شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت در مکان هندسی ریشه‌ها

دکتر علی محمدزاده عیدگاهی

دانشگاه تهران ـ دانشکده فنی ـ گروه مهندسی برق و کامپیوتر

مهندس محمد قوام‌زاده

دانشگاه تهران ـ دانشکده فنی ـ گروه مهندسی برق و کامپیوتر

چکیده

در این مقاله روش رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمهای فیدبک مثبتی که در آنها درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه با هم برابر ند، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. این مقاله نشان می‌دهد قواعد ارائه شده برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها که از دههٔ ۱۹۵۰ تاکنون مورد استفاده می‌باشند جامعیت ندارند و برای سیستمهای فیدبک مثبت دارای تابع تبدیل حلقهٔ معمول صادق نمی‌باشند و باید برخی از این قواعد دوباره تعریف شوند.

در این مقاله تعاریف جدیدی برای شاخه‌های موجود در مکان هندسی ریشه‌ها ارائه شده است و با تقسیم کردن شاخه‌ها به دو دستهٔ شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت و شاخه‌های رونده/ بازگردنده به / از بی‌نهایت، قواعد ارائه شده در منابع مختلف کنترل طوری اصلاح شده‌اند که در برگیرندهٔ این گروه خاص از سیستمها نیز باشند.

در پایان، سیستمهای مطروحه در این مقاله از دیدگاه تئوری‌های تحقق و پایداری مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۱ـ مقدمه

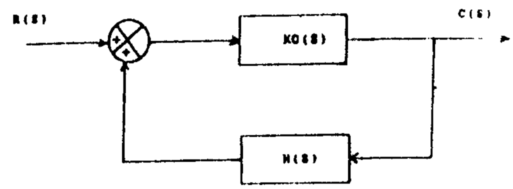
روش مکان هندسی ریشه‌ها یا RL یکی از روشهای متداول برای بررسی سیستمهای کنترل در حوزهٔ فرکانس است. در این روش مکان هندسی قطبهای یک سیستم حلقه بسته دارای یک پارامتر متغیر حقیقی با استفاده از تابع تبدیل حلقهٔ سیستم ترسیم می‌شود [7] - [1].

چون پارامتر متغیر در معادلهٔ مشخصهٔ سیستم ظاهر می‌شود، بازای تغییرات پیوستهٔ آن بی‌شمار معادلهٔ مشخصه و در نتیجه بی‌شمار مجموعه از قطبها برای سیستم حاصل می‌گردد. این قطبها در داخل صفحهٔ اعداد مختلط منحنی یا منحنیهای پیوسته‌ای را بوجود می‌آورند که هدف نهایی RL ارائه روش رسم این منحنی یا منحنی‌ها می‌باشد.

از قواعد ارائه شده توسط منابع کنترل کلاسیک [7] -[1] جهت رسم RL نتیجه می‌شود اگر تعداد قطبهای تابع تبدیل حلقهٔ یک سیستم فیدبک مثبت n و تعداد صفرهای آن m باشد، همواره به تعداد $|n-m|$ صفر یا قطب در بی‌نهایت بوده و تعداد شاخه‌های مکان $Max(m,n)$ می‌باشد. در نتیجه تعداد خطوط مجانب مکان $|n-m|$ است. لذا زمانی که درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل حلقهٔ یک سیستم با هم برابر باشند $(m=n)$یعنی تابع تبدیل حلقهٔ سیستم یک تابع معمول باشد هیچ شاخهٔ بی‌نهایتی در مکان موجود نبوده و در نتیجه

مجانبی نیز برای مکان تعریف نمی‌شود. این مطلب در مورد سیستمهای فیدبک منفی که در آنها تابع تبدیل حلقه یک تابع معمول است کاملاً صادق می‌باشد. اما در این مقاله نشان می‌دهیم سیستمهای فیدبک مثبتی که تابع حلقهٔ آنها یک تابع معمول است از این مطلب تبعیت نمی‌کنند.

بلوک دیاگرام یک سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت و یک پارامتر متغیر حقیقی بنام K در شکل (۱) به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱: بلوک دیاگرام یک سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت

تابع تبدیل حلقه بستهٔ این سیستم بصورت زیر می‌باشد:

$$T(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{KG(S)}{۱-KG(S)H(S)} \qquad (۱)$$

و معادلهٔ مشخصهٔ این سیستم برابر است با:

$$\Delta(S)=۱-KG(S)H(S)=۰ \qquad (۲)$$

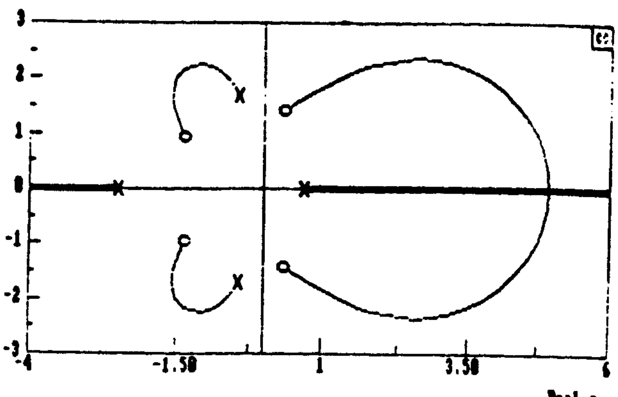
تابع تبدیل حلقه از حاصلضرب توابع G(s) و H(s) بدست می‌آید. زمانیکه حاصل جمع صفرهای G(s) و H(s) مساوی حاصل جمع قطبهای G(s) و H(s) شود، تابع تبدیل حلقه تابعی معمول خواهد بود. بطور مثال چنانچه H(s) (تابع تبدیل پسخور) یک سرعت‌سنج باشد فقط دارای یک صفر خواهد بود و اگر G(s) (تابع تبدیل مسیر پیشرو) یک سیستم درجهٔ دو با یک صفر باشد تابع تبدیل حلقهٔ سیستم G(s) H(s) تابعی معمول خواهد بود.

برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها بوسیلهٔ کامپیوتر، مقدار K را در معادلهٔ مشخصه بروشهای مختلف [9]-[8] تغییر می‌دهند و سپس ریشه‌های معادلهٔ مشخصه را در صفحهٔ اعداد مختلط رسم می‌نمایند از مجموعهٔ این نقاط نمودار مکان هندسی ریشه‌ها بدست می‌آید. امروزه نرم‌افزارهای تجاری متعددی چون MATLAB[10]، MATRIXX[11] و Program CC[12] و نرم‌افزارهای آموزشی و غیرتجاری فراوانی چون MODCON[13] و غیره [15]-[14] توسعه داده شده و در دسترس می‌باشند که یکی از امکانات آنها رسم مکان هندسی ریشه‌ها می‌باشد. در این مقاله از نرم‌افزار Program CC برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها استفاده شده است.

جهت روشن شدن بحث چند سیستم فیدبک مثبت ارائه می‌شوند که در آنها تابع تبدیل حلقهٔ سیستم یک تابع معمول بوده اما مکان آنها دارای یک یا چند شاخه در بی‌نهایت است.

مثال ۱: تابع تبدیل حلقهٔ سیستمی بصورت زیر می‌باشد.

$$G(S)H(S)=\frac{۲S^۴+۴S^۳+۶S^۲+۸S+۱۲}{۳S^۴+۸S^۳+۹S^۲+۱۲S-۱۶}$$



شکل ۲: نمودار مکان هندسی ریشه‌های مثال ۱

شکل ۲ نمودار مکان هندسی این سیستم را نشان می‌دهد.

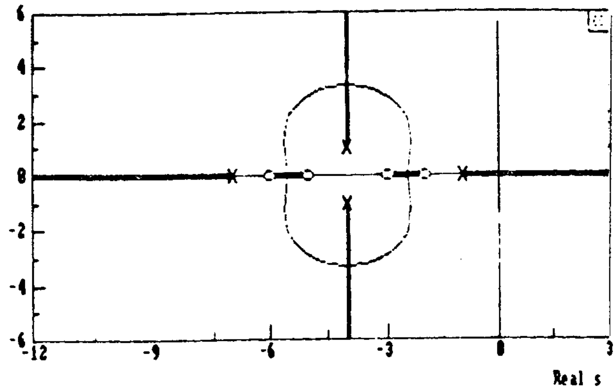
همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود علیرغم مساوی بودن درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه یک شاخه مکان هندسی این سیستم در بی‌نهایت می‌باشد.

مثال ۲: تابع تبدیل حلقهٔ سیستمی بصورت زیر می‌باشد.

$$G(S)H(S)=\frac{S^۴+۱۶S^۳+۹۱S^۲+۲۱۶S+۱۸۰}{S^۴+۱۶S^۳+۸۸S^۲+۱۹۲S-۱۱۹}$$

شکل ۳ نمودار مکان هندسی این سیستم را نشان می‌دهد. با

این که درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه این سیستم مساوی می‌باشند، دو شاخه از مکان هندسی در بی‌نهایت واقع است.

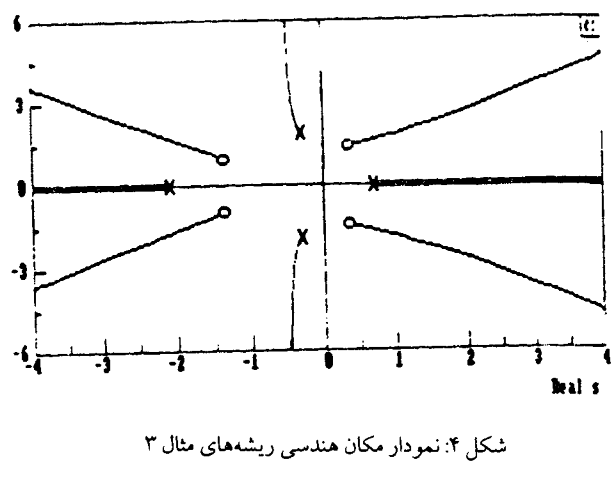


شکل ۳: نمودار مکان هندسی ریشه‌های مثال ۲

مثال ۳: تابع تبدیل حلقهٔ سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$G(S)H(S) = \frac{2S^4 + 4S^3 + 6S^2 + 8S + 12}{3S^4 + 6S^3 + 9S^2 + 2S - 16}$$

در شکل ۴ نمودار مکان هندسی این سیستم نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، این سیستم دارای سه شاخه موجود در بی‌نهایت می‌باشد.

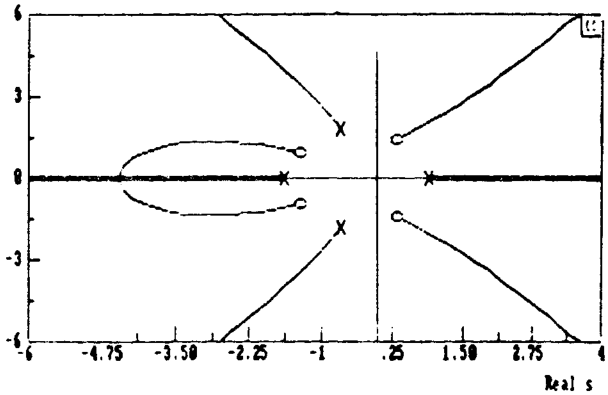


شکل ۴: نمودار مکان هندسی ریشه‌های مثال ۳

مثال ۴: تابع تبدیل حلقهٔ سیستمی بصورت زیر می‌باشد.

$$G(S)H(S) = \frac{2S^4 + 4S^3 + 6S^2 + 8S + 12}{3S^4 + 6S^3 + 9S^2 + 12S - 16}$$

شکل ۵ نمودار مکان هندسی این سیستم را نشان می‌دهد. درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه این سیستم مساوی است اما چهار شاخه مکان هندسی این سیستم در بی‌نهایت می‌باشند.



شکل ۵: نمودار مکان هندسی ریشه‌های مثال ۴

با دقت در مثالهای فوق مشخص می‌شود که قواعد RL نیاز به تصحیح دارند. جهت تصحیح این قواعد شاخه‌های موجود در مکان هندسی، به دو گروه شاخه‌های رونده/ بازگرداننده به/ از بی‌نهایت و شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت تقسیم می‌شوند. در ادامه مقاله به تعریف این شاخه‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱: شاخه رونده / بازگردنده به/ از بی‌نهایت شاخه‌ای است که به بی‌نهایت ختم یا از آنجا شروع می‌شود. در این حالت شاخه یا از قطبی متناهی شروع و به صفری در بی‌نهایت ختم می‌شود یا از قطبی در بی‌نهایت شروع و به صفری متناهی ختم می‌شود. در این گونه شاخه‌ها مقدار K در بی‌نهایت برابر بی‌نهایت یا صفر است.

تعریف ۲: شاخه گذرنده از بی‌نهایت شاخه‌ای است که ابتدا و انتهای آن نقاط متناهی بوده اما از بی‌نهایت نیز عبور می‌نماید. در این حالت شاخه از یک نقطهٔ متناهی شروع می‌شود و به بی‌نهایت می‌رود سپس از بی‌نهایت به سمت یک نقطهٔ متناهی دیگر بازمی‌گردد. در این گونه شاخه‌ها مقدار K در بی‌نهایت عددی متناهی است.

شاخهٔ رونده / بازگردنده به / از بی‌نهایت همان شاخه‌ایست که در منابع مختلف کنترل [7] -[1] از آن استفاده شده است. حال آنکه شاخه‌های موجود در بی‌نهایت سیستمهای فیدبک مثبت که درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل حلقهٔ آنها مساوی است، از نوع شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت می‌باشند. این گونه شاخه‌ها تاکنون در هیچیک از کتب و مقالات مورد مطالعه و بررسی قرار نگرفته‌اند.

۲ـ بررسی خواص یک سیستم فیدبک مثبت با تابع تبدیل حلقهٔ معمول

تابع تبدیل معمول زیر را در نظر بگیرید:

$$G(S)H(S) = \frac{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0}{b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \cdots + b_1 S + b_0} \qquad (۳)$$

چنانچه تابع فوق مشخص‌کنندهٔ تابع تبدیل حلقهٔ یک سیستم فیدبک مثبت باشد، نمودار مکان هندسی این سیستم دارای خواصی است که توسط قضایای زیر بیان می‌شوند.

قضیهٔ ۱: "وضعیت مکان هندسی برروی محوراعداد حقیقی":

در این گونه سیستمها سمت راست راست‌ترین صفر یا قطب و سمت چپ چپ‌ترین صفر یا قطب روی محور اعداد حقیقی همیشه عضو مکان هندسی ریشه‌هاست.

اثبات: بر طبق خاصیت ارائه شده در منابع [7] -[1]، نقاطی از محور حقیقی عضو مکان هندسی ریشه‌های سیستمهای فیدبک مثبت هستند که در سمت راست آنها مجموع قطبها و صفرهای تابع تبدیل حلقه زوج باشند. در سیستمهای فیدبک مثبت که در آنها درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه برابر است، تعداد کل قطبها و صفرها 2n و در نتیجه عددی زوج است، پس سمت راست راست‌ترین صفر یا قطب و سمت چپ چپ‌ترین صفر یا قطب از محور اعداد حقیقی همیشه عضو مکان هندسی ریشه‌هاست.

«در نتیجه همواره حداقل یک شاخهٔ گذرنده از بی‌نهایت در مکان هندسی اینگونه سیستمها موجود می‌باشد».

قضیهٔ ۲: "بهرهٔ سیستم بازای قطبهای موجود در بی‌نهایت":

بهرهٔ اینگونه سیستمها بازای قطبهای موجود در بی‌نهایت به سمت یک عدد ثابت و متناهی میل می‌کند.

«در نتیجه شاخه‌های نامتناهی موجود در مکان هندسی اینگونه سیستمها از نوع شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت می‌باشند.»

اثبات: از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که:

$$K = \frac{1}{G(S)H(S)} \qquad (۴)$$

هنگامیکه قطب سیستم به سمت بی‌نهایت میل کند رابطه (۴) بشکل زیر در می‌آید.

$$\lim_{S\to\infty} K = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{G(S)H(S)} = \lim_{S\to\infty} \frac{b_n S^n + b_{n-1} S^{n-1} + \cdots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0} \qquad (۵)$$

مقدار بهره (K) برای قطبهای موجود در بی‌نهایت را بهرهٔ بحرانی (K_c) می‌نامیم ومقدارآن بر طبق رابطهٔ (۵)برابراست با:

$$K_c = \frac{b_n}{a_n} \qquad (۶)$$

این اثبات به خوبی نشان می‌دهد شاخه‌های موجود در بی‌نهایت این گونه سیستمها، از نوع شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت می‌باشند. از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که «یک سیستم فیدبک مثبت که در آن درجهٔ صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه با هم برابرند دارای شاخهٔ گذرنده از بی‌نهایت می‌باشد».

این نکته باید مورد توجه قرار گیرد که برای سیستمهای فیدبک منفی که تابع تبدیل حلقهٔ آنها تابعی معمول است، بازای تمام مقادیر K قطبهای سیستم متناهی خواهند بود و مکان هندسی آنها هیچ قطبی در بی‌نهایت نخواهد داشت. در صورتیکه سیستمهای فیدبک مثبت با تابع تبدیل حلقهٔ

معمول بازای بهرهٔ بحرانی تقلیل درجه در معادلهٔ مشخصه دارند که این تقلیل درجه سبب پیدایش قطب یا قطبهای نامتناهی در مکان هندسی سیستم می‌شود.

۳ـ تحقق‌پذیری سیستمهای فیدبک مثبت واحد با تابع تبدیل حلقهٔ معمول

تابع تبدیل حلقه بستهٔ این سیستم بر طبق رابطهٔ (۱) و با قرار دادن H(s)=1 به شکل زیر نوشته میشود:

$$T(S)=\frac{KG(S)}{1-KG(S)} \tag{۷}$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۳) رابطه (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$T(S)=\frac{K\left(\frac{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0}{b_nS^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0}\right)}{1-K\left(\frac{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0}{b_nS^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_1S+b_0}\right)} \tag{۸}$$

با ساده کردن عبارت (۸) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$T(S)=\frac{Ka_nS^n+Ka_{n-1}S^{n-1}+\cdots+Ka_1S+Ka_0}{(b_n-Ka_n)S^n+(b_{n-1}-Ka_{n-1})S^{n-1}+\cdots+(b_1-Ka_1)S+(b_0-Ka_0)} \tag{۹}$$

تابع T(s) توصیف شده توسط رابطه (۹) یک تابع معمول است زیرا عبارت:

$$\lim_{S\to\infty}T(S)=\frac{Ka_n}{b_n-Ka_n} \tag{۱۰}$$

عددی ثابت است. پس می‌توان برای T(s) تحققی به صورت معادلات دینامیکی فضای حالت پیداکرد. اما هنگامی که بهره سیستم (K) به سمت مقدار بحرانی خود میل کند، با توجه به رابطه (۶) تساوی (۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$T_c(S)=\frac{a_nb_nS^n+a_{n-1}b_nS^{n-1}+\cdots+a_1b_1S+a_0b_n}{(a_nb_{n-1}-b_na_{n-1})S^{n-1}+\cdots+(a_nb_1-b_na_1)S+(a_nb_0-b_na_0)} \tag{۱۱}$$

در این حالت تابع $T_c(s)$ یک تابع غیر معمول است. زیرا $\lim_{s\to\infty}T_c(s)=\infty$ می‌باشد.

بدین ترتیب نمی‌توان تحققی به صورت معادلات دینامیکی حالت برای T(S) بازای K_c پیداکرد.

۴ـ پایداری سیستمهای فیدبک مثبت با تابع تبدیل حلقه معمول

در این بخش به ارائه یک قضیه در مورد وضعیت پایداری سیستمهای ارائه شده در این مقاله بازای بهره بحرانی می‌پردازیم.

قضیه ۳: سیستم دارای بلوک دیاگرام شکل (۱) که تابع تبدیل حلقه آن توسط رابطه (۳) بیان می‌شود بازای بهره بحرانی (K_c) قطعاً ناپایدار است.

اثبات: چون سمت راست راست‌ترین قطب یا صفر روی محور اعداد حقیقی عضو RL فیدبک مثبت است پس نقطه بی‌نهایت روی محور اعداد حقیقی، در سمت راست محور موهومی عضو مکان هندسی اینگونه سیستمها می‌باشد. چون نقاط موجود در بی‌نهایت مکان هندسی ریشه‌ها تنها بازای بهره بحرانی حاصل می‌شوند پس این قطب موجود در بی‌نهایت روی محور اعداد حقیقی در سمت راست محور موهومی، متناظر با بهره بحرانی می‌باشد و در نتیجه بازای این بهره حداقل یک قطب سیستم در سمت راست محور موهومی واقع می‌شود. با توجه به مطلب فوق و قضایای موجود برای پایداری می‌توان نتیجه گرفت که این گونه سیستمها بازای بهره بحرانی قطعاً ناپایدارند. این مطلب در شرایطی نتیجه گرفته می‌شود که اگر بطور مستقیم معادله مشخصه سیستم بازای بهره بحرانی را محاسبه نمائیم. ممکن است تمام قطبهای این معادله که می‌تواند حداکثر از درجه (n -۱) باشد در سمت چپ محور موهومی واقع شوند و به ظاهر این احساس پدید آیدکه این سیستم بازای بهره بحرانی پایدار است. اما همان یک درجه افت معادله مشخصه به ازای بهره بحرانی که بواسطه قطب موجود در بی‌نهایت مثبت روی محور اعداد حقیقی حاصل شده است سبب ناپایداری سیستم بازای بهره بحرانی می‌شود.

۵ـ نتیجه گیری

در این مقاله نشان دادیم که خواص و روشهای رسم مکان هندسی ریشه‌ها که در چند دههٔ گذشته در منابع مختلف کنترل به آنها اشاره شده است برای گونه‌ای خاص از سیستمهای فیدبک مثبت صادق نیستند. در طی مقاله این گونهٔ خاص از سیستمها معرفی شدند و با ارائه چند مثال مشخص شد که شاخه‌های موجود در بی‌نهایت این گونه سیستمها از نوع شاخه‌های رونده/بازگردنده به/از بی‌نهایت تعریف شده در مراجع مختلف نیستند و برای این گونه از سیستمها نیازمند به شاخه‌های جدیدی از نوع شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت می‌باشیم که این نوع از شاخه‌ها در هیچیک از کتب و مقالات مورد بررسی واقع نشده‌اند.

این گونهٔ خاص از سیستمها از دیدگاه تئوری تحقق و تئوری پایداری مورد مطالعه قرار گرفتند و نشان داده شد که در حالت کلی تحقق‌پذیرند، اما بازای بهرهٔ بحرانی تحقق‌پذیری خود را از دست می‌دهند. در بحث پایداری نیز ثابت شد که این گونه سیستمها بازای بهرهٔ بحرانی همیشه ناپایدار خواهند بود.

نکتهٔ مهمی که باید در تهیهٔ نرم‌افزار برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها مد نظر قرار گیرد این است که مقدار K باید چنان انتخاب شود که هیچگاه مساوی بهرهٔ بحرانی نشود. اگر در تغییرات K، مقدار آن برابر بهرهٔ بحرانی شود کامپیوتر دیگر قادر به ادامهٔ محاسبات نخواهد بود و اعلام خطا می‌نماید. برای رفع این مشکل، نرم افزار باید قابلیت امتحان مقادیر K را داشته باشد تا زمانیکه تابع تبدیل حلقهٔ سیستم یک تابع معمول است، مقدار K را برابر بهرهٔ بحرانی انتخاب ننماید.

فهرست منابع

1- W.R. Evans, "Graphical analysis of control systems," Trans. AIEE, vol. 67, pp. 547-551, 1948.

2- W.R. Evans, "Control system synthesis by root locus method," Trans. AIEE, vol. 69, pp. 14, 1950.

3- S. Williamson, "Design data to assist the ploting of root loci," Control, vol. 12, no. 119, pp. 404-407.

4- C.S. Chang," An analytical method for obtaining the root locus with positive and negative gain," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-10, pp. 92-94, Jan. 1965.

5- B.C. Kuo,Automatic Control Systems.Englewood Cliffs, N.J. :Prentice - Hall, 1991.

6- K. Ogata, Modern Control Engineering. Englewood Cliffs, N.J. :Prentice-Hall, 1990.

7- J.J. D'Azzo and C.H. Houpis, Linear Control System Analysis and Design. NY :McGraw-Hill, 1981.

8- Z. Klagsbrunn and Y. Wallach, "On computer implementation of analytic root locus plotting," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, pp. 744-745, Dec. 1968.

9- R.H. Ash and G.R. Ash, "Numerical computation of root loci using the Newton-Raphson technique," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, pp. 576-582, Oct. 1968.

10- K. Ogata, Designing Linear Control Systems with MATLAB. Englewood, N.J. :Prentice-Hall, 1994.

11- B. Shahian and M. Hassul, Control System Design Using MATRIXX.Engle wood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1992.

12- P.M. Thompson and S.A. Wolfe, User's Guide to Program CC. CA, California Institute of Technology, 1983.

13- M.S. Wahid and A.M. Eydgahi, "A Character based CAD software for control systems modeling," Proceedings of First Internatioal Conference on Computer Applications in Science, Technology and Medicine in Iran, Isfahan, pp. 68-71, 1991.

14- M. Jamshidi and C.J. Herget, Computer Aided Control Systems Engineering. Amesterdam, North Holland, 1985.

15- M. Jamshidi and C.J. Herget, Advances in Computer Aided Control Systems Engineering. Amesterdam, North Holland, 1993.