پایداری تعادل درمعادلات دیفرانسیل غیرخطی

نوشتهٔ :

دکتر نصرالله تابنده

استادیار دانشکدهٔ فنی

چکیده :

در این مقاله درمورد پایداری تعادل درسیستم معادلات دیفرانسیل غیرخطی بحث شده است . ضمن چند قضیه و مثال معیارهائی برای تعیین اینکه آیا این‌معادلات درنقطهٔ (حل) بخصوصی پایدارند یا نه داده شده‌اند . دراین مطالعه دستگاههای اتونوموس و غیر اتونوموس هردو مورد بررسی قرار گرفته‌اند .

مقدمه ـ پایداری حل ریاضی یک مسئله فیزیکی از دونقطهٔ نظر مهم حائز اهمیت است یکی‌اینکه بدانیم آیا اگر درشرایط اولیهٔ این سیستم فیزیکی تغییر مختصری عمدی و یا سهوی داده شود حل معادلهٔ دیفرانسیل و بنابراین رفتار مسئلهٔ فیزیکی بچه‌طریق خواهد بود . دیگر اینکه درمحاسبات عددی که امروزه راه حل تمام مسائلی است که حل تحلیلی‌آنها معلوم نیست (و حتی عده‌ای از مسائل که حل تحلیلی‌آنها دانسته شده‌اند) علاوه براین مطلب موضوع خطاهای محاسبه که برویهم انباشته میشوند نیز پیش می‌آید . بدین‌معنی که اگر معادلهٔ دیفرانسیل در نقطه (یعنی حل) بخصوصی پایدار باشد خطای اولیهٔ محاسبات خطا و تغییر زیادی درنتیجهٔ نهائی پیش نخواهد آورد ولی عدم پایداری این معادله در این حل خاص البته حل عددی را ازحل واقعی بعلت خطای اولیه ویا خطاهای انباشته شدهٔ بعدی دورخواهد کرد [٦] .

درقسمت اول این مقاله برای تکمیل‌مطالب گذشته درمورد سیستم اتونوموس[۱] [٦] بعدازبیان قضایای لازم مثالهائی مربوط به‌آن داده خواهد شد و پس ازآن سیستم غیراتونوموس[۲] مورد بررسی قرار خواهد گرفت .

---

۱ — Autonomous　　　۲ — Nonautonomous

ضمناً دراینجا برای جلوگیری از اشتباه احتمالی $[A]$ به معنی ماتریس $n\times n$ و $\{A\}$ به معنی ماتریس $n\times 1$ (یعنی یک بردار عمودی) خواهند بود .

قضیه ۱ ـ معادلهٔ دیفرانسیل اتونوموس :

$$\frac{d}{dt}\{Y\}=\{g(\{Y\})\} \tag{۱}$$

را درنظر میگیریم . (منظور از اتونوموس این است که g تابع صریح t نیست .) فرض کنیم :

$$\{g(\{Y\})\}=[A](\{Y\}-\{C\})+\{f(\{Y\})\}$$

که درآن :

$$\lim_{\{Y\}\to\{o\}}\frac{\|\{f(\{Y\})\}\|}{\|\{Y\}-\{C\}\|}=o \tag{۲}$$

دراین‌صورت اگر تقریب خطی معادلهٔ (۱) یعنی :

$$\frac{d}{dt}\{Y\}=[A](\{Y-C\}) \tag{۳}$$

در $\{Y\}=\{C\}$ پایدار مجانبی باشد [۶] معادلهٔ (۱) نیز در $\{C\}$ پایدار مجانبی خواهد بود [۵] .

قضیه ۲ ـ شرط لازم و کافی برای اینکه تمام حل‌های معادلهٔ دیفرانسیل :

$$\frac{d}{dt}\{Y\}=[A]\{Y\} \tag{۴}$$

بازاء $t\to\infty$ بسمت صفر میل کنند این است که قسمت حقیقی ریشه های مشخصه[۱] ماتریس ثابت $[A]$ منفی باشند . منظور از تمام حل‌ها دراین‌جا تمام اجزاء ماتریس یک ستونی (بردار) $\{Y\}$ است [۱] .

مثال ۱ ـ معادلـهٔ دیفرانسیل داوفینگ[۲] ـ درحرکت جرم متصل به فنر با ترمز اصطکاکی[۳] و نیروی رانندهٔ F معادلهٔ دیفرانسیل حرکت بصورت :

$$m\ddot{x}=-F_s-F_d+F$$

است . دراینجا F_s نیروی فنر و F_d نیروی ترمز و F نیروی رانندهٔ[۴] است. درصورتیکه نیروی فنرغیرخطی بصورت $K(x+\alpha x^3)$ ونیروی ترمز $F_d=-C\dot{x}$ و نیروی رانده $F=F_o\cos\Omega t$ فرض شوند معادلهٔ

---

۱ — Characteristic roots

۲ — Duffing

۳ — Dashpot

۴ — Driving Force

دیفرانسیل دافینگ بصورت زیر بدست میآید .

$$m\ddot{x}+C\dot{x}+K(x+\alpha x^3)=F_\circ \cos\Omega t$$

درصورتیکه $\alpha>0$ باشد فنر سخت شونده[۱] و درصورتیکه $\alpha<0$ باشد فنر نرم شونده[۲] نامیده میشود . اکنون درحالتیکه نیروی راننده برابر صفر باشد $(F_\circ=0)$ تعادل دستگاه را از نظر پایداری موردمطالعه قرار میدهیم .

پس از خلاصه کردن و تغییر نام ضرائب معادلهٔ دیفرانسیل بالا بصورت زیر خواهد بود :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+\omega^2x+\beta x^3=0$$

که درآن :

$$k=\frac{C}{m}>0 \qquad \omega^2=\frac{K}{m} \qquad \beta=\frac{K\alpha}{m}$$

با فرض :

$$\{Y\}=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad , \quad [A]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -k \end{pmatrix} \quad , \quad \{f\}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta x^3 \end{pmatrix}$$

میتوان معادلهٔ بالا را بصورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dt}\{Y\}=[A]\{Y\}+\{f(Y)\}$$

بعلاوه چون :

$$\lim_{\{Y\}\to\{0\}}\frac{\|\{f(Y)\}\|}{\|\{Y\}\|}=\lim_{\{Y\}\to\{0\}}\frac{|\beta|\;|x^3|}{|x|+|\dot{x}|}=0$$

بنا به قضیه ۱ میتوان درنزدیکی $\{Y\}=\{0\}$ حل معادلهٔ فوق را با حل معادلهٔ :

$$\frac{d}{dt}\{Y\}=[A]\{Y\}$$

تقریب گرفت . ازطرفی چون ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس A عبارتند از :

$$\lambda=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}$$

بنا به قضیهٔ ۲ درمورد حل معادلهٔ خطی میتوان گفت :

---

۱ — Hardening Spring

۲ — Softening Spring

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}=0 \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} x=0$$

چون این حل تقریب نزدیکی است از حل معادلهٔ اصلی (درنزدیکی مبدأ) بنابراین تعادل دستگاه پایدار مجانبی است .

مثال ۲ ـ حرکت پاندول ساده ـ معادلهٔ حرکت پاندول با اصطکاك خطی بصورت :

$$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+cl\,\frac{d\theta}{dt}+mgl\sin\theta=0$$

میباشد ـ دراین مسئله اگر ماتریسهای $\{Y\}$ و $[A]$ بصورت :

$$\{Y\}=\begin{pmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} \quad , \quad [A]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & -\frac{C}{ml}\end{pmatrix}$$

فرض شوند ماتریس f بصورت زیر خواهد بود :

$$\{f\}=\frac{-g}{l}\begin{pmatrix}0\\ \theta-\sin\theta\end{pmatrix}$$

از طرفی چون :

$$\lim_{\{Y\}\to\{0\}}\frac{\|\{f\}\|}{\|\{Y\}\|}=\lim_{\substack{\theta\to 0\\ \dot{\theta}\to 0}}\frac{|\theta-\sin\theta|}{|\theta|+|\dot{\theta}|}$$

بنابراین درصورتیکه معادلهٔ $\frac{d}{dt}\{Y\}=[A]\{Y\}$ درنقطهٔ $\{Y\}=\{0\}$ (یعنی $\theta=0$ و $\dot{\theta}=0$) پایدار باشد معادلهٔ دیفرانسیل پاندول نیز دراین نقطه پایدار خواهد بود . (ملاحظه میشود که معادلهٔ $\frac{d}{dt}\{Y\}=[A]\{Y\}$ همان تقریب خطی معادلهٔ دیفرانسیل پاندول‌است که با فرض θ کوچک وبنابراین $\sin\theta\approx\theta$ بدست می‌آید .) برای مطالعهٔ حل‌این مسئله بنابراین بایستی ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $[A]$ را موردمطالعه قرار داد . این ریشه‌ها عبارتند از :

$$\lambda_1\ ,\ \lambda_2=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4glm^2}}{2ml}$$

و چون قسمت حقیقی این ریشه‌ها بهرصورت منفی است بنابراین تعادل پایدار مجانبی است . برای مطالعهٔ بیشتر این مسئله ملاحظه میشود که نقاط $\dot{\theta}=0$ و $\theta=n\pi$ هم نقـاط تعادل خواهند بـود . درمطالعهٔ

پایداری این نقاط ملاحظه خواهد شد که درنقاط $\theta=2n\pi$ تعادل پایدار و در نقاط $\theta=(2n+1)\pi$ تعادل ناپایدار خواهد بود . برای مثال حالت $\dot{\theta}=0$ و $\theta=\pi$ را درنظر میگیریم . برای این مطالعه تغییر تابع بصورت $\theta=\pi+u$ میدهیم . بنابراین منظور مطالعهٔ پایداری معادلهٔ دیفرانسیل زیر در نقطهٔ $u=0$ و $\dot{u}=0$ است :

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{c}{ml}\frac{du}{dt}-mgl\sin(u+\pi)$$

$$=\frac{g}{l}u-\frac{c}{ml}\frac{du}{dt}+\frac{g}{l}(\sin u-u)$$

دراینصورت ماتریسهای $[A]$ ، $\{Y\}$ و $\{f\}$ عبارتند از :

$$\{Y\}=\begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \qquad [A]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{c}{ml} \end{pmatrix} \qquad \{f\}=\frac{g}{l}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin u-u \end{pmatrix}$$

دستگاه مشابه دستگاه قبلی است باستثناء اینکه درماتریس $[A]$ بجای $-\frac{g}{l}$ که قبلاً داشتیم دراینجا $+\frac{g}{l}$ وجود دارد . ریشه های مشخصهٔ ماتریس $[A]$ عبارتند از :

$$\lambda_1\ ,\ \lambda_2=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4m^2gl}}{2ml}$$

بنابراین λ_1 و λ_2 هردوحقیقی و یکی مثبت و دیگری منفی بوده و باین ترتیب (مطابق قضیهٔ ۲) تعادل پایدار نخواهد بود .

طریقهٔ مستقیم برای مطالعهٔ پایداری ـ در بحث گذشته پایداری همیشه همراه با پایداری مجانبی بود . علت آن مقایسهٔ حل معادله با حل معادلهٔ خطی است .

درطریقهٔ دیگر لیاپونف مسئله را مستقیماً مورد بررسی قرار میدهد که شروط تصنعی مقایسه درآن وجود ندارد . عموماً اشکال عمده دراین طریقه این است که درجستجوی چیزی مشابه پتانسیل V هستیم که درنقطهٔ خاصی که مورد مطالعهٔ ما است می‌نیمم باشد . این کم و بیش به این معنی است که منظور پیدا کردن تابعی است جبری از ماتریس یک ستونی (بردار) $\{X\}$ که متصل بوده و بازاء $\{X\}\neq\{0\}$ مثبت و در $\{X\}=\{0\}$ صفر باشد . دراینصورت درامتداد یک مسیر $\{X(t)\}$ نامساوی $V(\{X(t)\})\leqslant\delta$ نامساوی دیگر $\|\{X(t)\}\|<\epsilon$ را که درآن $\epsilon\to 0$ وقتیکه $\delta\to 0$ تضمین خواهد نمود . بنابراین مقدار $V(\{X\})$ درواقع نمودار کوچکی $\{X\}$ میباشد .

با تعریف دقیق‌تر تابع جبری $V(\{X\})$ را تابع لیاپونف[1] برای سیستم :

$$\frac{d}{dt}\{X\}=\{f(X)\} \qquad (۵)$$

مینامیم اگر درنزدیکی مبدء $V(\{X\})$ بازاء $\{X\}\neq\{o\}$ مثبت و $V(\{o\})=o$ بوده ودارای‌مشتقهای متصل نسبت به تمام متغیرها بوده و در رابطهٔ زیر نیز صدق کند :

$$\nabla V(\{X\})\{f(X)\}\leqslant o \qquad (۶)$$

دراینجا ∇V گرادیان $V(\{X\})$ است که بصورت ماتریس یک ردیفه :

$$\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) \text{بردار افقی}\right]$$

نوشته شده است. این نامساوی تضمین این را می‌کند که تابع $V(\{X\})$ درطول هرمسیر $\{X(t)\}$ که بقدر کافی نزدیک مبدء باشد غیرصعودی است . درحقیقت مشتق کامل V برحسب t عبارتست از :

$$\frac{d}{dt}V(\{X\})=\nabla V(\{X(t)\})\frac{d}{dt}\{X\}=\nabla V(\{X\})\{f(X)\} \qquad (۷)$$

و برطبق نامساوی فوق این مشتق در نزدیکی مبدء غیر مثبت است .

قضیه ۳ ـ اگر برای سیستم (۵) تابع لیاپونف وجود داشته باشد این سیستم در مبدء پایدار است [۵] .

مثال ۳ ـ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+\omega^2x=o$$

را درنظر میگیریم . ماتریس های مربوط به معادلهٔ ماتریسی (۵) عبارتند از :

$$X\equiv\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\\dot{x}\end{pmatrix} \qquad f(\{X\})\equiv\begin{pmatrix}x_2\\-\omega_1^2x_1-kx_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\-\omega_1^2x-k\dot{x}\end{pmatrix}$$

اگرفرض کنیم $V(\{X\})=\omega^2x_1^2+x_2^2$ دراینصورت $V(\{o\})=o$ و $V(\{X\})\geqslant o$ وقتی $\{X\}\neq\{o\}$. بعلاوه داریم :

$$\nabla V(\{X\})\{f(X)\}=(2\omega^2x_1, 2x_2)\begin{pmatrix}x_2\\-\omega_1^2x_1-kx_2\end{pmatrix}=-2kx_2^2$$

---

۱ — Liapunov function

واز آنجا اگر $k>0$ باشد تابع $V(\{X\})$ تابع لیاپونف برای‌معادلهٔ دیفرانسیل فوق بوده وسیستم درمبدء پایدار است .

بطورکلی اگر تابع $f(x, y)$ در نزدیک مبدء غیرمنفی باشد (یعنی $f(x, y) \geqslant 0$) معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x, \dot{x})\dot{x}+\omega^2 x=0$$

درمبدء پایدار است . برای این معادله $V=\omega^2x^2+\dot{x}^2$ یک تابع لیاپونف‌است .

مثال ٤ ـ تئوری‌لاگرانژ[١] درمورد پایداری تعادل ـ سیستمی با n درجه آزادی درنظر گرفته فرض می‌کنیم $H=K+V$ هامیلتونین[٢] آن باشد . مختصات عمومی دستگاه $q_1, q_2, \ldots, q_n$ و مومنتم[٣]‌های عمومی آن $p_1, p_2, \ldots, p_n$ فرض میشوند . دستگاه $2n$ معادله و $2n$ مجهول زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial p_i}\right)-\dfrac{\partial K}{\partial q_i}=-\dfrac{\partial V}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{dt}=p_i \end{cases} \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

معادلات بالا در واقع میرسانند که مشتق کامل H نسبت به t برابر صفر است یعنی :

$$\frac{d}{dt}H(\{X(t), \dot{X}(t)\})=\frac{d}{dt}H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)=0$$

اکنون چون انرژی حرکتی (سینتیک) K عموماً مثبت مسلم[٤] برحسب p_i بوده (یعنی فقط درصورتی صفر است که $p_i=0$ $i=1, 2, \ldots, n$ و درغیراینصورت مثبت است) و ضرائب آن نسبت به q_i تحلیلی هستند ، اگر انرژی پتانسیل که معمولاً فقط به q_i بستگی داشته و نسبت به‌آن تحلیلی‌است درمبدء صفر بوده و دراین نقطه می‌نیمم باشد ، هامیلتونین H تابع لیاپونف برای سیستم فوق بوده و مبدء :

$$q_i=0 \qquad p_i=0 \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

یک نقطهٔ تعادل پایدار است .

اکنون قضیه زیر درمورد رابطهٔ تابع لیاپونف و تعادل پایدار مجانبی بیان میشود .

---

١ — Lagrange

٢ — Hamiltonian

٣ — Momentum

٤ — Positive Definite

قضیه ٤ ـ اگر تابع لیاپونف برای معادلهٔ (٥) وجود داشته و درنزدیکی مبدء نامساوی :

$$\nabla V(\{X\})\{f(X)\} < o$$

برای $\{X\} \neq \{o\}$ برقرار باشد سیستم (٥) پایدا مجانبی درمبدء است .

سیستم غیراتونوموس ـ اکنون که چندمثالی درمورد ستیستم اتونوموس (طرف‌دوم معادله شامل t نیست) حل شد مختصراً می‌پردازیم به سیستم غیراتونوموس بصورت :

$$\frac{d}{dt}\{X\}=\{f(X , t)\}$$

فرض کنیم که $[A(t)]$ ماتریسی تابع زمان بوده و

$$\lim_{t\to\infty} [A(t)]=[A^*]$$

دراینجا البته $[A^*]$ ماتریسی ثابت است . بعلاوه فرض می کنیم :

$$[B(t)]=[A(t)]-[A^*]$$

دراینصورت قضیه زیر را میتوان ثابت کرد [٥]

قضیه ٥ ـ اگر تمام حل‌های معادلهٔ دیفرانسیل :

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[A^*]\{X\} \tag{٨}$$

بازاء $t \to \infty$ محدود باشند (یعنی بسمت بی‌نهایت میل نکنند) همین ادعا را میتوان درمورد حل های معادلهٔ :

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[A(t)]\{X\}+\{f(t)\} \tag{٩}$$

کرد بشرطی که دو شرط :

$$\int_o^\infty \| [B(t)] \| dt < \infty \tag{١٠}$$

و :

$$\int_o^\infty \| \{f(t)\} \| dt < \infty \tag{١١}$$

برقرار باشند . بعلاوه اگر تمام حل های معادلـهٔ (٨) بازاء $t \to \infty$ بسمت صفر میل نمایند میتوان شرط

(۱۱) را باینطریق تخفیف داد که کافی است تابع $\{f(t)\}$ بازاء $t \to \infty$ محدود باشد.

تعریف ـ ماتریس $A(t)$ را ماتریس پریودیک (متناوب) با پریود (تناوب) T مینامیم اگر

$$[A(t+T)]=[A(t)]$$

قضیه ٦ ـ درصورتیکه $[A(t)]$ ماتریسی متناوب با پریود T باشد حل اساسی معادلهٔ:

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[A(t)]\{X\} \tag{۱۲}$$

بصورت:

$$[Y(t)]=[Q(t)]\,[e^{[B]t}] \tag{۱۳}$$

که درآن $[Q(t)]$ ماتریسی متناوب با همان تناوب T و $[B]$ ماتریسی ثابت‌است میباشد. این معادله درصورتی پایدار است که قسمت حقیقی ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $[B]$ منفی باشند [۲].

قضیه ۷ ـ اگر سیستم پریودیک:

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[P(t)]\{X\} \tag{۱٤}$$

درمبدء پایدار مجانبی باشد سیستم:

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[P(t)]\{X\}+\{f(X)\} \tag{۱۵}$$

نیز، درصورتیکه شرط غیرخطی زیر برای $\{f\}$ صادق باشد، درمبدء پایدار مجانبی خواهد بود.

$$\lim_{\{X\}\to\{o\}} \frac{\|\{f(X)\}\|}{\|\{X\}\|}=o \tag{۱٦}$$

مثال ۵ ـ معادلهٔ دیفرانسیل:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g(x)\frac{dx}{dt}+(\omega^2+\epsilon\cos t)x=o$$

را درنظرگرفته فرض کنیم $x(o)=k>o$. معادلهٔ ماتریسی معادل آن عبارتست از:

$$\frac{d}{dt}\{X\}=[P(t)]\{X\}+\{f(X)\}$$

که درآن:

$$\{X\}=\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad , \quad [P(t)]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2-\epsilon \cos t & -k \end{pmatrix} \quad , \quad \{f(X)\}=\begin{pmatrix} 0 \\ [k-g(x)]\dot{x} \end{pmatrix}$$

ملاحظه میشود :

$$\frac{\|\{f(X)\}\|}{\|\{X\}\|}=\frac{|k-g(x)\|\dot{x}|}{|x|+|\dot{x}|}\leqslant |k-g(x)|$$

مشاهده میشود که اگر $g(x)$ درنقطهٔ $x=0$ متصل باشد شرط غیرخطی (۱۶) برقرار است . بنابراین‌طبق قضیه بالا چون برای $|\epsilon|$ کوچک معادلهٔ خطی :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+(\omega^2+\epsilon \cos t)x=0$$

درنقطهٔ $(x=0 , \dot{x}=0)$ بطور مجانبی پایدار است . معادلهٔ غیرخطی نیز پایدار مجانبی خواهد بود .

مثال ۶ ـ این مثال برای این آورده شده که نشان میدهد شرط اینکه حل معادلهٔ خطی بازاء $t\to\infty$ بسمت صفرمیل کند کافی برای پایداری‌حل‌معادلهٔ غیرخطی نمیباشد. دستگاه معادلات‌دیفرانسیل زیر را درنظر بگیریم :

$$\frac{dy_1}{dt}=-ay_1 \qquad\qquad y_1(0)=c_1$$

$$\frac{dy_2}{dt}=[(\sin\log t+\cos\log t)-2a]y_2 \qquad\qquad y_2(0)=c_2$$

حل این دستگاه عبارتست از :

$$y_1=c_1e^{-at} \qquad\qquad y_2=c_2e^{(t\sin\log t-2at)}$$

دراینجا بازاء $t\to\infty$ و $a>\frac{1}{2}$ خواهیم داشت :

$$\{Y\}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ازطرفی حل دستگاه :

$$\frac{dZ_1}{dt}=-aZ_1 \qquad\qquad Z_1(0)=c_1$$

$$\frac{dZ_2}{dt}=(\sin\log t+\cos\log t-2a)Z_2+Z_1^2 \qquad\qquad Z_2(0)=c_2$$

عبارتست از :

$$Z_1 = c_1\, e^{-at}$$

$$Z_2 = e^{(t \sin \log t - 2at)} \left(e_2 + c_1^2 \int_0^t e^{-s \sin \log s}\, ds\right)$$

که اگر $1 + e^{-\frac{\pi}{2}} > 2a > 1$ انتخاب شود فقط درصورتی بسمت صفر بازاء $t \to \infty$ میل مینماید که $c_1 = o$ باشد . بنابراین فقط کوچک گرفتن $\| \{ Z(o) \} \|$ کافی برای بسمت صفر میل کردن حل معادلهٔ غیر خطی نیست .

منابع

1—Bellman, R.

Stability Theory of Differential Equations. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1953.

2—Coddington, E.A. Levinson, N.

Theory of Ordinary Differential Equations. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1955.

3—Davis, H. T.

Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publication Inc. New York 1962.

4—Minorsky, N.

Introduction to Non-Linear Mechanics. J. W. Edwards, Ann Arbor Michigan, 1947.

5—Struble, R. A.

Nonlinear Differential Equations. Mc Graw-Hill Book Co. Inc. New York 1962.

٦ — تابنده ـ نصرالله

تقریب خطی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی و مسئلهٔ پایداری

نشریهٔ دانشکدهٔ فنی شمارهٔ ۲۹ دورهٔ دوم ازصفحهٔ ۲۰۹ تا صفحهٔ ۲۲۰