متد کمترین مربعات بااستفاده از جبر ماتریس‌ها حالت

((معادلات مشاهدات))

نوشتهٔ :

مهندس علی اصغر شریفی

مقدمه

میدانیم که در علوم تجربی برای حذف خطاهای اتفاقی معمولا تعداد اندازه‌گیری‌ها را افزایش می‌دهند ، زیرا که طبق تجربیات آماری وقتی تعداد اندازه‌گیری یک کمیت به بینهایت میل کند میانگین خطای اتفاقی بسوی صفر میل خواهدنمود . اگر خطای اتفاقی را ε بنامیم حالت فوق در آمار ریاضی بصورت زیر نشان داده می‌شود :

$$E\{\varepsilon\} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i}{n} = 0$$

علامت $E\{\varepsilon\}$ را «مقدار ایدآل» کمیت ε می‌نامیم . هرگاه n باندازه کافی بزرگ باشد (تعداد اندازه گیری‌ها $= n$) میتوانیم با تقریب بخود اجازه می‌دهیم که مقدار ایده‌آل کمیت اندازه گیری شده را با میانگین برابر فرض کنیم .

افزایش تعداد کمیت‌های قابل اندازه‌گیری و نیز تکرار اندازه گیری هر کمیت ، باعث می گردد که تعداد معادلات ریاضی چندین برابر تعداد مجهولات (پارامترها) باشد . اینجا است که محاسبات علوم تجربی از محاسبات ریاضی تئوری مجزا می‌شود . بزبان ساده‌تر ، در ریاضی برای حل مثلا دومجهول دو معادله کافی است ، ولی در علوم تجربی برای حل دومجهول گاه چندین معادله در دست است . هردوتا از

معادلات جوابی برای مجهولات بدست می‌دهد که با دیگر جوابها متفاوت است. متد کمترین مربعات متدی است که با استفاده ازتمام معادلات، جواب واحدی بدست خواهد داد. این روش را میتوان با دو خصوصیت کلی آن خلاصه کرد:

۱ - جواب بدست آمده واحد و مستقل از روش انتخاب و ترتیب معادلات است.

۲ - اگر تفاوت نتایج حاصله را با مقادیر واقعی بدست آوریم. مجموع مربعات این تفاوت‌ها می‌نیمم میباشد.

روش کلاسیک کمترین مربعات در اغلب کتابهای تئوری خطاها، ژئودزی ویا آنالیز عددی تشریح شده. روش کلاسیک دارای نقاط ضعف عملی بسیار است که اهم آنها بترتیب زیر خلاصه میشود.

۱ - حل صدها معادله و مجهول با روش کلاسیک بمنزله صرف چندین ماه وقت چند محاسب است.

۲ - سرشکنی شبکه های نسبتاً بزرگ ژئودزی بطور یکجا با این روش عملا غیرممکن است، بناچار می‌بایست شبکه اصلی را به شبکه های کوچکتر تقسیم وهریک را جداگانه سرشکن نمود. این عمل بعلت آنکه اکثراً ناقص اصل اول است پسندیده نیست.

۳ - آنالیز دقت محاسبات و دقت کمیت های سرشکن شده مشکل است.

٤ - دخالت دادن اندازه گیری های غیر مستقل (اثر کوریانس ها Covariance) در محاسبات مشکل غیر عملی است.

باید توجه داشت که نقاط ضعف فوق الذکر بعلت ضعف تئوری کمترین مربعات نبوده، بلکه بعلت دشواری محاسبات است. این مشکل با استفاده ازجبر ماتریس ها وکامپیوترهای الکترونیک حل شده وزمان لازم برای محاسبه صدها بار تقلیل می‌یابد. برای بکارگرفتن این متد انجام دو مرحله بعهده ما است:

۱ - پیدا کردن و نوشتن مدل ریاضی مناسب.

۲ - تخمین وزن (یا ضرائب وزن) اندازه گیری‌ها با استفاده از اطلاعاتی که راجع به نوع اندازه گیری، شرائط محیط، و دقت وسیله اندازه گیری داریم.

دو مرحله فوق نقش حساسی در سرشکنی ایفامی نمایندوانجام آن ازعمده کارهای مهندس مسئول است. در باره هریک از مراحل فوق جداگانه بحث خواهد شد، درضمن لازم میداند متذکر شود که دقت کمیت های تخمین زده شده را میتوان بعداز سرشکنی با تست های آماری سنجید و نیز قدرت ویا ضعف مدل ریاضی را میتوان با در نظرگرفتن «وریانس - کوریانس» کمیت های سرشکن شده مورد تجزیه و تحلیل قرارداد.

بعداز انجام دو مرحله فوق آنچه باقی می‌ماند یک‌سری عملیات جبرماتریسی است که بوسیله کامپیوترانجام می‌شود. این عملیات ماتریسی بعد تشریح شده وبالاخره خلاصه عملیات بصورت سلسله مراتب عرضه خواهد شد.

بحث درمورد جبرماتریس‌ها از حوصله این مقاله خارج است. بنابراین انتظار می‌رود که خواننده آشنائی مقدماتی به جبرماتریس‌ها را داشته باشد. معهذا جهت آشنائی با علامات بکار رفته توجه خواننده بنکات زیر جلب می‌شود.

۱) حروف بزرگ فقط برای نشان‌دادن ماتریس‌ها بکار می‌رود (سوای E که برای مقدار ایده‌آل بکار می‌رود).

۲) اندازه (ابعاد) ماتریس با دو اندیس نشان داده می‌شود، مانند $_nA_m$ که نشان میدهد ماتریس A دارای n سطر و m ستون است.

۳) ماتریس برداری به ماتریسی اطلاق می‌شود که فقط دارای یک سطر ویا یک ستون باشد، آنها را بردار سطر ویا بردارستون می‌خوانیم. مانند بردارستون $_nV_1$ ویا بردار سطر $_1V'_n$.

٤) علامت (′) برای نشان دادن ماتریس ترانسپوز (Transpose) بکار می‌رود. (میدانیم ترانسپوزیک ماتریس‌ماتریسی است که‌ازجایگزین کردن سطرهای ماتریس اصلی بجای ستون‌های‌آن بدست می‌آید).

٥) اندیس‌های a , b , o بترتیب برای نشان دادن کمیت‌های سرشکن شده، اندازه‌گیری شده و تقریبی بکارمی‌رود.

۱ . ۱ مدل ریاضی

مدل ریاضی به روابطی (توابع ریاضی) اطلاق می‌شود که بین اندازه‌گیری‌ها و پارامترها وجود دارد. مانند رابطه‌بین اضلاع و زوایای مثلث ویارابطه بین فاصله، اختلاف ارتفاع و زاویه قائم بین دو نقطه. مدل ریاضی گاه بصورت یک رابطه قطعی ریاضی است مانند مثال‌های ذکر شده، وگاه بصورت یک‌سری و این در موردی‌است که اولا تعداد متغیرهازیاد بوده و درثانی اطلاع دقیق از چگونگی‌تغییرات آنها در دست‌نباشدمانندشکست نور که‌تابعی است از: زاویه‌تابش، ارتفاع نقطه، و تغییرات‌جرم‌مخصوص جو نسبت به فشار هوا، درجه حرارت، رطوبت و ثقل زمین و غیره.

بسته بچگونگی نقش اندازه‌گیری‌ها و پارامترها مدل ریاضی حالت‌های گوناگون بخود میگیرد.

یکی ازآن حالت ها که مورد نظرمورداین مقاله است بنام معادلات مشاهدات (Observation Equations) خوانده می‌شود و آن حالت خاصی است که میتوان هراندازه گیری را بصورت تابعی از یک یا چند پارامتر نوشت. مجوعه اینگونه معادلات را میتوان با علائم ماتریسی بصورت زیر نمایش داد :

$$L_a = F(X_a) \qquad (۱-۱)$$

که L_a نشان دهنده «اندزه گیری های سرشکن شده» و X_a نشان دهنده « پارامترهای سرشکن شده» می باشد.

فرض کنیم که تعداد کمیت های اندازه گیری شده n و تعداد پارامترها u باشد، میدانیم بعلت آنکه درهریک از معادلات (۱-۱) فقط یک اندازه گیری شرکت دارد بنابراین تعداد معادله ها نیز n میباشد. واضح است که حل معادله‌های فوق درصورتی امکان دارد که $n \geqslant u$ باشد، زیرا درحالت $n = u$ حل معادلات بصورت جبری بوده و سرشکنی، مفهومی ندارد. هرچه تعداد $(n-u)$ زیادتر باشد خطاهای اتفاقی شانس کمتری برای تأثیر گذاشتن روی نتایج نهائی دارند و یا بعبارت دیگر دست ما برای سرشکنی خطاها بازتر است. بنابراین $(n-u)$ را « درجهٔ آزادی » می‌خوانیم.

۱-۲ ماتریس ضرائب وزن

میدانیم که وزن دراندازه گیری رابطه مستقیم با دقت آن اندازه گیری دارد. پس بهتر است ابتدا عاملی پیدا کنیم که معرف دقت باشد. خوشبختانه مربع تفاوت کمیت اندازه گیری شده با مقدار واقعی چنین امکانی را بدست می‌دهد. مقدار ایده‌آل این مربع را وریانس (Variance) می‌نامیم. اگر μ_i مقدارواقعی اندازه گیری y_i باشد میتوان وریانس y_i را چنین نوشت :

$$\mathrm{Var}(y_i) = \sigma_i^2 = E\{y_i - \mu_i)^2\} \qquad (۱-۲)$$

اگر دواندازه گیری داشته باشیم مانند y_i و y_j (با مقادیر واقعی μ_i و μ_j) ، وانیدو اندازه گیری بهم بستگی داشته باشند آنچنانکه خطای یکی تاثیر مستقیم دراندازه گیری دیگری داشته باشد، انیدو اندازه گیری را وابسته می گوئیم (این حالت فقط بین یک اندازه گیری مستقیم و یک اندازه گیری غیر مستقیم ممکن است وجود داشته باشدمانندمساحت یک دایره و اندازه گیری شعاع آن، وگرنه دواندازه گیری مستقیم رامیتوان مستقل ازهم فرض نمود). این وابستگی باعث معرفی عامل دیگری بنام کووریانس (Covariance) بین y_i و y_j است.

$$\mathrm{Cov}(y_i\ ,\ y_j) = \sigma_{ij} = E\{(y_i - \mu_i)(y_j - \mu_j)\} \qquad (۱-۳)$$

اینک ماتریس برداری Y را درنظر بگیرید که اجزاء آن متغیرهای اتفاقی y_1 و y_2 ، .... y_n (مثلا اندازه گیری ها) هستند :

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{۱ − ٤}$$

هریک از این اجزاء دارای واریانس σ_i^2 $(i=1.2 , \cdots , n)$ و هرجفت مانند y_i و y_j دارای کوواریانس های $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ هستند که :

$$i \text{ و } j=1,2 , \cdots , n \qquad i\neq j$$

این واریانس ها و کوواریانس ها با هم تشکیل یک ماتریس قرینه میدهند (زیرا که $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$) که بنام « واریانس ـ کوواریانس ماتریس »خوانده می‌شود و ما آنرا با حرف یونانی Σ نشان میدهیم .

$$\Sigma_y=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{۱ − ٥}$$

میدانیم که « وزن » یک کمیت نسبی است پس میتوان وزن یکی از متغیرهای اتفاقی را مساوی واحد فرض کرد و وزن سایر متغیرها را نسبت بآن محاسبه نمود. واریانس این متغیر را $\sigma_\circ^2$ نامیده و آنرا « واریانس وزن واحد » می‌خوانیم. اگر تمام اجزاء واریانس ـ کوریانس ماتریس را به $\sigma_\circ^2$ تقسیم کنیم ماتریس ضرائب وزن بدست می‌آید. این ماتریس را با حرف Q نشان مندهیم .

$$Q_y=\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_\circ^2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_\circ^2} & \cdots & \frac{\sigma_{1n}}{\sigma_\circ^2} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_\circ^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_\circ^2} & \cdots & \frac{\sigma_{2n}}{\sigma_\circ^2} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_{n1}}{\sigma_\circ^2} & \frac{\sigma_{n2}}{\sigma_\circ^2} & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\circ^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_\circ^2}\,\Sigma_y \tag{۱ − ٦}$$

میدانیم که هرچه وریانس یک اندازه گیری کوچکتر باشد آن اندازه گیری دقیق‌تر و بالنتیجه وزن آن بیشتر است ویا بعبارت دیگر ماتریس Q معکوس ماتریس وزن است. اگرماتریس وزن را با P نشان دهیم، میتوان نوشت :

$$P_y = Q_y^{-1} = \sigma_o^2 \Sigma_y^{-1} \qquad (۱-۷)$$

اگر اجزاء بردار Y مستقل باشند درآنصورت کوورریانس‌ها مساوی صفر بوده وماتریس وزن یک ماتریس قطری خواهد بود. توجه داریم که ماتریس وزن همیشه یک ماتریس مربع و ابعاد آن مساوی طول بردار Y می‌باشد.

۳ - ۱ وریانس - کوورریانس تابع

هرگاه‌بردار Y تابعی از بردار X باشد $Y = GX + D$ ونیز وریانس-کوورریانس‌بردار X دردست باشد، درآنصورت وریانس - کوورریانس Y بترتیب زیر محاسبه می‌شود. اگر مقدار واقعی بردار Y را U_y بنامیم، با درنظرگرفتن تعریف «مقدار ایده‌آل» می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} U_y &= E\{Y\} = E\{GX + C\} = E\{GX\} + C \\ &= GE\{X\} + C \end{aligned} \qquad (۱-۸)$$

ماتریس G ماتریس ضرائب و بردار C بردار مقادیر ثابت است و واضح است که ·

$$E\{G\} = G \quad , \quad E\{C\} = C$$

اینک طبق تعریف وریانس - کوورریانس میتوان وریانس - کوورریانس بردار Y را بصورت زیر نوشت :

$$\Sigma_y = E\{\,(Y - U_y)\,(Y - U_y)'\} \qquad (۱-۹)$$

که :

$$\begin{aligned} Y - U_y &= GX + C - GE\{X\} - C \\ Y - U_y &= G(X - E\{X\}) \end{aligned} \qquad (۱-۱۰)$$

اینک اگر بردار $(Y - U_y)$ و ترانسپوز آن $(Y - U_y)'$ را در رابطه(۹-۱) قرار دهیم‌بدست‌می‌آید :

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= E\{G(X - E\{X\})(X - E\{X\})'G'\} \\ &= GE\{(X - E\{X\})(X = E\{X\}'\}\, G' \end{aligned}$$

باتوجه به :

$$E\{(X - E\{X\})(X - E\{X\})'\} = E\{(X - U_x)(X - U_x)'\} = \Sigma_x$$

که U_x مقدار واقعی یا مقدار ایده‌آل بردار X است. بالاخره‌وریانس - کوواریانس تابع Y را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\Sigma_y = G\Sigma_x G' \qquad (1-11)$$

درحالتیکه Y یک تابع غیرخطی از X بصورت $Y=F(X)$ باشد رابطه (۱-۱۱) بقوت خود باقی است فقط دراین حال ماتریس G عبارتست از :

$$G = \frac{\partial F}{\partial X}$$

۰ ـ ۲ معادلات مشاهدات

گفتیم که معادلات مشاهدات حالت خاصی از مدل ریاضی است که میتوان هراندازه گیری را بصورت تابعی از پارامترها (مجهولات) نوشت، بنابراین واضح است که دراین حالت بتعداد اندازه گیری ها معادله خواهیم داشت

مثال : فرض کنید که درترازیابی بین چند نقطه A , B , C , D و $F\cdots$ ارتفاع نقطه A معلوم $(H_A = 1000\ m)$ و کمیت‌های اندازه گیری شده اختلاف ارتفاع بین نقاط بوده و پارامترها ارتفاع نقاط B , C , D , $F\cdots$ باشند و یا :

$$L_b = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle H_{AB} \\ \triangle H_{BC} \\ \triangle H_{CD} \\ \vdots \\ \triangle H_{BF} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ \vdots \\ H_F \end{bmatrix}$$

دراین حال معادلات مشاهدات بصورت زیر خواهد بود :

$$\left\{\begin{array}{l} \triangle H_{AB} = H_B - 1000 \\ \triangle H_{BC} = H_C - H_B \\ \triangle H_{CD} = H_D - H_C \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \triangle H_{EF} = H_F - H_B \end{array}\right. \quad \text{و یا} \quad \left\{\begin{array}{l} (l_a)_1 = (x_a)_1 - 1000 \\ (l_a)_2 = (x_a)_2 - (x_a)_1 \\ (l_a)_3 = (x_a)_3 - (x_a)_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (l_a)_n = (x_a)_u - (x_a)_1 \end{array}\right. \Longrightarrow L_a = F(X_a)$$

توجه خواننده به این نکته جلب می‌شود که در معادلات فوق مقادیر سرشکن شده اندازه گیری ها و پارامترها بکار رفته بعلت آنکه مقادیر سرشکن شده در مدل ریاضی صدق می کنند ولی مقادیر اندازه گیری شده بعلت

داشتن خطای اندازه‌گیری در مدل ریاضی صدق نمی‌کنند بنابراین هرگاه که بخواهیم مدل ریاضی را نمایش دهیم با مقادیر سرشکن شده ویا با مقادیر اندازه‌گیری شده باضافه خطای اندازه‌گیری نشان میدهیم.

علائم قراردادی : دراین مقاله بطور کلی کمیت‌های اندازه‌گیری شده را با حرف L و پارامترها (مجهولات) را با X نشان میدهیم. حالت‌های مختلف انیدو کمیت را با اندیس‌های زیر آن‌شخص خواهیم کرد. این علائم تقریباً بوسیله اکثر کشورها در محاسبات سرشکنی بکار می‌رود. شرح مختصر هریک بصورت زیر است.

$X_\circ$: مقدار تقریبی پارامترها که قبل از انجام محاسبات سرشکنی تخمین زده و یا بصورت تقریب محاسبه می‌شود.

X_a : پارامترهای سرشکن‌شده (نتیجه محاسبات سرشکنی)

$X=(X_a-X_\circ)$: نشان دهنده تفاوت پارامترهای سرشکن شده و مقادیر تقریبی پارامترها

L_b : کمیت‌های اندازه‌گیری شده (مشاهدات)

$L_\circ$: مقادیر تقریبی اندازه‌گیری‌ها که با گذاشتن $X_\circ$ در مدل ریاضی محاسبه میشودو یا

$$L_\circ=F(X_\circ)$$

L_a : اندازه‌گیری‌های سرشکن شده (نتیجه محاسبات سرشکنی)

$L=L_\circ-L_b$: تفاوت مقادیراندازه‌گیری‌ها باخوداندازه‌گیری‌ها.

$V=(L_a-L_b)$: تفاوت اندازه‌گیری‌های سرشکن شده با خود اندازه‌گیری‌ها. این تفاوت را باقیمانده یا رزیدوآل (Reridual) می‌خوانیم.

دیدیم که مدل ریاضی برای معادلات مشاهدات بصورت $L_a=F(X_a)$ میباشد. واضح است که مقادیر تقریبی $[X_\circ]$ واندازه‌گیری‌های $[L_b]$ بعلت داشتن خطای تقریب و خطای اندازه‌گیری درمدل فوق صدق نمی‌کنندولی‌میتوان معادله را برحسب کمیت‌های فوق‌الذکر بصورت زیرنوشت :

$$L_b+V=F(X_\circ+X) \qquad (۲-۲)$$

که V برداری است نشان دهنده باقیمانده‌ها (رزیدآل‌ها) و X برداری است شامل تصحیحات روی $X_\circ$ و میتوان نوشت :

$$V=L_a-L_b \qquad (۲-۲)$$

$$X=X_a-X_\circ \qquad (۲-۳)$$

معادله ماتریسی (۲-۱) معمولا شامل توابع غیرخطی است، دراینصورت میتوان آنرا بصورت بسط سری تیلورنوشت :

$$L_b+V=F(X_\circ)+\left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a=X_\circ}(X_a-X_\circ)+\cdots \qquad (۲-۴)$$

برای محاسبه مشتقات جزئی توابع (مدل ریاضی) نسبت به پارامترها چون پارامترهای سرشکن شده (X_a) در دست‌نیستند مقادیر تقریبی آن‌ها $(X_\circ)$ قرداد میشود. این مشتقات جزئی را با ماتریس A نشان میدهم

$$A=\left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a=X_\circ} \qquad (۲-۵)$$

ماتریس A شامل n سطر (تعداد توابع F) و u ستون (تعداد پارامترها) میباشد. آنرا میتوان بصورت زیر نشان داد:

$$_{n}A_{u}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix}_{n\geqslant u}$$

معمولاً در محاسبات از مشتقات جزئی درجه دو درجات بالاتر صرفنظر می‌شود. بنابراین با درنظرداشتن معادله (۲-۳) سری (۲-٤) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$L_b+V=F(X_\circ)+AX \qquad (۲-٦)$$

و یا:

$$V=AX+F(X_\circ)-L_b \qquad (۲-۷)$$

اگر بخاطر داشته باشید در شرح علائم قراردادی داشتیم که:

$$L_\circ=F(X_\circ) \quad و \quad L_\circ-L_b=L$$

بنابراین (۲-۷) بصورت زیرنوشته می‌شود.

$$\boxed{V=AX+L} \qquad (۲-۸)$$

معادله (۲-۸) نیز بـه معادلات مشاهدات (Observation Equa tions) معروف است. دراین معادله L برداری است معلوم زیرا که میدانیم:

$$L=L_\circ-L_b=F(X_\circ)-L_b \qquad (۲-۹)$$

و $X_\circ$ و L_b معلوم هستند، همانطورکـه بحث شد ماتریس A نیز معلوم است. مجهولات ایـن معادلـه عبارتنداز بردارهای $_uX_1$ و $_nV_1$ وهدف‌بدست آوردن X و V است درحالتی که‌مجموع مربعات باقیمانده‌ها $\left(\sum_{i=1}^{n} V_i^2\right)$ می‌نیمم باشد. در موردی که اندازه‌گیری هادارای‌وزن‌های‌مختلف هستند عبارت فوق‌بصورت $\left(\sum_{i=1}^{n} p_iV_i^2\right)$ نوشته‌می‌شود.(این عبارت درصورتی صحیح است که‌ماتریس P یک ماتریس قطری‌باشد) درحالت کلی باعلائم ماتریسی شرط فوق بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$V'PV=\min \qquad (۲-۱۰)$$

که V' ترانسپور ماتریس V می‌باشد.

برای آنکه $V'PV$ می‌نیمم باشد کافی است مشتق آنرا نسبت به X مساوی صفر قرارداد. برای این منظور ابتدا $V'PV$ را بطریق زیر خواهیم نوشت:

$$V=AX+L$$

$$V'PV=(AX+L)'P(AX+L) \qquad (۲-۱۱)$$

$$V'PV=(X'A'+L')P(AX+L) \qquad (۲-۱۲)$$

$$={}_1X'A'PAX_1+{}_1X'A'PL_1+{}_1L'PAX_1+{}_1L'PL_1$$

که اندیس‌های زیر نشان دهنده ابعاد هرماتریس است. میدانیم که درحاصلضرب چند ماتریس اندیس اول و آخرنشان دهنده‌ابعاد ماتریس حاصلضرب است. بنابراین قسمت دوم وسوم عبارت (۲-۱۲)ماتریس هائی بایک سطر ویک ستون (ویا یک‌عدد) میباشند واضح است که در چنین حالتی ترانسپوز مساوی خود ماتریس است. بنابراین :

$${}_1L'_n\,{}_nP_n\,{}_nA_u\,{}_uX_1=(L'PAX)'={}_1X'_u\,{}_uA_n'\,{}_nP_n\,{}_nL_1 \qquad (۲-۱۳)$$

با جایگزین کردن (۲-۱۳) در معادله (۲-۱۲) خواهیم داشت :

$$V'PV=X'A'PAX+2X'A'PL+L'PL \qquad (۲-۱۴)$$

انتظار می‌رود که ابعاد هریک از ماتریس های بکار رفته برای خواننده روشن شده باشد. بنابراین از نوشتن ابعاد هرماتریس در زیر آن خودداری می‌شود.

اینک اگرمشتق جزئی $V'PV$ را نسبت به X مساوی صفر قرار دهیم بدست می‌آید :

$$\frac{1}{2}\;\frac{\partial(V'PV)}{\partial X}=A'PAX+A'PL=0 \qquad (۲-۱۵)$$

و یا :

$$A'PAX=-A'PL$$

$$\boxed{X=-(A'PA)^{-1}A'PL} \qquad (۲-۱۶)$$

برای سهولت خواهیم نوشت:

$${}_uA_n'\,{}_nP_n\,{}_nA_u={}_uN_u$$

$${}_uA_n'\,{}_nP_n\,{}_nL_1={}_uU_1$$

باعلائم فوق معادله (۲-۱۶) را میتوان بصورت ساده زیر نوشت :

$$\boxed{X=-N^{-1}\cdot U} \qquad (۲-۱۷)$$

معادلات(۲-۱۷)بنام « معادلات‌نرمال» و ماتریس مربع N بنام ماتریس نرمال خوانده می‌شود. باجایگزین کردن X در عبارت (۲-۸) میتوان V را محاسبه نمود و با داشتن X و V اندازه‌گیری‌ها و پارامترهای سرشکن شده بدست خواهد آمد :

$$\begin{cases} L_a=L_b+V & (۲-۱۸)\ a \\ X_a=X_\circ+X & (۲-۱۸)\ b \end{cases}$$

۱ـ۲ تجزیه و تحلیل دقت

یکی از عواملی‌که امکان چنین تجزیه و تحلیلی را بدست می‌دهد « واریانس واحد وزن» یا $\sigma_\circ^2$ می‌باشد. گفتیم که $\sigma_\circ^2$ واریانس اندازه‌گیری‌هائی است‌که وزنشان مساوی واحد باشد. چون وزن‌هراندازه‌گیری را قبل ازشروع محاسبات‌تخمین‌زده‌ایم پس $\sigma_\circ^2$ نیز کمیتی است‌تخمینی. گرچه بعداز خاتمه‌محاسبات سرشکنی میتوان آنرا بطریق محاسبه نیز بدست‌آورد :

$$\hat{\sigma}_\circ^2=\frac{V'PV}{n-u} \qquad (۲-۱۹)$$

که گفتیم n عبارتست از تعداد اندازه‌گیری‌ها ، u تعداد پارامترها بوده و عبارت $(n-u)$ را درجه آزادی خواندیم. بنابراین دو مقدار برای $\sigma_\circ^2$ داریم که یکی را باصفت « قبل ازمحاسبه » و دیگری را باصفت « بعد ازمحاسبه» خواهیم نامید و. در نوشتن دومی را با کلاهکی بالای آن مشخص می‌کنیم ($\hat{\sigma}_\circ^2$).

دومقدار $\sigma_\circ^2$ و $\hat{\sigma}_\circ^2$ نباید اختلاف‌زیاد داشته باشند ، اختلاف فاحش آنها ممکن است بعلت یک یاچند تا ازعلل مشروحه زیر باشد.

۱ ـ اشتباه عددی درمحاسبات

۲ ـ اشتباه دریک یا چند اندازه‌گیری

۳ ـ تخمین نادرست ماتریس وزن‌ها

٤ ـ ضعف یا نادرستی مدل ریاضی

٥ ـ خطای فاحش درتخمین مقدار تقریبی پارامترها $(X_\circ)$

۶ ـ تأثیر مشتقات جزئی درجه دو (وبالاتر) در بسط سری تیلر (۴-۲).

باید توجه داشت درصورتی میتوان به‌چنین تجزیه و تحلیلی مبادرت‌ورزید که مقدار $(n-u)$ نسبتاً بزرگ باشد درغیراینصورت میگوئیم درجه آزادی کم بوده و نمیتوان به صحت $\hat{\sigma}_\circ^2=\frac{V'PV}{n-u}$ اطمینان داشت (دراین حالت خود سرشکنی بطورکلی ضعیف میباشد).

۲ . ۲ دقت کمیت‌های سرشکن شده

گفتیم که دقت اندازه‌گیری ویا محاسبه هر کمیت نسبت معکوس با واریانس آن کمیت دارد. بنابراین برای بحث‌در دقت‌اندازه‌گیری‌های سرشکن‌شده (یا L_a) و پارامترهای سرشکن شده (یا X_a) کافی است که واریانس ـ کوواریانس ماتریس هریک رابدست آوریم. با توجه به معادله دوم (۱۸-۲) میدانیم که :

$$X_a=X_\circ+X$$

ونیز میدانیم که $X_\circ$ مقداری است ثابت ، بنابراین $\Sigma_{xa}=\Sigma_x$ یا بعبارت ساده‌تر واریانس ـ کوواریانس X_a مساوی است با واریانس ـ کوواریانس X .

اما برای‌بدست آوردن واریانس ـ کوواریانس X و L_a میدانیم که هردو تابعی هستنداز کمیت‌های اندازه گیری‌شده.

$$X=-(A'PA)^{-1}A'PL \qquad (۲-۲۰)$$

$$L_a=L_b+V=L_b+AX+L_\circ-L_b=AX+L_\circ \qquad (۲-۲۱)$$

و میدانیم که‌واریانس‌ـ کوواریانس‌اندازه گیری‌ها‌در‌دست‌است. بنابراین باتوجه‌به (۷-۱) داریم: خواهیم‌داشت

$$\Sigma_{L_b}=\sigma_\circ^2P^{-1} \qquad (۲-۲۲)$$

بادر نظر گرفتن روابط (۹-۲) و (۲۰-۲) میتوان نوشت :

$$X=-(A'PA)^{-1}A'P(L_\circ-L_b) \qquad (۲-۲۳)$$

باتوجه به رابطه(۱۱-۱) واریانس‌ـ کوواریانس X رامیتوان برحسب واریانس‌ـ کوواریانس L_b بصورت زیر نوشت :

$$\Sigma_x=G\Sigma_{Lb}G' \qquad (۲-۲۴)$$

که G عبارتست از ماتریس ضرائب ویا

$$G=\frac{\partial X}{\partial L_b}=(A'PA)^{-1}A'P=N^{-1}A'P$$

بنابراین نتیجه می‌شود که :

$$\Sigma_x=(N^{-1}A'P)\Sigma_{L_b}(N^{-1}A'P)' \qquad (۲-۲۵)$$

اگرمقدار Σ_{L_b} را از رابطه (۲-۲۲) در معادله فوق قرار دهیم بدست خواهد آمد

$$\Sigma_x=(N^{-1}A'P)\sigma_o^2P^{-1}(PAN^{-1})=\sigma_o^2N^{-1}A'PP^{-1}AN^{-1} \qquad (۲-۲۶)$$

توجه داریم که اولا چون σ_o^2 یک عدداست میتوان آنرا بسمت‌چپ عملیات منتقل کرد، درثانی چون P و N ماتریس های قرینه‌اند. تنند ترانسپوز آنها مساوی‌خودشان می‌باشد. ونیز میدانیم که حاصلضرب یک‌ماتریس مربع درمعکوس آن مساوی ماتریس واحد است ، بنابراین (۲-۳۶) را میتوان بصورت زیر نوشت

$$\Sigma_x=\sigma_o^2N^{-1}\underbrace{A'PA}_{N}N^{-1}=\sigma_o^2N^{-1}NN^{-1}$$

ویا

$$\boxed{\Sigma_x=\sigma_o^2N^{-1}} \qquad (۲-۲۷)$$

بادرنظر گرفتن رابطه (۲-۲۱)وریانس - کوورریانس اندازه‌گیر های سرشکن‌شده یا Σ_{La} را میتوان بصورت زیر محاسبه نمود.

$$\Sigma_{La}=G\Sigma_xG'$$

که G ماتریسی است بصورت زیر

$$G=\frac{\partial L_a}{\partial X}=A$$

بنابراین میتوان نوشت :

$$\boxed{\Sigma_{La}=\sigma_o^2(AN^{-1}A')} \qquad (۲-۲۸)$$

Σ_x , Σ_{La} نشان دهنده دقت کمیت های سرشکن شده و استحکام مدل ریاضی میباشند.

توجه‌خواننده باین نکته مهم‌جلب می‌شود که هرچند مقدار X و درنتیجه V بستگی به σ_o^2 ندارد، بعبارت دیگر هرمقدار اختیاری برای σ_o^2 انتخاب شود نتیجه واحـدی برای کمیت‌های X و V و درنتیجه برای X_a و L_a بدست می‌آید ، ولی باید درنظر داشت که این دلیل براختیاری بودن کمیت σ_o^2 نمی‌باشد، بعلت آنکه ماتریس های Σ_x و Σ_{La} بستگی مستقیم به σ_o^2 دارند. بنابراین هرچند σ_o^2 قبل از سرشکنی تخمین زده می‌شود ولی مقدار آن اختیاری نبوده بلکه باید به واقعیت نـزدیک باشد. درحالتی که درجـه آزادی $(n-u)$ نسبتاً بزرگ باشدمیتوان $\hat{\sigma}_o^2$ (وریانس واحد وزن « بعداز محاسبه») را در محاسبه Σ_x و Σ_{La} بکار

برد. میتوان با آزمایش‌های آماری صحت $\sigma_\circ^2$ و $\hat{\sigma}_\circ^2$ راسنجید این گونه آزمایش را میتوان در کتابهای آمار ریاضی پیدا کرد.

خلاصه عملیات بصورت سلسله مراتب

۱ - اندازه‌گیری‌های L_b داده شده‌اند.

۲ - روابط $L_a=F(X_a)$ را بین کمیت‌های اندازه‌گیری شده و پارامترها بنویسید.

۳ - مقادیر تقریبی پارامترها $(X_\circ)$ را تخمین بزنید (اگرهیچگونه اطلاعی در دست نیست قرار دهید $X_\circ=0$)

٤ - ماتریس وزن (P) را تعیین کنید

٥ - محاسبه کنید $A=\left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a=X_\circ}$

٦ - « « $L_\circ=F(X_\circ)$

٧ - « « $L=L_\circ-L_b$

٨ - « « $X=-(A'PA)^{-1}A'PL$

٩ - « « $V=AX+L$ و $\hat{\sigma}_\circ^2=\frac{V'PV}{n-u}$

۱۰ - پارامترهای سرشکن شده را محاسبه کنید $X_a=X_\circ+X$

۱۱ - اندازه‌گیری‌های سرشکن‌شده رامحاسبه کنید : $L_a=L_b+V$

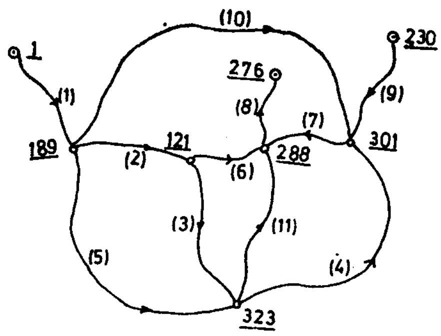
۱۲ - وریانس - کوورریانس کمیت‌های سرشکن‌شده بدست خواهد آمد :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_x&=\sigma_\circ^2N^{-1}=\sigma_\circ^2(A'PA)^{-1}\\ \Sigma_{L_a}&=\sigma_\circ^2(AN^{-1}A')\end{aligned}\right\}$$

مثال عددی

دریک شبکه ترازیابی مطابق شکل ارتفاع های سه نقطه ۱ و ۲۷۶ و ۲۳۰ معلوم و بترتیب زیر داده شده‌اند.

نقطه	ارتفاع
1	2.791 m
276	19.316 m
230	33.831 m



اندازه‌گیری‌ها که عبارتند از اختلاف ارتفاع بین نقاط بصورت ۱۱ اندازه‌گیری بترتیب زیر انجام شده است در ضمن فاصله افقی درامتداد خط ترازیابی داده شده است.

شماره اندازه‌گیری‌ها	تا نقطه ← از نقطه	اختلاف ارتفاع	فواصل S
1	1→189	10.038 m	1.14 Km
2	189→121	8.297 «	2.84 «
3	121→323	1.949 «	3.21 «
4	323→301	−5.217 «	6.03 «
5	189→323	10.244 «	6.75 «
6	121→288	1.562 «	0.84 «
7	301→288	4.837 «	2.94 «
8	288→276	−3.370 «	2.01 «
9	230→301	−15.979 «	5.28 «
10	189→301	5.024 «	6.77 «
11	323→288	−0.385 «	3.32 «

اندازه‌گیری‌ها مستقل ازهم فرض شده‌اند. وزن اندازه‌گیری‌های ۱ تا ۹ برابر معکوس فاصله بین دو نقطه $\frac{1}{S_i}$ و وزن اندازه‌گیری‌های ۱۰ و ۱۱ برابر $\frac{1}{2S_i}$ فرض شده است. مطلوبست ارتفاع سرشکن شده نقاط و واریانس-کوواریانس ارتفاعات سرشکن شده.

پارامترها ارتفاع نقاط فرض می‌شوند. پس میتوان نوشت :

$$X=\begin{bmatrix} x_1=h_{189} \\ x_2=h_{121} \\ x_3=h_{323} \\ x_4=h_{2o1} \\ x_5=h_{288} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P=\begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} & & & & & & & \\ & \frac{1}{S_2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{S_3} & & & & o & \\ & & o & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & \frac{1}{2S_{1o}} & \\ & & & & & & & \frac{1}{2S_{11}} \end{bmatrix}$$

مدل ریاضی عبارت خواهد بود از :

مدل ریاضی

$$\begin{aligned}
l_{a1}&=x_{a1}-2.791\\
l_{a2}&=x_{a2}-x_{a1}\\
l_{a3}&=x_{a3}-x_{a2}\\
l_{a4}&=x_{a4}-x_{a3}\\
l_{a5}&=x_{a3}-x_{a1}\\
l_{a6}&=x_{a5}-x_{a2}\\
l_{a8}&=19.316-x_{a5}\\
l_{a9}&=x_{a4}-33.831\\
l_{a10}&=x_{a4}-x_{a1}\\
l_{a11}&=x_{a5}-x_{a3}
\end{aligned}$$

که l عبارت است از اندازه گیری ها (اختلاف ارتفاعات) مقادیر تقریبی پارامترها مساوی صفر فرض شده است پس

$$x_{oi}=o \qquad i=1-5$$

چون σ_o^2 قبل از محاسبه تعیین نشده است برای محاسبه Σ_x مقدار $\hat{\sigma}_o^2$ محاسبه و استفاده می گردد :

$$=\hat{\sigma}_o^2=\frac{V'PV}{n-u}=\frac{V'PV}{6}$$

درصفحه بعد ماتریس های L_b و $A=\frac{\partial F}{\partial X}$ و P , X_o , $L=L_o-L_b$ محاسبه ونوشته شده اند. بالاخره درصفحه آخر نتیجه محاسبات سرشکنی نوشته شده است.

$L_b =$

LB(1)= 10.0380
LB(2)= 8.2970
LB(3)= 1.9490
LB(4)= -5.2170
LB(5)= 10.2440
LB(6)= 1.5620
LB(7)= 4.8370
LB(8)= -3 3700
LB(9)=-15 9790
LB(10)= 5 0240
LB(11)= -03850

S(1)= 1.1400
S(2)= 2.8400
S(3)= 3.2100
S(4)= 6.0300
S(5)= 6.7500
S(6)= 0.8400
S(7)= 2.9400
S(8)= 2.0100
S(9)= 5.2800
S(10)= 6.7700
S(11)= 3.3200

$A =$

1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-1.0	1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	-1.0	1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-1.0	1.0	0.0
-1.0	0.0	1.0	0.0	0.0
0.0	-1.0	0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0	-1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	-1.0
0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
-1.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	-1.0	0.0	1.0

0.877D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.352D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.312D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.166D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.148D+00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.119D+01	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.340D+00	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.498D+00	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.189D+00	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.739D+01	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.151D+00

$= P$

$X_o =$

XO(1)=.0
XO(2)=.0
XO(3)=.0
XO(4)=.0
XO(5)=.0

$L = L_o - L_b =$

L(1)=-12.82900
L(2)= -8.29700
L(3)= -1.94900
L(4)= 5.21700
L(5)=-10.24400
L(6)= -1.56200
L(7)= -4.83700
L(8)= 22.68600
L(9)=-17.85200
L(10)= -5.02400
L(11)= 0.38500

نتیجه محاسبات اجسمنت:

$N = A'PA =$

0.1451309D+01	-0.3521127D+00	0.1481481D+00	-0.7385524D-01	0.0
-0.3521127D+00	0.1854115D+01	-0.3115265D+00	0.0	-0.1190476D+01
-0.1481481D+00	-0.3115265D+00	0.7761145D+00	0.1658375D+00	-0.1506024D+00
-0.7385524D-01	0.0	-0.1658375D+00	0.7692227D+00	-0.3401361D+00
0.0	-0.1190476D+01	-0.1506024D+00	-0.3401361D+00	0.2178727D+01

DT = 0.1129848D+01

$N^{-1} =$

0.8708560D+00	0.4694811D+00	0.4946383D+00	0.3424435D+00	0.3441813D+00
0.4694811D+00	0.1387893D+01	0.9690640D+00	0.6648446D+00	0.9291365D+00
0.4946383D+00	0.9690640D+00	0.2113069D+01	0.8612267D+00	0.8100212D+00
0.3424435D+00	0.6648446D+00	0.8612267D+00	0.1831989D+01	0.7088130D+00
0.3441813D+00	0.9291365D+00	0.8100212D+00	0.7088130D+00	0.1133322D+01

$X =$

X(1)=12.82853
X(2)=21.12472
X(3)=23.07209
X(4)=17.85179
X(5)=22.68690

$X_a = X + X_o =$

XA(1)=12.82853
XA(2)=21.12472
XA(3)=23.07209
XA(4)=17.85179
XA(5)=22.68690

$V =$

V(1)=-0.4661880D-03
V(2)=-0.8167588D-03
V(3)=-0.1631021D-02
V(4)=-0.3297029D-02
V(5)=-0.4477794D-03
V(6)=-0.1852326D-03
V(7)=-0.1886717D-02
V(8)=-0.9022857D-03
V(9)=-0.2109968D-03
V(10)=-0.7448088D-03
V(11)=-0.1837469D-03

$L_a =$

LA(1)= 10.03753
LA(2)= 8.29618
LA(3)= 1.94737
LA(4)= -5.22030
LA(5)= 10.24355
LA(6)= 1.56219
LA(7)= 4.83511
LA(8)= -3.37090
LA(9)=-15.97921
LA(10)= 5.02326
LA(11)= -0.38518

$\hat{\sigma}_o^2$ =VPV/6 = 0.0000008

+++++ VARIANCE-COVARIANCE OF X ++++

$\Sigma_x =$

0.6963716D-06	0.3754160D-06	0.3955327D-06	0.2738316D-06	0.2752212D-06
0.3754160D-06	0.1109815D-05	0.7749026D-06	0.5316366D-06	0.7429750D-06
0.3955327D-06	0.7749026D-06	0.1689695D-05	0.6886715D-06	0.6477256D-06
0.2738316D-06	0.5316366D-06	0.6886715D-06	0.1464932D-05	0.5667955D-06
0.2752212D-06	0.7429750D-06	0.6477256D-06	0.5667955D-06	0.9062498D-06

References

1 —Bjerhammar , A. (1973) , Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses.

2 — Graybill, F. A. (1969) , Introduction to Matrices with Application in Statistics.

3 — Hamilton, W. C. (1964) , Statistics in Physical Sciences.

4 — Hirvonen , R . A . (1971) , Adjustment by Least Squqres in Geodesy and Photogrametry.

5 — Uotila , U. A. (1967) , Introduction to Adjustment Computations.