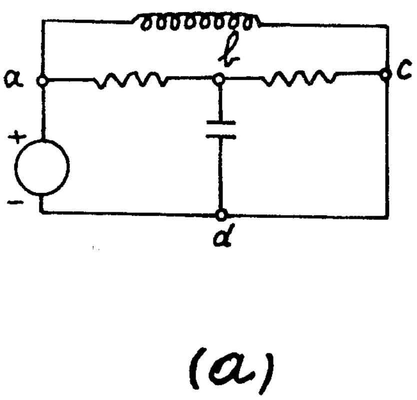
توپولوژی شبکه‌های برقی، گرافهای جهت‌دار و بدون جهت

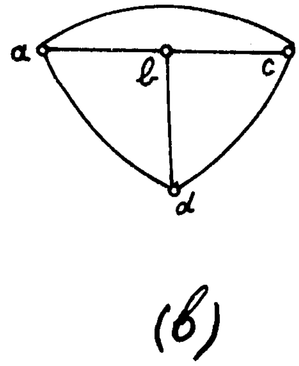
نوشتهٔ

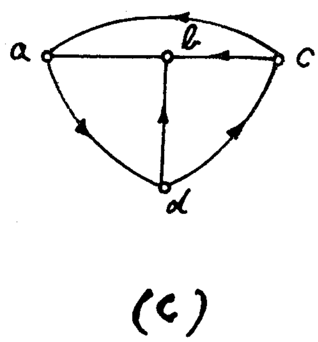
مهندس ذواشتیاق

استادیار دانشکده‌فنی

برای ترسیم گراف شبکه‌ای تمام‌عناصر آنر با خطوطی نشان میدهند . درشکلهای پائین گراف مدار الکتریکی (a) دوشکل (b) و (c) میباشد درگراف (c) خطوط‌جهت‌دار نمایش داده شده‌اند واین گراف‌را گراف‌جهت‌دار







مینامیم . خطوط گراف را شاخه و محل اتصالی دوشاخه ویا بیشتر را گره نامند .

انفورماسیون ممکن است‌آنالیتکی (بشکل مجموعه‌از معادلات) ویا گرافیکی (بشکل شما های الکتریکی) باشد که درآن گره‌هاوشاخه های‌مربوطه وهمچنین انتقال انفورماسیون مشخص گردد .

تئوری گرافها عبارت از بررسی مشخصات توپولوژی گرافها و روشهای محاسبه آن میباشد که برای مهندسی‌الکتریسته ، رادیو وتله‌کومونیکاسیون بکار رفته ونیز درتنظیم و تحلیل مسائل بغرنج حمل‌ونقل راه آهن میتوان از آن استفاده نمود .

چون‌انفورماسیون گراف ممکن است بدونوع عملی گردد . بنابراین تئوری گرافها در دوجهت تقریباً مستقل از هم بوجود آمده‌اند و دربعضی از موارد این دوقسمت مکمل یکدیگر و وابسته بهم میباشند .

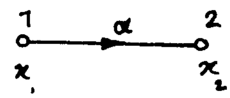
درجهته‌اول‌انفورماسیون گراف‌بشکل سیستم‌معادلات که‌درآن‌دترمینان‌وماتریس‌بکاربرده‌شده‌است‌میباشد

درجهت‌دوم انفورماسیون گراف بشکل هندسی یا روی اساس شمای الکتریکی (یا معادل آن) بنا گشته که درآن گره‌ها وشاخه‌ها نشان داده شده‌اند (بعضی ازموارد شاخه‌های جهت‌دار وبعضی از حالات بدون جهت) روش اول از ازمنه خیلی پیش یعنی زمان ماکسول وکیرشهوف موجود بوده ولی روش دوم ازسال ۱۹۵۳ ببعد شروع به‌پیشرفت نمود. در زیر روش دوم را بیان نموده وتاحدامکان باذکر مثالهای مختلف خواننده را بااین روش آشنا میسازیم.

الف ـ گرافهای جهت‌دار ـ گراف جهت‌دار ویا خطی گرافی است (گراف سیگنال ودیا گرام عبورسیگنال) متشکل ازگره‌ها و شاخه‌ها که علامت سهم درشاخه‌ها معرف جهت انتقال سیگنال (یااثر) از یک گره به گره دیگر است.

گره‌ها درگرافهای جهت‌دار معمولا جریان ویا فشار الکتریکی مدارها رانشان میدهند.

انتقال درشاخه عبارت از نسبت مقدار خروجی به‌مقدار ورودی میباشد مثلاً مقدار خروجی x_2 یک شاخه‌مساوی حاصلضرب مقدار ورودی (سیگنال ورودی) x_1 در انتقال a میباشد.

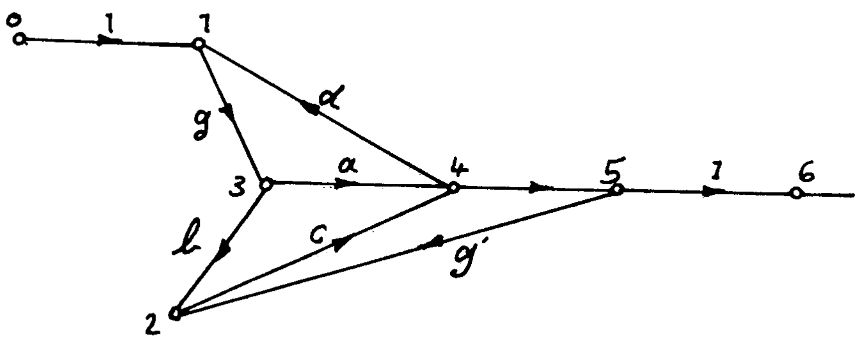


(ش ۱)

$$x_2 = ax_1$$

این انتقال ممکن است بابعاد مقاومت ویا هدایت ویا صفر نمایش داده شود.

به‌نقطه گرهی گراف غیر از مقادیرسیگنال ورودی وخروجی ممکن است چندین شاخه متصل گردند انتقال در(ش ۲) با حروف a و b و... وجهت مشخص شده است. x_1 عبارت ازسیگنال گره اول و x_2 گره دوم وغیره میباشد.



(ش ۲)

سیگنال گره k عبارت از مجموع سیگنالهای رسیده به گره k میباشد بایستی دقت نمود که سیگنال خروجی ازگره k منظور نمی‌شود بنابراین درگراف بالا سیگنالهای مربوطه خواهند بود:

سیگنال گره اول $\quad x_1 = 1 \times x_0 + d \times x_4$

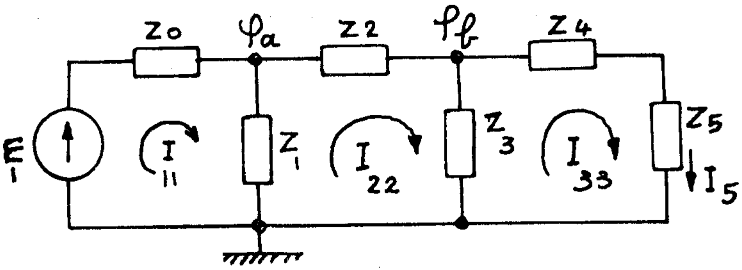
سیگنال گره دوم $\quad x_2 = b \times x_3 + g' x_0$

سیگنال گره سوم $x_3 = gx_1$

. . . .

سیگنال ورودی را درطرف چپ وسیگنال خروجی را درسمت راست نشان میدهند وشاخه سیگنال ورودی‌نباید شاخه‌های دیگری را داشته باشد و همچنین سیگنال خروجی روی یک شاخه بوده وانشعابی نخواهد داشت درصورتیکه شاخه‌های دیگری داشته باشیم میتوان با اضافه نمودن شاخه‌ای بانتقال (۱) سیگنال خروجی و ورودی را روی یک‌شاخه آورد .

برای تبدیل شمای الکتریکی بگراف‌جهت‌دار از روشهای مختلف از قبیل روش کیرشهوف - روش مداری روش گرهی و غیره استفاده میکنیم .اگر معادلات کیرشهوف را برای شمای‌الکتریکی(ش۳) بنویسیم خواهیم داشت :



(ش ۳)

$$\dot{I}_{11}(z_0+z_1) - \dot{I}_{22}z_1 = \dot{E}_1$$

$$-\dot{I}_{11}z_1 + \dot{I}_{22}(z_1+z_2+z_3) - \dot{I}_{33}z_3 = 0$$

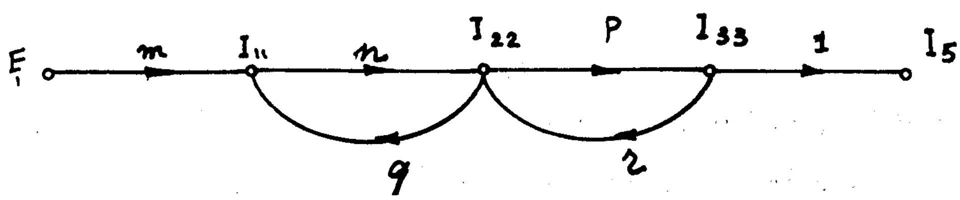
$$-\dot{I}_{22}z_3 + \dot{I}_{33}(z_3+z_4+z_5) = 0$$

اگر انتقالهای شاخه‌ها را به‌ترتیب زیرمنظور کنیم :

$$p = \frac{z_3}{z_3+z_4+z_5} \quad \text{و} \quad n = \frac{z_1}{z_1+z_1+z_3} \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{z_0+z_1}$$

$$r = \frac{z_3}{z_1+z_2+z_3} \quad \text{و} \quad q = \frac{z_1}{z_0+z_1}$$

گراف شمای بالا(ش٤) خواهد شد : (بشرط سیگنال ورودی E_1 وسیگنال‌خروجی I_5)



(ش ٤)

درصورتیکه‌شمای‌فوق را نسبت‌به‌معادلات گرهی‌حل کنیم‌خواهیم داشت:

$$\dot{\varphi}_a\left(\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)+\dot{\varphi}_b\left(-\frac{1}{z_2}\right)=\dot{E}_1\frac{1}{z_0}$$

$$\dot{\varphi}_a\left(-\frac{1}{z_2}\right)+\dot{\varphi}_b\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4+z_0}\right)=0$$

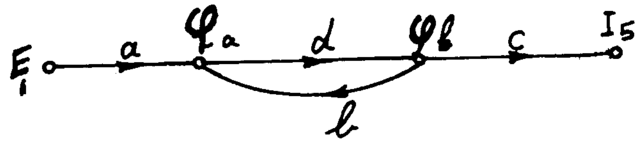
$$\dot{I}_0=\dot{\varphi}_b\frac{1}{z_4+z_0}$$

اگر دراینحالت انتقالهای شاخه‌ها را به‌ترتیب زیر بگیریم :

$$a=\frac{\frac{1}{z_0}}{\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}} \quad و \quad b=\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}}$$

$$c=\frac{1}{z_4+z_0} \quad و \quad d=\frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4+z_0}}$$

گراف‌شمای فوق دراینحالت خواهد شد : (ش ۵)



(ش ۵)

ترتیب قرارگرفتن گره‌ها درشکل غیر مشخص میباشد ولی بهتر است گره‌ها طوری قرار بگیرند که تسلسل حرکت از چپ براست‌مراعات گردد یعنی عبور سیگنال (انفورماسیون) از ورودی بطرف خروجی‌باشد

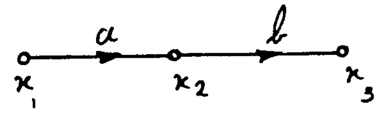
نسبت بمقادیر انتخابی ممکن است برای یک شمای الکتریکی گرافهای مختلف داشته‌باشیم (مثال بالا) درصورتیکه درشمائی چندین‌سیگنال موجود باشد از روش سوپرپوزیسیون (انطباق) استفاده‌خواهیم کرد بطوریکه اول سیگنال خروجی ازیک منبع را منظور نموده وسپس منابع دیگر را به‌ترتیب درنظر میگیریم در خاتمه تمامی سیگنالها را درخروجی‌جمع‌میکنیم.

پس‌از تشکیل گراف باقواعدی که در زیرذکرمیشود آنرا ساده‌تر میسازیم :

طرز ساده نمودن‌گراف

۱ ـ انتقال شاخه‌های‌متوالی ـ مساوی‌حاصلضرب انتقال‌این شاخه‌هاست (ش۶-۷)

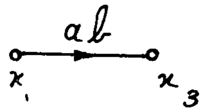
زیرا :



(ش ۶)

$x_2=ax_1$

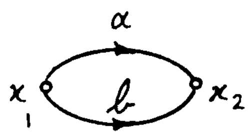
$x_3=bx_2=abx_1$



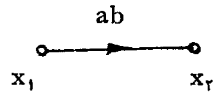
(ش ۷)

$x_3=abx_1$

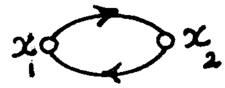
۲ ـ **انتقال دوشاخه موازی‌هم‌جهت** ـ مساوی مجموع انتقال آنهاست (ش۸-۹).
درصورتیکه جهت‌های آنها مخالف هم‌باشد این‌عمل درست نمی‌باشد (ش ۱۰).



(ش ۸)

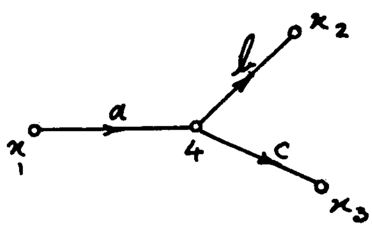


(ش ۹)

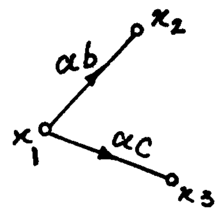


(ش ۱۰)

۳ ـ **حذف نقطه‌گرهی‌ساده** ـ نقطه گرهی نقطه‌ایست که‌بآن چندین شاخه وارد ویا ازآن‌خارج‌شوند وحلقه‌ای با رابطه معکوس نداشته باشد (نقاط ٤ و ٥ شکلهای) (۱۱-۱۳)



(ش ۱۱)

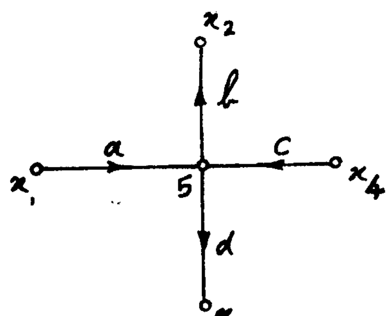


(ش ۱۲)

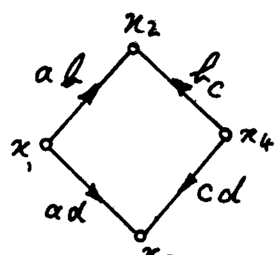
$x_4=ax_1$

$x_2=bx_4=abx_1$

$x_3=cx_4=acx_1$



(ش۱۳)



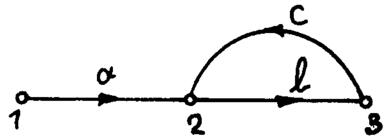
(ش ۱٤)

$x_5=ax_1+cx_4$

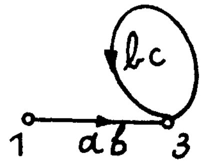
$x_2=bx_5=abx_1+bcx_4$

$x_3=dx_5=adx_1+dcx_4$

٤ ـ **حذف مدار بسته** ـ در (ش۱۵) شاخه‌ای بارابطه معکوس بانتقال c بین گرههای ۲و۳ وجود دارد که مدار بسته‌ای باشاخه‌های b و c درست شده است که آنرا میتوان بشکل زیر درآورد (ش ۱٦).



(ش ۱۵)



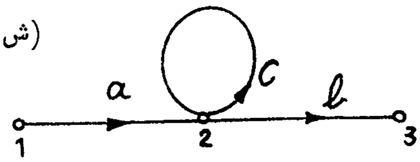
(ش ۱۶)

$$x_2 = ax_1 + cx_3$$
$$x_3 = bx_2$$
$$x_3 = abx_1 + bcx_3$$

شاخه‌ای که ازگرهی خارج شده و بهمان گره وارد شود آنرا حلقه مینامیم .

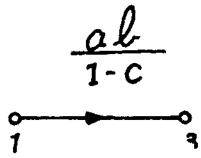
۵ ـ حذف حلقه ـ دراین (شکل ۱۷) حلقه‌ای بانتقال (c) وجود دارد و آنرا میتوان (بشکل ۱۸) درآورد .

(ش ۱۷)



$x_2 = ax_1 + cx_2$

$x_3 = bx_2$



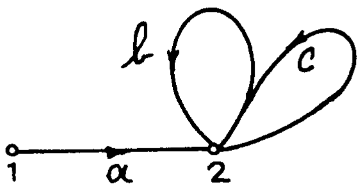
ش ۱۸

ویا $x_2 = \frac{ax_1}{1-c}$ شده و

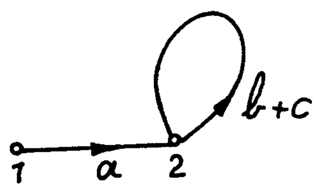
پس از قرار دادن آن در x_3

نتیجه خواهد بود : $x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1$ (بفرض اینکه $|c|<1$)

۶ـ تعویض دوحلقه‌ویا بیشتربایک حلقه ـ این دوحلقه را میتوان بایک حلقه عوض نمود بطوریکه (ش ۲۰) پس‌از تعویض دوحلقه به‌یک حلقه میباشد .



(ش ۱۹)

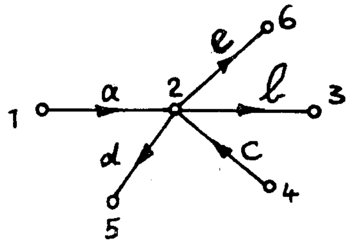


(ش ۲۰)

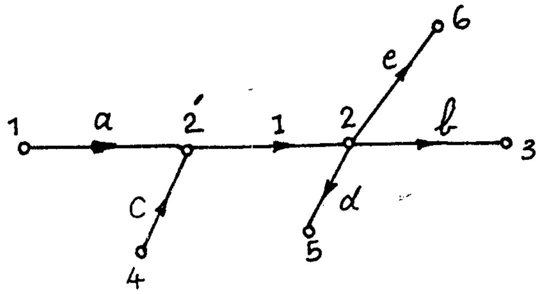
$$x_2 = ax_1 + bx_2 + cx_2 = ax_1 + (b+c)x_2$$

۷ ـ تطویل گره ـ دربعضی از موارد تغییر شکل گراف بهتراست باتطویل (کشش) گره باشد مثلاً اگر بخواهیم گره (۲) گراف (ش ۲۱) را طویل ترسازیم آنرا بدو گره تبدیل میکنیم .

$$x_2 = ax_1 + cx_4$$
$$x'_2 = ax_1 + cx_4$$
$$x_2 = 1 \times x'_2$$



(ش ۲۱)



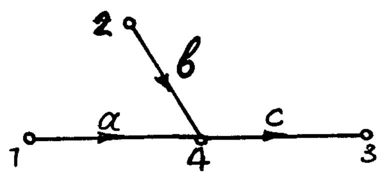
(ش ۲۲)

چنانکه دیده میشود سیگنال گره (۲) همان قبلی است. (ش ۲۲)

۸ ـ **تغییر مسیر** ـ قبلاً گفته‌شدانفورماسیون دریک گراف‌معادل انفورماسیون معادله‌ای‌دریک‌سیستم دیگر میباشد فرض‌میکنیم معادله :

$$x_3 = c(ax_1 + bx_2)$$

را داشته باشیم که گراف آن خواهد بود : (ش ۲۳)

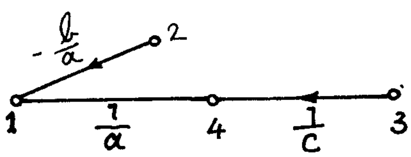


(ش ۲۳)

دراینجا x_1 و x_2 علت و x_3 معلول میباشد. درصورتیکه معادله فوق را نسبت به x_1 ویا x_2 حل کنیم علت و معلول جایشان عوض میشود یعنی اگر x_2 و x_3 علت باشند x_1 معلول خواهد بود .

$$x_1 = \frac{1}{ac}x_3 + \left(-\frac{b}{a}\right)x_2$$

گراف معادله جدید خواهد شد: (ش ۲۴)



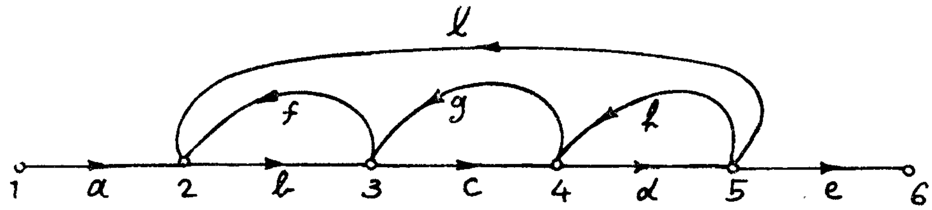
(ش ۲۴)

دیده میشود مسیر نسبت بگراف قبلی عوض شده‌است‌برای‌اینکه‌به گراف بامسیرمعکوس برسیم‌بایستی :

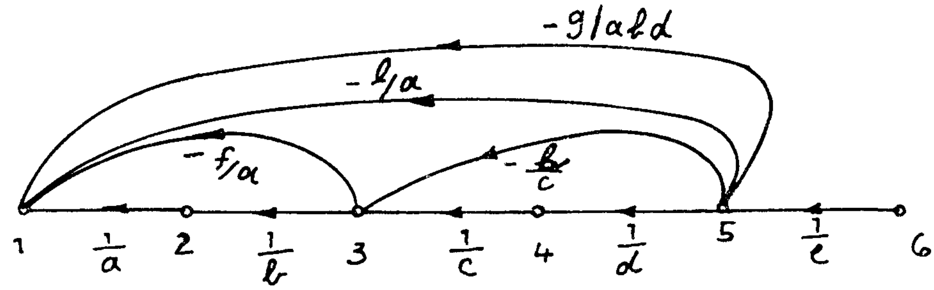
a ـ جهت سهم را درشاخه‌ها معکوس نمود ـ درصورتیکه این شاخه‌ها قسمتی از حلقه با رابطه معکوس داشته باشند جهت سهم عوض نخواهد شد . مثلاً (ش ۲۵-۲۶)

b ـ انتقال شاخه علت‌رادرتبدیل به معلول‌معکوس مینمایندیعنی بجای a و c بایستی $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{c}$ در نظر گرفت‌درگراف(ش ۲۵) چهار حلقه‌بارابطه معکوس‌داشتیم که عبارت بودند از bf و cg و dh وbcdl

در گراف معکوس حلقه های با رابطه معکوس را نداریم و مقدار انتقال معکوس ساده‌تر از گراف اولیه بدست میآید بطوریکه :



(ش ۲۵)



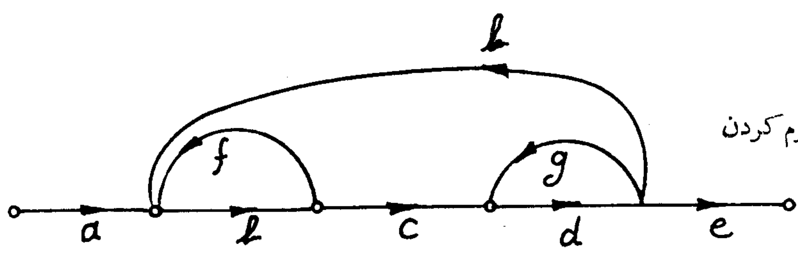
(ش ۲۶)

$$x_1 = \frac{1}{e}\left[\left(\frac{1}{cd} - \frac{h}{c}\right)\left(\frac{1}{ab} - \frac{f}{a}\right) - \frac{g}{abd} - \frac{l}{a}\right]x_6$$

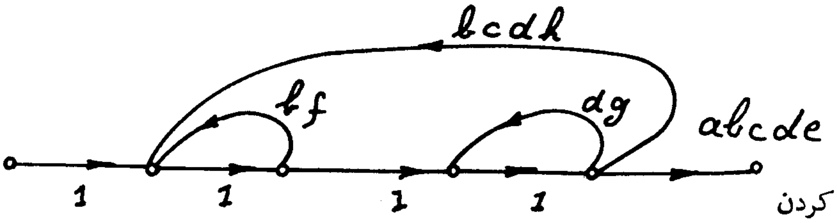
دیده میشود که انتهای شاخه g از گره (۳) توسط گره ۲ به گره (۱) منتقل شده وابتدای همان شاخه از گره (٤) بگره (٥) آمده و بهمین جهت درانتقال معکوس شاخه $-\frac{g}{abd}$ درمخرج حاصلضرب انتقالهای سه‌شاخه قرارگرارگرفته است واین نشان میدهد که انتقال از ابتداوانتهای این شاخه ها بوده‌است .

۹ ـ نورم کردن گرافهاـ عبارت‌از تغییر انتقال‌شاخه های گراف میباشدبطوریکه برای بعضی‌ازشاخه ها انتقال مساوی (۱) نورم میشود . برای‌سایر شاخه ها این تغییرات‌طوری‌انجام‌میگیرد که برای هرحلقه بارابطه معکوس انتقال منتجه تغییزاتی نداشته باشد (البته‌بایستی درنظر گرفت که برای هرمسیر هیچ یک‌از گره‌های گراف‌دوبارتکرار نشود) .

در شکلهای ۹ ۲-٦-۳ گرافهائی نشان داده شده‌اند که پس‌از ساده نمودن آنهارا(بااستفاده‌از روشهای‌بند ٥و٧) مشاهده میکنیم .



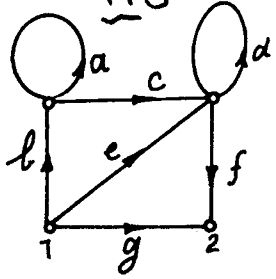
(ش ۲۷)



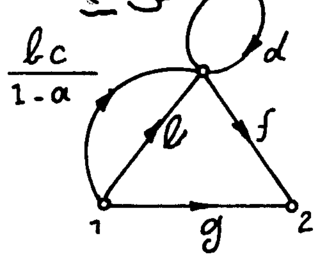
پس از نورم کردن

ش ۲۸

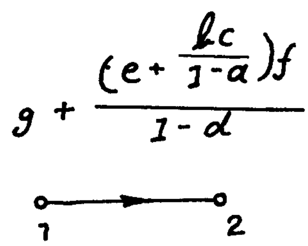
ش ۲۹



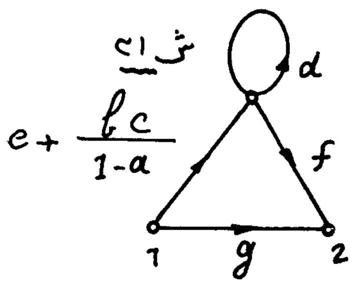
ش ۳۰



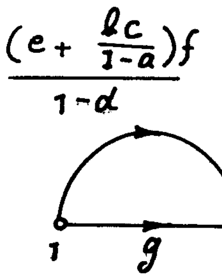
ش ۳۳

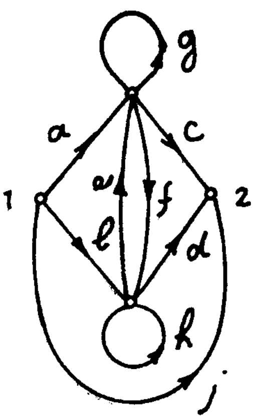


ش ۳۱

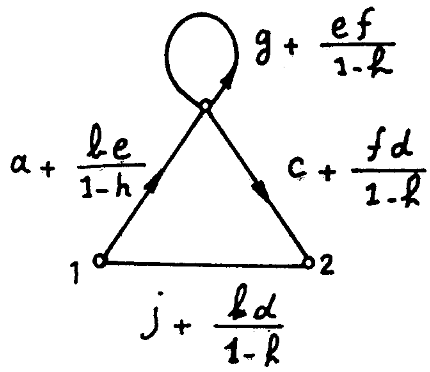


ش ۳۲

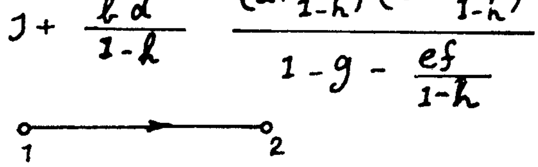




(ش ۳٤)

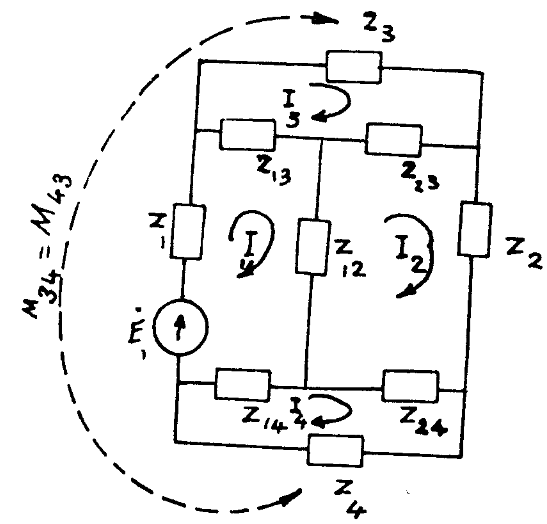


(ش ۳۵)



(ش ۳٦)

استفاده از قوانین کیرشهوف برای تشکیل گراف راقبلاً دیدیم در شکل ۳۷ مدار الکتریکی را بررسی نموده و دوحالت بدون القاء متقابل وباالقاء متقابل گراف آنرا رسم میکنیم.



(ش۳۷)

با استفاده ازروش مداری میتوان معادلات زیر را نوشت:

$$\begin{cases} z_{۱۱}\dot{I}_{۱} - z_{۱۲}\dot{I}_{۲} - z_{۱۳}\dot{I}_{۳} - z_{۱۴}\dot{I}_{۴} = \dot{E}_{۱} \\ -z_{۲۱}\dot{I}_{۱} + z_{۲۲}\dot{I}_{۲} - z_{۲۳}\dot{I}_{۳} - z_{۲۴}I_{۴} = ۰ \\ -z_{۳۱}\dot{I}_{۱} - z_{۳۲}\dot{I}_{۲} + z_{۳۳}\dot{I}_{۳} = ۰ \\ -z_{۴۱}\dot{I}_{۱} - z_{۴۲}\dot{I}_{۲} + z_{۴۴}\dot{I}_{۴} = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

که‌در معادلات فوق مقادیر مقاومتها بدین شکل میباشند:

$$z_{۱۱} = z_{۱} + z_{۱۳} + z_{۱۲} + z_{۱۴}$$

$$z_{۲۲} = z_{۲} + z_{۲۳} + z_{۲۱} + z_{۲۴}$$

$$z_{۳۳} = z_{۳} + z_{۳۱} + z_{۳۲}$$

$$z_{۴۴} = z_{۴} + z_{۴۱} + z_{۴۲}$$

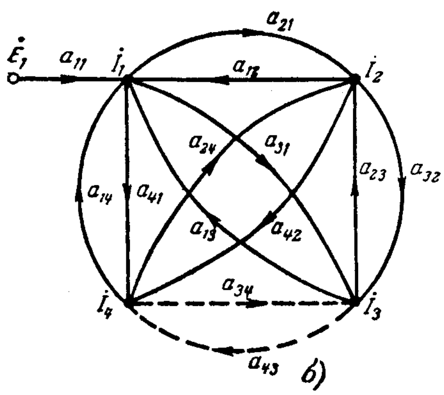
اگر بخواهیم معادلات (۱) را نسبت به‌شدت جریان بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{I}_{۱} = a_{۱۱}\dot{E}_{۱} + a_{۱۲}\dot{I}_{۲} + a_{۱۳}\dot{I}_{۳} + a_{۱۴}\dot{I}_{۴} \\ \dot{I}_{۲} = a_{۲۱}\dot{I}_{۱} + a_{۲۳}\dot{I}_{۳} + a_{۲۴}\dot{I}_{۴} \\ \dot{I}_{۳} = a_{۳۱}\dot{I}_{۱} + a_{۳۲}\dot{I}_{۲} \\ \dot{I}_{۴} = a_{۴۱}\dot{I}_{۱} + a_{۴۲}\dot{I}_{۲} \end{cases} \qquad (۲)$$

که درآنجا :

$$
(۳)\qquad
\begin{cases}
a_{۱} = \dfrac{۱}{z_{۱۱}} \\[2ex]
a_{۱۲} = \dfrac{z_{۱۲}}{z_{۱۱}} \\[2ex]
a_{۱۳} = \dfrac{z_{۱۳}}{z_{۱۱}} \\[2ex]
a_{۱٤} = \dfrac{z_{۱٤}}{z_{۱۱}} \\[2ex]
a_{۲۱} = \dfrac{z_{۲۱}}{z_{۲۲}} \\[2ex]
\cdots\cdots \\[2ex]
a_{٤۲} = \dfrac{z_{٤۲}}{z_{٤٤}}
\end{cases}
$$

میباشد .



(ش۳۸)

گراف معادلات (۲) خواهد بود (ش ۳۸) (بدون خطوط نقطه‌چین)

برای پیدا نمودن مجهولات درمعادلات (۲) مثلاً $I_{۱}$ داریم :

$$
(٤)\qquad \dot{I}_{۱} = \dot{E}_{۱}\frac{۱}{z_{۱۱}} \times \frac{\Delta_{۱۱}}{\Delta}
$$

$$
\Delta_{۱۱} = ۱ - a_{۲٤} \times a_{٤۲} - a_{۲۳} \times a_{۳۲}
$$

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
۱ & -a_{۱۲} & -a_{۱۳} & -a_{۱٤} \\
-a_{۲۱} & ۱ & -a_{۲۳} & -a_{۲٤} \\
-a_{۳۱} & -a_{۳۲} & ۱ & ۰ \\
-a_{٤۱} & -a_{٤۲} & ۰ & ۱
\end{vmatrix}
$$

دراینحالت تعداد عملیات جبری برای محاسبه I_1 از فرمول(٤) با درنظر گرفتن روابط (۳) شصت و هشت عدد میباشد .
درصورتیکه اگر $\dot{I}_1$ را از معادلات (۱) پیدا نموده و پس از تبدیلات مقاومتهای شاخه‌ها را درآخرین عبارت بگذاریم تعداد عملیات جبری(۳۹۰) عدد خواهد بود .

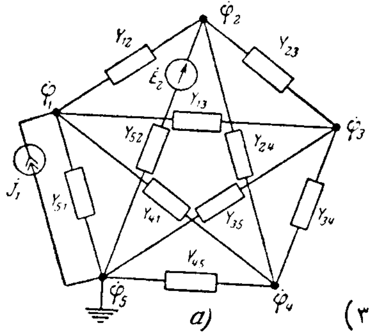
درصورت وجود القاء متقابل بین مقاومتهای z_3 و z_4 بطوریکه $M_{34}=M_{43}$ باشد به گراف بایستی دوشاخه اضافه نمود بطوریکه :

$$a_{43}=\frac{j\omega \dot{M}_{43}}{z_{44}} \quad \text{و} \quad a_{34}=\frac{j\omega M_{34}}{z_{33}}$$

(درگراف بالا این شاخه‌ها نقطه چین نشان داده شده‌اند) .

حال شمای الکتریکی ٥ ضلعی مقابل را بررسی کنیم (ش ۳۹) .

اگر از معادلات گرهی استفاده نمائیم میتوانیم چهار معادله مستقل برای این مدار بنویسیم :



(ش ۳۹)

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= a_{11}\dot{I}_1 + a_{12}\dot{\varphi}_2 + a_{13}\dot{\varphi}_3 + a_{14}\dot{\varphi}_4 \\
\dot{\varphi}_2 &= a_{21}\dot{\varphi}_1 + a_{22}\dot{E}_2 + a_{23}\dot{\varphi}_3 + a_{24}\dot{\varphi}_4 \\
\dot{\varphi}_3 &= a_{31}\dot{\varphi}_1 + a_{32}\dot{\varphi}_2 + a_{34}\dot{\varphi}_4 \\
\dot{\varphi}_4 &= a_{41}\dot{\varphi}_1 + a_{42}\dot{\varphi}_2 + a_{43}\dot{\varphi}_3
\end{aligned}\right. \qquad (٥)$$

که در آنجا :

$$\left\{\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{y_{11}} \\
a_{12} &= \frac{y_{12}}{y_{11}} \\
a_{13} &= \frac{y_{13}}{y_{11}} \\
a_{14} &= \frac{y_{14}}{y_{11}} \\
a_{22} &= \frac{y_{20}}{y_{22}} \\
a_{21} &= \frac{y_{21}}{y_{22}} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{43} &= \frac{y_{43}}{y_{44}}
\end{aligned}\right. \qquad (٦)$$

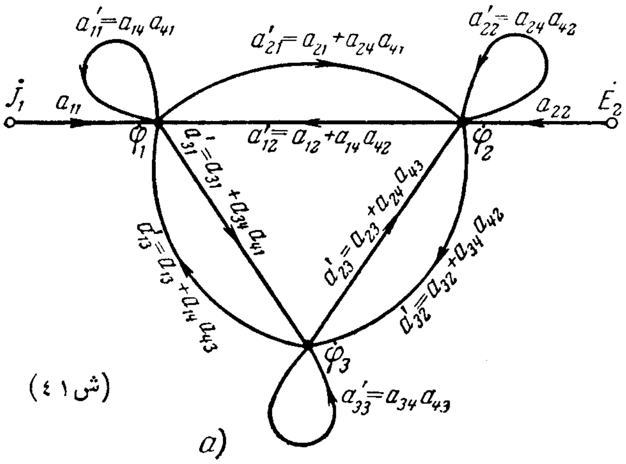
در روابط (٦) :

$$y_{۱۱}=y_{۱۲}+y_{۱۳}+y_{۱٤}+y_{۱۰}$$

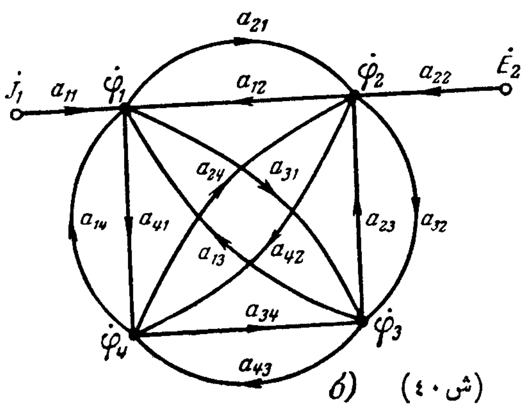
$$y_{۲۲}=y_{۲۱}+y_{۲۳}+y_{۲٤}+y_{۲۰}$$

گراف معادلات (٥) خواهد بود :(ش . ٤)

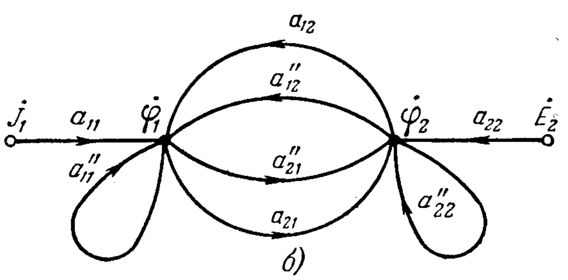
درصورتیکه این گراف را ساده کنیم بترتیب شکلهای زیر خواهیم داشت :



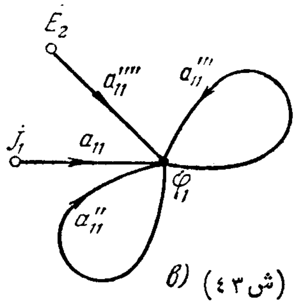
(ش ٤۱)



(ش ٤۰)



(ش ٤۲)



(ش ٤۳)

بطوریکه :

$$a''_{۱۱}=\frac{a_{۱۳}a_{۳۱}+a_{۱۳}a_{۳٤}a_{٤۱}+a_{۱٤}a_{٤۱}+a_{۱٤}a_{٤۳}a_{۳۱}}{۱-a'_{۳٤}a'_{٤۳}}$$

$$a''_{۲۲}=\frac{a_{۲۳}a_{۳۲}+a_{۲۳}a_{۳٤}a_{٤۲}+a_{۲٤}a_{٤۲}+a_{۲٤}a_{٤۳}a_{۳۲}}{۱-a'_{۳٤}a'_{٤۳}}$$

$$a''_{۱۲}=\frac{a_{۱۳}(a_{۳۲}+a_{۳٤}a_{٤۲})+a_{۱٤}(a_{٤۲}+a_{٤۳}a_{۳۲})}{۱-a'_{۳٤}a'_{٤۳}}$$

$$a''_{۲۱}=\frac{a_{۲۳}(a_{۳۱}+a_{۳٤}a_{٤۱})+a_{۲٤}(a_{٤۱}+a_{٤۳}a_{۳۱})}{۱-a'_{۳٤}a'_{٤۳}}$$

$$a'''_{۱۱}=\frac{(a_{۱۲}+a''_{۱۲})(a_{۲۱}-a''_{۱۲})}{۱-a''_{۲۲}}$$

و :

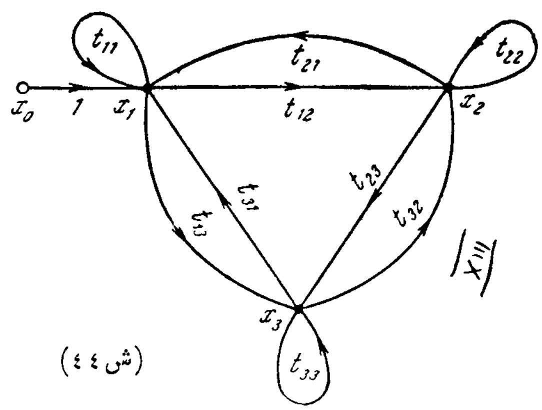
$$a''''_{11}=\frac{a_{22}(a_{12}+a''_{12})}{1-a''_{22}}$$

برای آخرین گراف ساده شده معادله بدین شکل میباشد :

$$\dot{\varphi}_1=a_{11}\dot{J}+a''''_{11}\dot{E}_2+a''_{11}\dot{\varphi}_1+a'''_{11}\dot{\varphi}_1$$

که میتوان پتانسیل $\dot{\varphi}_1$ را از آن حساب نمود .

$$\dot{\varphi}_1=\frac{a_{11}\dot{J}_1+a''''_{11}\dot{E}_2}{1-a''_{11}-a'''_{11}}$$



(ش ٤٤)

حال گراف (شکل ٤٤) را بررسی نموده و فرمولی که بتوان گرافها را محاسبه نمود پیدامیکنیم .

معادلات زیربرای این گراف صادق میباشند :

$$\left\{\begin{aligned} x_1(1-t_{11})-x_2t_{21}-x_3t_{31}&=x_0\\ -x_1t_{12}+x_2(1-t_{22})-x_3t_{32}&=0\\ -x_1t_{13}-x_2t_{23}+x_3(1-t_{33})&=0\end{aligned}\right. \qquad (7)$$

برای تعیین یکی از سیگنالها مثلاً x_2 داریم :

$$x_2=x_0\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-t_{11} & -t_{21} & -t_{31}\\ -t_{12} & 1-t_{22} & -t_{32}\\ -t_{13} & -t_{23} & 1-t_{33}\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \Delta_{12}=\begin{vmatrix}1-t_{11} & 1 & -t_{31}\\ -t_{12} & 0 & -t_{32}\\ -t_{13} & 0 & 1-t_{33}\end{vmatrix}$$

دترمینان Δ را بارکنیم خواهیم داشت :

$$\Delta=1-t_{11}-t_{22}-t_{33}-t_{13}t_{31}-t_{23}t_{32}-t_{12}t_{21}-t_{12}t_{23}t_{31}-t_{13}t_{32}t_{21}+t_{11}t_{22}+t_{22}t_{33}+t_{33}t_{11}+t_{13}t_{31}t_{22}+t_{32}t_{23}t_{11}+t_{12}t_{21}t_{33}-t_{11}t_{22}t_{33} \qquad (8)$$

که درآنجا :

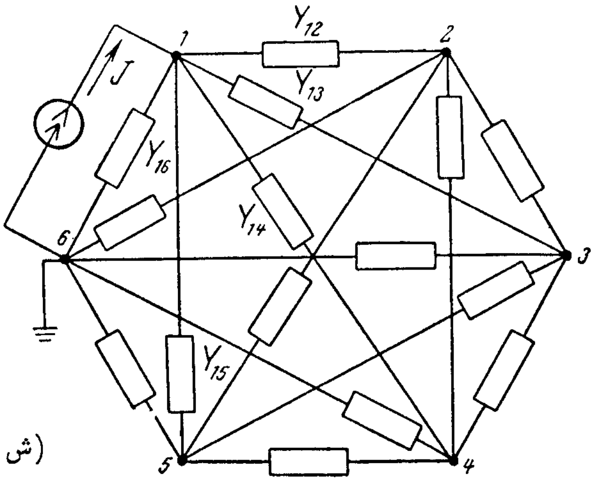
$$\begin{cases}P_1=t_{12}\\ P_2=t_{13}t_{32}\end{cases} \qquad \Delta_{12}=t_{12}(1-t_{33})+t_{13}t_{32}=P_1\Delta_1+P_2\Delta_2$$

p_1 و p_2 ثابت های انتقالهای مسیر از منبع سیگنال به گره دوم میباشد و Δ_1 دترمینانی است از گراف که :

$$\Delta_1=1-t_{33}$$

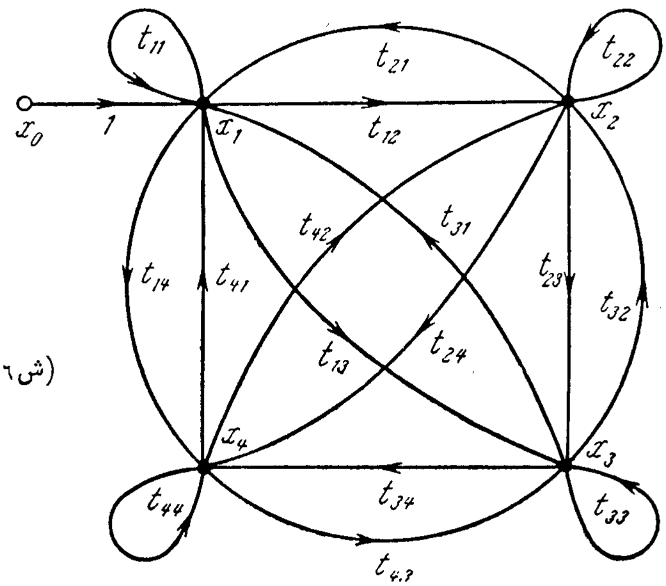
با ثابت انتقال میسر p_1 تماسی ندارد و $\Delta_2=1$ میباشد .

اگرشمای زیر (ش ٤٥) را بررسی نمائیم گراف آن را رسم کنیم بشکلی خواهد بود که مشاهده میکنیم (ش ٤٦) وبرای این گراف معادلات زیر را میتوان نوشت :



(ش ٤٥)

$$\begin{cases}x_1(1-t_{11})-x_2t_{21}-x_3t_{31}-x_4t_{41}=x_0\\ -x_1t_{12}+x_2(1-t_{22})-x_3t_{32}-x_4t_{42}=0\\ -x_1t_{13}-x_2t_{23}+x_3(1-t_{33})-x_4t_{43}=0\\ -x_1t_{14}-x_4t_{24}-x_3t_{34}+(1-t_{44})x_4=0\end{cases} \qquad (9)$$



(ش ٤٦)

که درآنجا :

$$t_{11}=\frac{y_{10}}{y_{11}}\times\frac{y_{01}}{y_{00}}$$

$$t_{12}=\frac{y_{21}}{y_{22}}+\frac{y_{01}}{y_{00}}\times\frac{y_{20}}{y_{22}}$$

$$t_{13}=\frac{y_{31}}{y_{33}}+\frac{y_{01}}{y_{00}}\times\frac{y_{30}}{y_{33}}$$

$$t_{21}=\frac{y_{12}}{y_{11}}+\frac{y_{10}}{y_{11}}\times\frac{y_{02}}{y_{22}}$$

سیگنال درگره دوم خواهد بود :

$$x_2=x_0\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$$

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix} t_{12} & -t_{32} & -t_{42} \\ t_{13} & 1-t_{33} & -t_{43} \\ t_{14} & -t_{34} & 1-t_{44} \end{vmatrix}$$

و :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-t_{11} & -t_{21} & -t_{31} & -t_{41} \\ -t_{12} & 1-t_{22} & -t_{32} & -t_{42} \\ -t_{13} & -t_{23} & 1-t_{33} & -t_{43} \\ -t_{14} & -t_{24} & -t_{34} & 1-t_{44} \end{vmatrix}$$

دترمینان Δ_{12} را بکنیم بدین شکل خواهد بود :

$$\Delta_{12}=\sum_{k=1}^{5}P_k\Delta_k$$

که درآنجا P_k ـ ثابت انتقال مسیر k از منبع سیگنال به گره دوم و

Δ_k ـ دترمینان قسمتی از گراف میباشد که مسیر k راقطع نکند.

$P_1=t_{12}$, $P_2=t_{14}t_{42}$, $P_3=t_{13}t_{34}t_{42}$, $P_4=t_{14}t_{43}t_{32}$, $P_5=t_{13}t_{32}$

$\Delta_1=(1-t_{33})(1-t_{44})-t_{34}t_{43}$, $\Delta_2=1-t_{33}$, $\Delta_3=1$, $\Delta_4=1$,

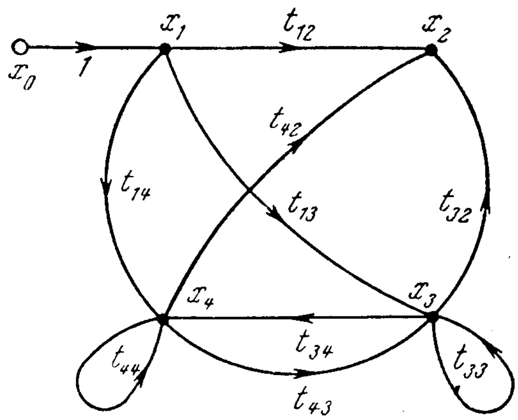
$\Delta_5=1-t_{44}$

بایستی دقت نمود که دترمینان Δ_{12} از دترمینان Δ باحذف سطر اول.وستون دوم بدست آمده که نتیجه‌رادر $(-1)^3$ ضرب کرده‌ایم این عملیات ریاضی را میتوان درگراف نشان داد که بدین‌شکل میشود :

در این گراف (ش۴۷) انتقالهائیکه به گره (۱) میآمدند حذف شده‌اند همچنین از گره (۲) انتقال خروجی نداریم . بایستی تذکر داد دترمینان Δ_2 از دترمینان Δ_{12} حاصل میشود که در آن $P_2=\infty$ میباشد یعنی این مسیر اتصال کوتاه شده است .

اگر Δ_{12} را در $P_2=t_{14}t_{42}$ ضرب و تقسیم کنیم دترمینان Δ_{12} بشکل زیر درمیآید:

(گراف دترمینان Δ_{12})



(ش۴۷)

$$\Delta_{12}=t_{14}t_{42}\begin{vmatrix} \frac{t_{12}}{t_{14}} & -t_{32} & -1 \\ \frac{t_{13}}{t_{14}} & 1-t_{33} & -\frac{t_{43}}{t_{42}} \\ 1 & -t_{34} & 1-\frac{t_{44}}{t_{42}} \end{vmatrix}$$

اگر دربالا $t_{14}=\infty$ و $t_{42}=\infty$ فرض شوند $\Delta_2=1-t_{33}$ خواهد بود حال دترمینان Δ را بازکنیم و درنظر بگیریم که :

$$L_1=t_{11}\ ,\ L_2=t_{22}\ ,\ L_{121}=t_{12}t_{21}\ ,$$
$$L_{232}=t_{23}t_{32}\ ,\ L_{1231}=t_{12}t_{23}t_{31}\ ,\ L_{2342}=t_{23}t_{34}t_{42}\ ,\ \cdots\ ,\ L_{12341}=t_{12}t_{23}t_{34}t_{41}$$

باشد نتیجه خواهد شد :

$$\begin{aligned}\Delta=1-(&L_1+L_2+L_3+L_4+L_{121}+L_{242}+L_{343}+L_{232}+L_{141}+L_{131}+L_{1241}+\\ &L_{2342}+L_{2432}+L_{1321}+L_{1231}+L_{1341}+L_{1421}+L_{1431}+L_{12341}+L_{12431}+L_{13241}+\\ &L_{13421}+L_{14321}+L_{14231})+L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1+L_3L_4+L_4L_1+L_4L_2+\\ &L_1L_{242}+L_3L_{242}+L_1L_{343}+L_2L_{343}+L_1L_{232}+L_4L_{232}+L_3L_{121}+L_4L_{121}+\\ &L_{121}L_{343}+L_2L_{131}+L_2L_{141}+L_3L_{141}+L_{141}L_{232}+L_{131}L_{242}+L_4L_{131}+\\ &L_1L_{2342}+L_1L_{2432}+L_3L_{1241}+L_4L_{1231}+L_4L_{1321}+L_2L_{1341}+L_3L_{1421}+\\ &L_2L_{1431}-(L_1L_2L_3+L_1L_3L_4+L_2L_4L_1+L_2L_4L_3+L_1L_3L_{242}+L_1L_2L_{343}+\\ &L_1L_4L_{232}+L_4L_3L_{121}+L_2L_4L_{131}+L_2L_3L_{141})+L_1L_2L_3L_4\end{aligned} \qquad (10)$$

فرمول (۱۰) بالا دارای ۶۵ جمله میباشد درصورتیکه اگر از شمای اولیه استفاده میکردیم وضرائب دترمینان آنرا بازمی‌نمودیم ۱۲۹۶ جمله میداشتیم . چنانکه دیده میشود درفرمول بالا (۴۲) مدار مختلف داریم که حاصلضرب انتقالهای آنها دارای علامت منفی است (۲۹) جمله مثبت داریم که حاصلضرب انتقالهای زوج

به انتقالهائی‌است که باهم تماسی ندارند و(. ۱) جمله باعلامت منفی میباشند که حاصلضرب ۳ انتقال است وباهم تماسی ندارند بالاخره آخرین جمله علامت مثبت دارد و عبارت از حاصلضرب انتقالهای ٤ مداریست که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

میتوان گفت هریک از جمله‌ها حاصلضرب عناصر دترمینان میباشد که از سطرو ستونهای مختلف بدست آمده‌اندو علامت هریک از آنها بستگی برقم و علامت عناصر دترمینان ونامنظمی تسلسل اندیسهای این عناصر دارد مثلاً ثابت انتقال $L_{12341}=t_{12}t_{23}t_{34}t_{41}$ چهار عامل‌ضرب(عدد زوج) و ۳ عدم ترتیب (عدد فرد) دارد بنابراین علامت آن منفی خواهد بود.

درثابت انتقال $L_{2342}=t_{23}t_{34}t_{42}$ ۲ تا عدم ترتب و ۳ عامل‌ضرب دارد باز دارای علامت منفی خواهد بود پس میتوان گفت درصورتیکه حاصلضرب با عدد زوج انتقالها باشد دترمینان علامت مثبت ودر غیر اینصورت (عدد فرد) علامت منفی را خواهدداشت.

حال مسئله را تعمیم داده برای n گره باسیگنال x_0 معادلات را بنویسیم خواهیم داشت:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(1-t_n)-x_2t_{21}-\cdots-x_nt_{n1}=x_0 \\ -x_1t_{12}+x_2(1-t_{22})-\cdots-x_nt_{n1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_1t_{1n}-x_2t_{2n}-\cdots+x_n(1-t_{nn})=0 \end{array}\right. \qquad (11)$$

در هریک‌ازگره‌ها مقدار سیگنال خواهد:

$$x_h=x_0\frac{\Delta_{1h}}{\Delta}=x_0\frac{\Sigma P_k\Delta_k}{\Delta}$$

Δ ـ دترمینان از مرتبه n میباشد که از ضرائب معادلات بدست آمده.

$\Delta_{1h}=\Sigma P_k\Delta_k$ ـ مینور دترمیان میباشد که باحذف سطر اول وستون h بدست آمده است درحالتیکه دترمینان Δ را باز نمایم ۳ نوع جمله خواهیم داشت (بدون اینکه جمله اول که واحد است منظورشود):

$$t_{ip}t_{py}\cdots t_{xl}t_{lj}t_{ji}\,, \qquad (1)$$

$$t_{qn}t_{nq}\cdots 1\cdots t_{np}t_{pm}t_{mn}\cdots t_{ij}t_{ji} \qquad (2)$$

$$t_{qn}t_{nq}\cdots t_{rr}\cdots t_{np}t_{pm}t_{mn}\cdots t_{ij}t_{ji} \qquad (3)$$

مجموعه نوع اول:

۱ ـ عبارت از ثابت‌های انتقال میباشد که‌مدار آنها بسته است واز تمام گره‌های گراف عبور میکنند وعلامت‌آنها منفی است واین‌باتعداد عوامل ضرب اگر زوج‌باشد وعدم ترتیب فرد ویا برعکس تعیین میشود

۲ ـ مجموعه نوع دوم دارای ثابت‌های انتقال مدارهای بسته‌است. علامت هریک از ثابت‌های انتقال مدار همیشه منفی است ولی علامت عوامل ضرب بستگی به‌تعداد آنها دارد.

۳ ـ مجموعه نوع سوم‌دارای ثابتهای انتقال نوع t_{rr} (حلقه های مدار) میباشد و علامت منفی‌دارد

وعوامل ضرب ثابتهای انتقال مدارهائیست که باهم تماسی ندارند پس میتوان نوشت :

$$\triangle = ۱ - \sum_k L_k^{(۱)} + \sum_k L_k^{(۲)} - \sum L_k^{(۳)} + \cdots + \sum_k L_k^{(n)}$$

$L_k^{(r)}$ - حاصلضرب ثابتهای انتقال r میباشد که مدارها باهم تماسی ندارند.

$\triangle_{1h}$ - از دترمینان $\triangle$ با حذف سطر اول وستون h بدست میآید واین دترمینان $\triangle_{1h}$ مطابق گرافی خواهد بود که فاقد شاخه هائی است که به گره منبع سیگنال منتهی میشوند همچنین ازگره h شاخه های خروجی را نخواهیم داشت . بنابراین بین گره منبع سیگنال وگره h مدارهای بسته را خواهیم داشت.

$\triangle_{1h}$ - در صورتیکه بازشود دونوع مجموعه را خواهیم داشت :

(۱) $x_o t_{lk} t_{kj} \cdots t_{rr} \cdots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$,

(۲) $x_o t_{lk} t_{kj} \cdots ۱ \cdots t_{ps} t_{sq} t_{qp}$.

هریک از مجموعه بالا دارای P_k میباشد که ثابت مسیر k

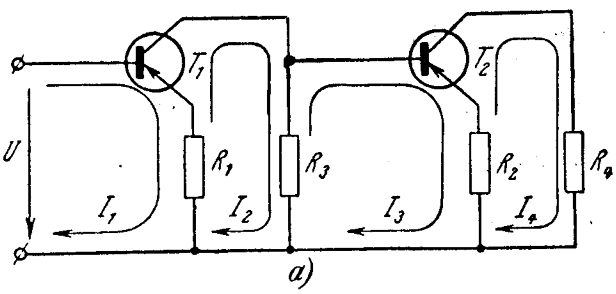
$$\triangle_1 h = \sum P_k \triangle_k$$

در جهت ازمنبع به گره h میباشد و مابقی ضرائب ثابتهای انتقال مدارهائیست که باهم تماسی ندارند در حالت کلی ثابت انتقال سیگنال خواهد بود :

$$H = \frac{\sum P_k \triangle_k}{۱ - \sum_k L_k^{(۱)} + \sum_k L_k^{(۲)} - \sum_k L_k^{(۳)} + \cdots + \sum_k L_k^{(n)}}$$

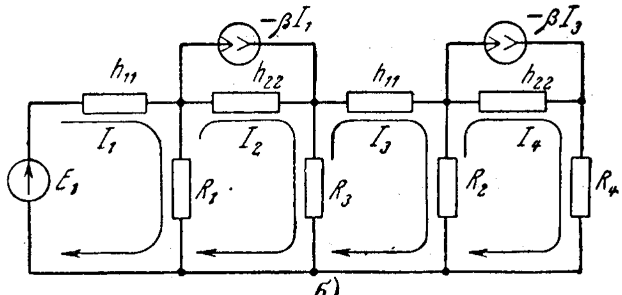
حال فرمولهائیکه درصفحات قبلی بدست آمده‌اند برای‌مدارشکل زیر (ش ۴۸) تقویت کننده ترانزیستوری‌تطبیق

(ش ۴۸)



a)

(ش ۴۹)



б)

میکنیم وضریب تقویت فشار v_4 را تعیین میکنیم در(ش ۴۹) مدار معادل رارسم نموده وبااستفاده ازروش مداری معادلات زیررا مینویسیم :

$$
(۱۲)\qquad
\begin{cases}
(h_{۱۱}+R_۱)\dot{I}_۱-R_۱\dot{I}_۲=\dot{E}_۱\\
-R_۱\dot{I}_۱+\left(R_۱+\dfrac{۱}{h_{۲۲}}+R_۳\right)\dot{I}_۲-R_۳\dot{I}_۳=-\beta\dot{I}_۱\dfrac{۱}{h_{۲۲}}\\
-R_۳\dot{I}_۲+(R_۲+R_۳+h_{۱۱})\dot{I}_۳-R_۲\dot{I}_٤=۰\\
-R_۲\dot{I}_۳+\left(R_۲+R_٤+\dfrac{۱}{h_{۲۲}}\right)\dot{I}_٤=-\beta\dot{I}_٤\dfrac{۱}{h_{۲۲}}
\end{cases}
$$

ازمعادلات بالا خواهیم‌داشت :

$$
(۱۳)\qquad
\begin{cases}
\dot{I}_۱=\dfrac{۱}{R_{۱۱}}\dot{E}_۱+\dfrac{R_۱}{R_{۱۱}}\dot{I}_۲\\
\dot{I}_۲=\dfrac{R_۱h_{۲۲}-\beta}{R'_{۲۲}}\dot{I}_۱+\dfrac{R_۳h_{۲۲}}{R'_{۲۲}}\dot{I}_۳\\
\dot{I}_۳=\dfrac{R_۳}{R_{۳۳}}\dot{I}_۲+\dfrac{R_۲}{R_{۳۳}}\dot{I}_٤\\
\dot{I}_٤=\dfrac{R_۲h_{۲۲}-\beta}{R'_{٤٤}}\dot{I}_۳
\end{cases}
$$

که درآنجا :

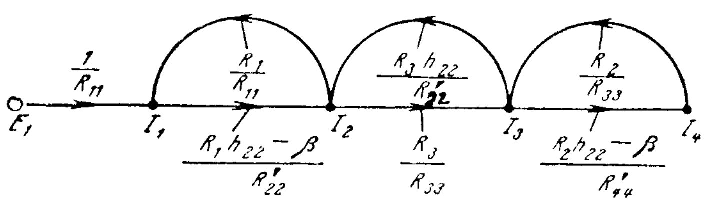
$$R'_{۲۲}=۱+(R_۱+R_۳)h_{۲۲}$$

$$R_{۱۱}=R_۱+h_{۱۱}$$

$$R'_{۳۳}=R_۳+R_۲+h_{۱۱}$$

$$R'_٤=۱+(R_۲+R_٤)h_{۲۲}$$

برای معادلات(۱۳) میتوان گراف زیر را نمایش داد :



(ش۵۰)

ضریب تقویت خواهد بود :

$$k_۳=\frac{\dot{V}_٤}{\dot{E}_۱}=\frac{R_٤\dot{I}_٤}{\dot{E}_۱}=\frac{R_٤\triangle_{۱٤}}{\triangle}=\frac{R_٤\Sigma P_k\triangle_k}{\triangle}$$

$$\triangle=۱-(L_۱+L_۲+L_۳)+L_۱L_۳$$

$$L_1 = \frac{R_1}{R_{11}} \times \frac{R_1 h_{22} - \beta}{R'_{22}}$$

$$L_2 = \frac{R_2 h_{22}}{R'_{22}} \times \frac{R_3}{R_{33}}$$

$$L_3 = \frac{R_2}{R_{33}} \times \frac{R_2 h_{22} - \beta}{R'_{44}}$$

$$\triangle_{14} = P_1 \triangle_1$$

$$P_1 = \frac{1}{R_{11}} \times \frac{R_1 h_{22} - \beta}{R'_{22}} \times \frac{R_3}{R_{33}} \times \frac{R_2 h_{22} - \beta}{R'_{44}}$$

$$\triangle_1 = 1$$

پس :

$$k_4 = \frac{R_3 R_4 (R_1 h_{22} - \beta)(R_2 h_{22} - \beta)}{R_{11} R'_{22} R_{33} R'_{44} - [R_{33} R'_{44} R_1 (R_1 h_{22} - \beta) + R_{11} R'_{44} R_2^2 h_{22} + R_{11} R'_{22} R_3 (R_2 h_{22} - \beta)] + R_1 R_3 (R_1 h_{22} - \beta)(R_2 h_{22} - \beta)}$$

بقیه دارد .