برای قوس نازك ۱ شکل (۱) مینویسیم ، داریم :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

آنگاه باتوجه بمعادلهٔ (٦٤) ، معادله (٦٦ الف) را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$V = 2\,\overline{N}_{x2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\overline{N}_{xy1} + \overline{N}_{xy2}\right) \qquad (67)$$

اگر درمعادلهٔ (۳۰) بجای $T = 0$ ، قراردهیم وازآن برحسب y مشتق گرفته و بجای H و V ازمعادله های (٦٦ ب) و (٦٧) بگزاریم ، نتیجه میگردد :

بقیه مقاله درصفحه ۱۱٦