# مطالعه اثر انکسار در ترازیابی وارتفاع‌یابی مثلثاتی در ژئودزی و نقشه‌برداری و امکان حذف آن

نوشتهٔ

دکتر محمد منصور بینا

استادیار گروه فیزیک

**مقدمه ـ** مشاهدات ترازیابی ویا ارتفاع یا بی‌مثلثاتی در ژئودزی و نقشه‌برداری بعلت‌آنکه مسیر نور از قشرهای هوا با چگالی متفاوت عبور میکند و در نتیجه براثر انکسار مسیری منحنی شکل دارد همواره دارای خطائی ناشی از اثر انکسار در جو است. درعمل شیوه‌هائی درهریک از موارد بالا بکاربرده میشود که خطاها را حذف نمایند مثلاً در ترازیابی بعلت کوتاهی دهانه‌ها ( فاصله متوسط دوسیر ) وتا حدامکان برابر گرفتن فاصله تراز ازهرشاخص بنظر میرسد که خطای ناشی‌از انکسار باید حذف گردد. درنقشه‌برداری و ژئودزی که درآن تعیین ارتفاع با اندازاگیری زاویه قائم و فاصله ( مورب درصورت اندازه‌گیری مستقیم و وافقی درصورت استفاده از مختصات دونقطه ) صورت میگیرد نیز تعیین ارتفاع با مشکل کرویت و انکسار نور در آتمسفرمواجه است عامل اول یعنی اثر کرویت قابل‌محاسبه است و عامل دوم درصورتی قابل‌محاسبه است که طبق‌فرضیه Biot مسیر نور قوسی از دایره را طی کند در نتیجه زاویه انکسار را در دوطرف قراولروی دوطرفه و همزمان میتوان برابردانست و با گرفتن میانگین اثر آنرا حساب نمود: دراینجا بررسی میکنیم که تا چه‌اندازه شرایط فوق درعمل فراهم است وتا چه‌حد میتوان به‌نتایج حاصله اطمینان نمود. برای یادآوری اصول تعیین ارتفاع را در ژئودزی و نقشه‌برداری متذکر میشویم :

ارتفاع یابی مثلثاتی ـ دراین‌طریقه باید زوایای ارتفاعی متقابل دونقطه‌را که تا حد امکان همزمان قرائت شده باشند مورد استفاده قرارداد. فرض کنیم z و $z'$ زوایای سمت‌الرأسی مشاهده شده درنقاط A , B باشند که ازسطح دریا بترتیب ارتفاع h , $h'$ را دارند.

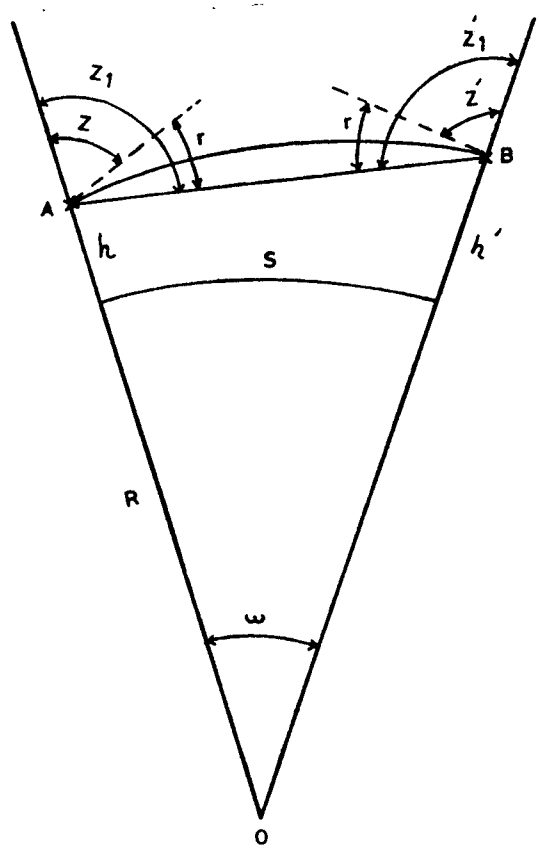
دراینجا شعاع نورانی مسیری‌را طی کرده که قوسی‌از دایره فرض‌شده است و درنتیجه زاویه‌انکسار r در دوطرف برابر گردیده‌اند.

$$z_1 = z + r$$

$$z'_1 = z' + r$$

در مثلث OAB میتوان رابطه زیر را نوشت :

$$\frac{R+h}{R+h'} = \frac{\sin z'_1}{\sin z_1}$$




ویا فرض $\Delta h = h' - h$ این رابطه بصورت زیر درمیآید :

$$\frac{\Delta h}{2R+h+h'} = \frac{\sin z'_1 - \sin z_1}{\sin z'_1 + \sin z_1} = \frac{2\sin\frac{z'_1 - z_1}{2}\cos\frac{z'_1 + z_1}{2}}{2\sin\frac{z'_1 + z_1}{2}\cos\frac{z'_1 - z_1}{2}} = \frac{tg\frac{z'_1 + z_1}{2}}{tg\frac{z'_1 + z_1}{2}}$$

وبا درنظرگرفتن اینکه $\frac{h+h'}{2} = h_m$ ( ارتفاع متوسط )

$$\frac{\frac{\Delta h}{R}}{2\left(1+\frac{h_m}{R}\right)} = \frac{tg\frac{z'_1 - z_1}{2}}{tg\frac{z'_1 + z_1}{2}}$$

ولی فرض بالا یعنی برابر گرفتن زاویه انکسار در دونقطه قراولروی موجب میشود که : $z'_1 - z_1 = z' - z$ گردد. و چون $z_1 = \pi - A$ , $z'_1 = \pi - B$

$$z_1 + z'_1 = 2\pi - (A+B)$$

با درنظر گرفتن اینکه $z_1 + z'_1 = \pi + \omega$ است نتیجه میشود :

$$(A+B) = 2\pi - (z_1 + z'_1) = \pi - \omega$$

( $\omega$ زاویه مرکزی مربوط به‌نقاط A , B است ).

ولی چون $tg\omega = \frac{S}{R}$ است. $tg\frac{z_1+z'_1}{2} = -cotg\frac{\omega}{2} = \frac{2R}{S}$

در نتیجه :

$$\boxed{\Delta h = S\left(1 + \frac{h_m}{R}\right) tg\frac{z'-z}{2}}$$

در عمل اگر $h_m$ در دست نباشد و فقط یکی ازدو ارتفاع را داشته باشیم از رابطه زیر استفاده میشود :

$$\Delta h = S\left(1 + \frac{h}{R}\right)\left(1 + \frac{\Delta h}{2R}\right) tg\frac{\Delta z}{2}$$

باین ترتیب که ابتدا از $\frac{\Delta h}{2R}$ صرفنظر نموده و $\Delta h$ تقریبی را محاسبه میکنند سپس همین مقدار را در رابطه فرارداده مجدداً $\Delta h$ را محاسبه مینمایند.

در ترازیابی‌مستقیم اختلاف ارتفاع دونقطه ازجمع‌جبری اختلاف ارتفاعهای نقاط فرعی بین‌دونقطه که شاخص روی آنها قرارگرفته پس‌ازسرشکن کردن خطاهای بست و احیاناً تصحیح Ortheometrique درصورت ترازیابی دقیق تعیین میشود.

دراین حالت خط دید به‌سطح زمین بسیار نزدیک میباشد و عدم‌تعادل حرارتی درسطح زمین در مشاهدات اثری محسوس دارد ولی بعلت کوتاهی دهانه و برابرگرفتن فاصله ترازاز شاخص‌ها و همزمان بودن تقریبی قرائت‌ها و نیزاجتناب ازمشاهدات درحالت عدم تعادل شدید حرارتی ، اثر انکسار تا حدزیادی حذف میگردد.

ازآنچه گذشت ملاحظه میشود که در هردوطریقه فوق روشهائی که به‌اتکاء آنها خطاهای ناشی‌از انکسار درجو قابل حذف میباشند براین اصل متکی هستند که تعادل حرارتی درجو حتی درقشرهای پائین آن تعادلی adiabatique میباشد درنتیجه گرادیان ارتفاعی درجه حرارت $\left(\frac{dT}{dH}\right)$ ونیز $\left(\frac{d\rho}{dH}\right)$ هردو

منفی میباشند ( $\rho$ چگالی $T$ درجه حرارت مطلق و $H$ ارتفاع فرض شده ) بعلاوه گرادیان ارتفاعی درجه - حرارت از حد معینی تجاوز نمینماید. چه دراینصورت کاهش سریع درجه حرارت با ارتفاع افزایش چگالی را بهمراه خواهد داشت یعنی $\frac{d\rho}{dH}$ مثبت میگردد و این امر موجب حرکت هوای سبک پائین بطرف بالا گردیده و تعادل را برهم خواهد زد.

درشرایط جوی مناسب و آرام تقریباً تا چند کیلومتر پائین جو را میتوان درحال تعادل آدیاباتیک دانست ولی درقشر بسیار پائین یعنی آن قسمت که در اندازه گیریهای ژئودزی و نقشه‌برداری ویا ترازیابی مورد توجه است بهیچوجه درتعادل آدیاباتیک نیست زیرا تشعشع سطح زمین که براثر آفتاب گرم شده ویا هنگام شب خنک میگردد عامل تغییر و برهم‌زدن تعادل حرارتی قشر پائین جو میباشد و موجب میگردد که گرادیان ارتفاعی درجه حرارت مقادیری بخود بگیرند که با آنچه لازمه برقراری شرط تعادل آدیاباتیک است متفاوت گردد. برای مطالعه شرط تعادل ابتدا حدقابل قبول گرادیان ارتفاعی درجه حرارت را بدست میاوریم. برای این منظور از روابط کلاسیک زیر استفاده میشود :

( دراینجا هوا را گاز کامل فرض نموده‌ایم ).

$$dP = -\rho g dH$$

$$\rho = c\frac{P}{T}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T} = \frac{\rho g dH}{P} - \frac{dT}{T} = -\frac{\rho g}{P} dH\left(1 + \frac{P}{\rho g dH} \cdot \frac{dT}{dH}\right)$$

ویا :

$$\frac{d\rho}{dH} = -\frac{\rho^2 g}{p}\left(1 + \frac{1}{\theta} \cdot \frac{dT}{dH}\right)$$

که درآن $\theta = \frac{\rho g T}{P}$ فرض شده است.

درنتیجه برای آنکه هوا درحال تعادل باشد باید $\frac{d\rho}{dH} < -\theta$ باشد یعنی $\frac{dT}{dH} > -\theta$ گردد. لذا گرادیان ارتفاعی درجه‌حرارت باید ازحد معینی $(-\theta)$ بزرگتر باشد. $\theta$ را میتوان درشرایط مختلف محاسبه نمود مثلاً درفشاری هم‌سطح دریا و درجه حرارت صفر درجه‌سانتیگراد بفرض آنکه یک‌متر مکعب هوا $\rho g = 1{,}293$ کیلوگرم وزن داشته‌باشد و $P = 1{,}033 kg/cm^2 = 10330 kg/m^2$ باشد اندازه $\theta$ برابر ۳٫۵ درجه در هرصد متر بدست میآید.

درشرایط بالا هرگاه مقدار گرادیان ارتفاعی درجه حرارت را بخواهیم از رابطه $P\rho^{-\gamma} = C^{te}$ ( $\gamma$ نسبت گرمای ویژه هوا درفشار ثابت وحجم ثابت وتقریباً برابر ۱٫۴۱ میباشد).

ویا رابطه :

$$\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

استفاده کنیم. دراین رابطه و دورابطه :

$$\frac{dP}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \qquad \text{ویا} \qquad P = cT\rho$$

و $dP = -\rho g dH$ باحذف $\frac{d\rho}{p}$ نتیجه میشود :

$$\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dP}{p}$$

$$dT = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} dp = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\rho g T}{p} dH$$

که مانند قبل $\theta = \frac{\rho g T}{p}$ میباشد.

$$\frac{dT}{dH} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\theta$$

اگر شرایط جوی را مانند حالت قبل بگیریم یعنی $\theta = ۳/۵$ درجه درصد متر و مقدار $\gamma$ را برای هوا ۱٫۴۱ فرض کنیم نتیجه میشود :

$$\frac{dT}{dH} = -1 \qquad \text{یک درجه برای هرصد متر}$$

این مقداریست که گرادیان ارتفاعی درجه‌حرارت در شرایط جوی فرض شده باید دارا باشد تا تعادل حرارتی برقرار بوده و اختلافی درمشاهدات و محاسبات ارتفاع یابی ایجاد نکند. متأسفانه شرایط فوق براثر تشعشع سطح زمین بخصوص درهنگام تابش برقرار نبوده وگرادیان ارتفاعی درجه‌حرارت ازحد لازم تجاوز مینماید درنتیجه اغلب $\frac{d\rho}{dH}$ مثبت گردیده یعنی چگالی با ارتفاع افزایش مییابد. هوا دراینحالت از تعادل‌خارج گردیده و از پائین به‌بالا حرکت میکند و در دوربین مشاهده میشود که تصویر دارای لرزش و موج میباشد و این لرزش با مقایسه باتارهای رتیکول بسیار محسوس است . در نتیجه شرایطی که براساس آن روابط ارتفاع یابی مثلثاتی تنظیم‌شده‌ویاترازیابی باید انجام‌پذیرد هرگزفراهم‌نبوده و اگرهم‌فراهم‌شددرطول‌مشاهدات پایدار نمیماند ازاینجاست که خطاهای غیرقابل پیش‌بینی و غیرسیستماتیک درتعیین ارتفاعات وارد گردیده و اندازه‌گیریها را دچار عدم‌دقت لازم مینماید.

بنظر میرسد اگر از دوطول موج مختلف برای مشاهدات استفاده گردد بطریقه دیفرانسیل میتوان اثر انکسار را حذف نمود برای این منظور باید از دو چشمه نورانی یکرنگ monochromatique استفاده

نمود. بدیهی است بعلت تغییر طول موج اثر انکسار نیز تغییر خواهد نمود. اگر $dz_1$ زاویه انکسار مربوط به‌طول موج $\lambda_1$ باشد و $dz_2$ زاویه انکسار مربوط به $\lambda_2$ $(dz_1 \neq dz_2)$ میتوان نوشت:

$$\frac{dz_1 - dz_2}{dz_1} = k \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}$$

که $k$ ضریبی است ثابت که بستگی به‌مقادیر $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ دارد.

و اگر طرف دوم را جمعاً مقدار ثابت $C$ فرض کنیم :

$$dz_1 = \frac{(dz_1 - dz_2)}{C} = \frac{Z_1 - Z_2}{C}$$

که $Z_1$ ، $Z_2$ زوایای سمت‌الرأسی قرائت شده برای دوطول موج $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ میباشند.

مثلاً اگر فرض کنیم از دونور قرمز وبنفش استفاده شده باشد ( $\lambda_1 \approx$ ۰٫۶۴ $\mu$ و $\lambda_2 \approx$ ۰٫۴۸ $\mu$ ) باشد و قرائت‌های $Z_1$ ، $Z_2$ برابر باشد با :

$Z_1$ $85^G$ 26 28

$Z_2$ 85 26 25 ( بفرض $C = \frac{1}{25}$ )

$$dz_1 - dz_2 = 3''$$

$$dz_1 = (Z_1 - Z_2) \times \frac{1}{C} = 3'' \times 25 = 75''$$

و زاویه تحیح شده برابر خواهد بود با :

$Z = 85^G$ 27 03

این روش در تعیین کمیت‌های دیگری که‌انکسار در جو درآن اختلالاتی‌ایجاد میکند مانند تعیین فاصله وموقعیت نقاط ژئودزی به کمک اقمار مصنوعی با اثر دوپلر ( Doppler ) تا کنون بکار رفته ونتایج مفیدی‌داشته است بنظرمیرسد اگر مشکلاتی نظیر عدم دقت کافی‌دستگاه اندازه‌گیری برای تشخیص دوزاویه قائم مختلف برای دوطول موج متفاوت ویا عملی نبودن اندازه‌گیری در روز و غیره مانع نگردد باین‌ترتیب میتوان ارتفاع یابی مثلثاتی را درمورد اتصالات طویل جانشین ترازیابی مستقیم نمود.

## Bibl ographie


1 - P. Tardi - G. Laclavère , Traité de Géodesie , T. 1 Fas. 1 Gautier - Villar Paris 1951

2 - P. V. Angus - Leppan, A Study of Refraction in the Lower Atmospher . Empire Survey Review No. 120 P. 69. 1961.

3 - P. V. Angus - Leppan , Empire Survey Review No. 121 p. 107 1961

4 - Nivellement de précision, J. Vgnal , Publication Théchnique de l' I. G. N Paris 1955.

5 - A. E. Decae, Precision Survey of the 28Be V Synchrotron in the European Organisation for Nuclear Reseach , Empire Survey Review No. 121 - 122 p. 98 1961.