

آنتن صفحه‌ای مناطق فرنل به عنوان یک عنصر متمرکزکننده امواج الکترومغناطیس

دکتر فرخ آرزم

دانشیار گروه مهندسی برق و کامپیوتر- دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مهندس علیرضا شوشتری

دانشجوی دکتری گروه مهندسی برق و کامپیوتر- دانشکده فنی - دانشگاه تهران

چکیده

در این مقاله مفاهیم اصلی آنتنهای صفحه‌ای فرنل مانند تابع تصحیح فاز، بازدهی و بهره^(۱) (گین) به صورت دقیق با روشی متفاوت بررسی شده است. سپس با بکار بردن جریانهای معادل مغناطیسی و اصل هم‌ارزی یک بیان برای میدان ناشی از یک موج صفحه‌ای تابیده شده بر آنتن، در نقطه کانونی بدست آمده است. این بیان برای بدست آوردن بازدهی و میدان روی محور آنتن و بهره بکار رفته است و نتایج این تحلیل با نتایج تجربی مقایسه شده است.

مقدمه

در سالهای اخیر آنتن صفحه‌ای فرنل به عنوان یک رقیب برای آنتن منعکس‌کننده سهموی مطرح شده است. مهمترین سودمندی آن ارزانی است و ضعف آن، بهره کم نسبت به آنتنهای سهموی می‌باشد. در ابتدا نوع عدسی آن در

فرکانسهای نوری مورد توجه بوده است. ظاهراً اولین توجه به این آنتن در فرکانسهای مایکروویو از سالهای ۱۹۶۰ آغاز شده است [۱،۲،۳]. و به علت رشد سریع ماهواره‌های پر قدرت محلی استفاده از آنها به سرعت رواج پیدا خواهد کرد. با وجود این قدمت، کارهای تحلیلی اندکی بر روی این آنتنها انجام شده است. مرجع [۴] یک جمع‌بندی از این کارها را گردآوری کرده است. مرجع [۵] با استفاده از انتگرال برداری

کیرشهف یک آنتن صفحه فرنل با حلقه‌های جذب‌کننده و عبوردهنده بدون لایه دی‌الکتریک را بررسی کرده است. یک بررسی روی تصحیح فاز و بازدهی با استفاده از انتگرال اسکالر کیرشهف در مرجع [۶] صورت گرفته است. این مقاله با روشی متفاوت آنتن فرنل را در حالت گیرندگی بررسی می‌کند، با استفاده دقیق از جریانهای معادل مغناطیسی می‌توان میدان روی محور آنتن و از آنجا بهره آنتن در جهت محوری و بازدهی آن را بدست آورد. نتایج تجربی ساخت یک آنتن فرنل با این روش مقایسه شده است. طراحی بر اساس تمرکز میدانهای ناشی از این جریانهای معادل مغناطیسی در کانون می‌باشد.

در سالهای اخیر آنتن صفحه‌ای فرنل به عنوان یک رقیب برای آنتن منعکس‌کننده سهموی مطرح شده است. مهمترین سودمندی آن ارزانی است و ضعف آن، بهره کم نسبت به آنتنهای سهموی می‌باشد. در ابتدا نوع عدسی آن در فرکانسهای نوری مورد توجه بوده است. ظاهراً اولین توجه به این آنتن در فرکانسهای مایکروویو از سالهای ۱۹۶۰ آغاز شده است [۱،۲،۳]. و به علت رشد سریع ماهواره‌های پر قدرت محلی استفاده از آنها به سرعت رواج پیدا خواهد کرد. با وجود این قدمت، کارهای تحلیلی اندکی بر روی این آنتنها انجام شده است. مرجع [۴] یک جمع‌بندی از این کارها را گردآوری کرده است. مرجع [۵] با استفاده از انتگرال برداری

تحلیل آنتن در حالت گیرندگی

شکل (۱)، یک آنتن فرنل صفحه‌ای را نشان می‌دهد که از یک صفحه رسانای کامل زمین و یک لایه دی‌الکتریک (زمینه) به ضخامت d و ثابت دی‌الکتریک نسبی ϵ_r تشکیل شده که در روی آن حلقه‌های فلزی به شعاعهای b_n قرار دارند. ضخامت این حلقه‌ها خیلی ناچیز فرض می‌شوند. فرض کنید که یک موج صفحه‌ای با پلاریزاسیون خطی در جهت $-\hat{x}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، بر روی این آنتن بتابد (جهت تابش جهت $-\hat{z}$ است):

$$\vec{E}_i = -\hat{x}E_0 \text{Exp}(jk_0z) \quad (\text{الف-۱})$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (\text{ب-۱})$$

بطوریکه ضریب انعکاس Γ را می‌توان با استفاده از انعکاس موج صفحه‌ای در روی سطح دی‌الکتریک بدست آورد.

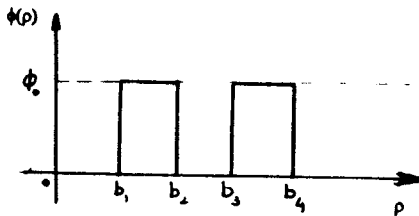
$$\Gamma = \frac{Z_L - \eta_0}{Z_L + \eta_0} \quad (\text{الف-۳})$$

$$Z_L = j \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \tan(k_0\sqrt{\epsilon_r}d) \quad (\text{ب-۳})$$

در فرکانس طراحی داریم $2k_0\sqrt{\epsilon_r}d = \pi = \phi_0$ و در نتیجه $\Gamma = 1$ می‌شود. در این فرکانس طراحی میدان \vec{E}_a ، میدان روی صفحه $z=0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{E}_a = E_0 \cdot \text{Exp}(j\Phi(\rho))\hat{x} \quad (\text{۴})$$

$\Phi(\rho)$ را تابع تصحیح فاز می‌نامیم که برای این آنتن به صورت منحنی شکل (۲) است:

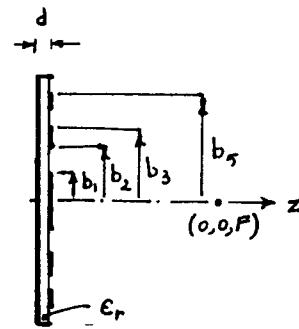


شکل ۲- تابع تصحیح فاز برای آنتن صفحه‌ای فرنل

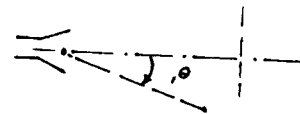
اگر چه برای این آنتن، تابع تصحیح فاز تنها دو مقدار را میتواند اختیار کند ولی در ساختارهای دیگر با تغییر دادن ضخامت لایه دی‌الکتریک در حلقه‌های متفاوت می‌توان توابع تصحیح فاز چند مقداری نیز بوجود آورد.

با استفاده از اصل هم‌ارزی جریانهای مغناطیسی معادل یعنی با داشتن میدان \vec{E}_a ، می‌توان میدان الکترومغناطیس ناشی از این روزنه را در هر نقطه از فضا بدست آورد. در اینجا ما می‌خواهیم نقطه‌ای از محور آنتن را بدست آوریم که شدت میدان الکتریکی ماکزیمم باشد و این نقطه در واقع مکانی است که باید تغذیه را آنجا قرار داد.

میدان الکتریکی در نقطه r (نقطه تحت بررسی) ناشی از این روزنه از معادلات زیر بدست می‌آید: [۷]



شکل ۱- شمای یک آنتن فرنل صفحه‌ای

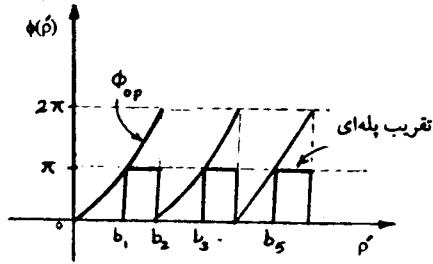


شکل ۱-ب: تغذیه و زاویه آن

این میدان در برخورد با حلقه‌های فلزی منعکس می‌شود ولی از لایه‌های دی‌الکتریک می‌گذرد و بعد از برخورد با رسانای زمین منعکس می‌شود نهایتاً در روی صفحه $z = 0$ میدانهای بازگشتی نهایی به صورت زیر هستند:

$$\vec{E}_a|_{z=0} = \left\{ \begin{array}{l} E_0\hat{x} \text{ روی حلقه‌های فلزی} \\ -\Gamma E_0\hat{x} \text{ روی لایه دی‌الکتریک} \end{array} \right\} \quad (\text{الف-۲})$$

$\phi_{op} = k_0 R$ مطابق شکل (۳)، بدست می‌آید.



شکل ۳- تابع تصحیح بهینه برای ماکزیم کردن تمرکز امواج در نقطه $(0,0,F)$ و تقریب بوسیله توابع پله‌ای از آن

دقت شود که اضافه شدن یا کم شدن فاز 2π نقشی در محاسبات ندارد. تقریب زدن این تابع بر حسب توابع پله‌ای دو مقداری در شکل (۳) نشان داده شده است. می‌توان به کمک این آنتن به شکل تقریب پله‌ای رسید برای رسیدن به این هدف باید شعاعهای حلقه‌ها b_n و دامنه تابع تصحیح فاز ϕ_0 در روابط زیر صدق کنند:

$$\phi_0 = \pi = 2dk_0\sqrt{\epsilon_r} \quad (11)$$

$$k_0\sqrt{b_n^2 + F_0^2} = n\pi + k_0F_0 \quad (12)$$

دقت شود که فاز $k_0 F$ یک فاز ثابت است که به تقریب پله‌ای شکل (۳) اضافه می‌شود. روابط (۱۱) و (۱۲) اساس طراحی این آنتنها می‌باشد و از این معادلات خواهیم داشت:

$$d = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} \quad (13)$$

$$b_n = \sqrt{n\lambda_0(F_0 + \frac{n\lambda_0}{4})} \quad (14)$$

بازدهی روزنه

اگر میدان E_x را به ازای تابع تصحیح فاز بهینه، E_{x-opt} و میدان E_x را برای هر تابع تصحیح فاز پله‌ای دو یا چند مقداری، E_{x-step} بنامیم بازدهی روزنه از رابطه (۱۵) تعریف می‌شود:

$$\eta_p = \left| \frac{E_{xstep}}{E_{xopt}} \right|^2 \quad (15)$$

$$\bar{A}_m(r) = \int_{S_a} \int \bar{J}_m(x,y) \frac{\text{Exp}(-jk_0R)}{(4\pi R)} ds \quad (5)$$

$$\bar{J}_m = -2\hat{Z} \times E_a(r) \quad (6)$$

$$\bar{E} = -\nabla \times \bar{A}_m \quad (7)$$

در این معادله R فاصله نسبی بین نقطه تحت بررسی و نقطه منبع (نقطه‌ای از صفحه روزنه $z=0$) می‌باشد. \bar{J}_m جریان مغناطیسی معادل روی روزنه می‌باشد. S_a سطح روزنه آنتن فرنل می‌باشد. فرض می‌کنیم که آنتن دایره‌ای شکل به شعاع ρ_a می‌باشد. با کمی محاسبات تحلیلی و استفاده از معادله (۴) و توجه به اینکه تابع تصحیح تنها به ρ بستگی دارد، می‌توان با استفاده از معادلات (۲) و (۳) در فرکانسی به غیر از فرکانس طراحی، میدان را در نقطه $(0,0,F)$ ، نقطه‌ای روی محور آنتن بدست آورد:

$$E_x(0,0,F) = jk_0 \int_0^{\rho_a} E_a(\rho) \frac{\text{Exp}(-jk_0R)}{R^2} \left(1 + \frac{1}{jk_0R}\right) F \rho d\rho \quad (8-f)$$

با قرار دادن $|E|$ از رابطه (۴) در رابطه (۸-f) در

فرکانس طراحی خواهیم داشت:

$$I_x = \frac{E_x(0,0,F)}{E_0} = \int_0^{\rho_a} [\text{Exp}(j\phi(\rho)) \cdot \text{Exp}(-jk_0R)/R^2]$$

$$\left(1 + \frac{1}{jk_0R}\right) F \rho d\rho \quad (8-b)$$

$$R = \sqrt{F^2 + \rho^2} \quad (9)$$

$$E_y(0,0,F) = E_z(0,0,F) = 0 \quad (10)$$

اگر بخواهیم در یک نقطه مشخص روی محور آنتن مثل $(0,0,F_0)$ تمرکز اشعه یا کانون داشته باشیم با استفاده از رابطه (۸) و اینکه فاز ناشی از جمله $1 + 1/(jk_0R)$ به علت بزرگی بودن k_0R ، بسیار کوچک است باید که تابع تصحیح فاز $\phi(\rho)$ در این رابطه مساوی k_0R گردد، تا انتگرال مربوطه ماکزیم شود. در این حالت تابع تصحیح بهینه به علت بزرگی بودن

مقدار I_x در رابطه (۸-ب) داده شده است.

با قرار دادن رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷) داریم:

$$P_R = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \cdot A_{es} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{fm} |I_x|^2 \quad (۱۹-الف)$$

بطوریکه در رابطه (۱۹-الف) مقادیر A_{es} و G_s به ترتیب

سطح مقطع مؤثر سیستم و بهره سیستم می‌باشد. نهایتاً

خواهیم داشت:

$$G_s = G_{fm} \frac{|E_x(0,0,F)|^2}{|E_0|^2} \quad (۱۹-ب)$$

در روابط (۱۸) و (۱۹) مقدار η_0 همان امپدانس ذاتی

فضای آزاد و $|E_0|^2/2\eta_0$ اندازه بردار پوینتینگ تابیده به آنتن صفحه‌ای فرنل است.

محاسبه عددی و نتایج

یک آنتن فرنل با سه حلقه فلزی به شعاعهای $b_1=11.47\text{cm}$,

$b_5=26.32\text{cm}$, $b_4=23.39\text{cm}$, $b_3=20.13\text{cm}$, $b_2=16.33\text{cm}$

روی یک لایه دی‌الکتریک به ضخامت ۴ میلی‌متر و ثابت

دی‌الکتریک $\epsilon_r = 2/54$ ساخته شده است. [۸]. این آنتن برای

فرکانس ۱۱/۳۲۵ گیگاهرتز و فاصله کانونی ۰/۵ متر طراحی

شده است.

شکل (۵) با استفاده از معادله (۸-ب) شدت میدان آنتن

فوق و آنتن با ۱۰ و ۲۰ حلقه فلزی را نشان می‌دهد. تمرکز

میدان E_x در کانون فاصله ۰/۵ متر قابل توجه است. این شکل

هم چنین حساسیت تغییر نقطه کانونی برای تعداد حلقه‌های

زیاد (یا در حقیقت وقتی ابعاد آنتن زیاد می‌شود) را نشان

می‌دهد.

شکل (۶) تغییرات بهره آنتن در جهت محوری را به ازای

جابجائی نقطه تغذیه نشان می‌دهد. در این حالت تغذیه را،

ایزوتروپیک یک طرفه با بهره $G_f(\theta')$ (معادله (۲۰)) فرض

کرده‌ایم:

در ضمیمه نشان داده‌ایم که اگر از توابع تصحیح فاز با

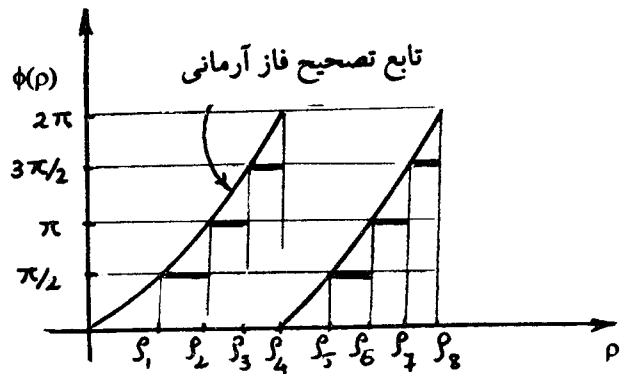
گامهای فاز $\frac{2\pi}{M}$ مانند شکل (۴) استفاده کنیم. (یعنی برای

فاصله فاز صفر تا 2π به تعداد M پله داشته باشیم)، η_p را

می‌توان از رابطه زیر بدست آورد که کاملاً با نتیجه مرجع [۴]

مطابقت دارد.

$$\eta_p \cong \left(\sin \left(\frac{\pi}{M} \right) / \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)^2 \quad (۱۶)$$



شکل (۴): تقریب تابع تصحیح بهینه با استفاده از گامهای فاز $\frac{2\pi}{M}$ ($M=4$)

البته چنین گام فازی را نمی‌توان به کمک آنتن شکل (۱)

ایجاد کرد ولی می‌توان به کمک تغییر لایه‌های دی‌الکتریک

در حلقه‌های مختلف به چنین گام فازی رسید.

بهره آنتن در جهت محوری

با توجه به شکل (۱) الف، فرض می‌کنیم در نقطه‌ای روی

محور آنتن تغذیه‌ای با بهره ماکزیمم G_{fm} به فاصله F از آنتن

فرنل قرار داشته باشد اگر سطح مقطع مؤثر ماکزیمم آنتن

گیرنده A_{fm} باشد توان دریافتی از آنتن گیرنده برابر است با: [۷]

$$P_R = S_{if} \cdot A_{fm} = S_{if} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{fm} \quad (۱۷)$$

در معادله فوق S_{if} اندازه بردار پوینتینگ^۱ بازتابیده شده از

آنتن صفحه‌ای فرنل در نقطه $(0,0,F)$ می‌باشد. با فرض آنکه

موج متمرکز شده E_x در این نقطه یک موج صفحه‌ای می‌باشد،

فرضی که تنها یک تقریب است) خواهیم داشت:

$$S_{if} = \frac{|E_x(0,0,F)|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} |I_x|^2 \quad (۱۸)$$

$$G_f(\theta) = 2 \quad 0 < \theta < \pi/2 \quad (20)$$

$$G_f(\theta) = 0 \quad \pi/2 < \theta < \pi$$

وقتی که تعداد حلقه‌ها افزایش یابد بهره زیاد می‌شود.

شکل (۷) بازدهی آنتن فرنل تعریف شده بوسیله معادله (۱۵) را به ازای تغییرات فاصله تغذیه، نشان می‌دهد. مقدار این بازدهی برای هر سه مقدار حدود ۰/۴ است که با معادله (۱۶) با $(M=2)$ کاملاً همخوانی دارد.

در شکل (۸) تغییرات بهره بر حسب فرکانس برای سه آنتن با تعداد حلقه‌های مختلف نشان داده شده است. نتیجه این شکل پهنای باند آنتن‌ها می‌باشد که با افزایش تعداد حلقه‌ها کاهش پیدا می‌کند. که این مفهوم با رابطه ارائه شده در مرجع [۴] (رابطه ۲۱) علیرغم آنکه پهنای باند در مرجع [۴] با تعریف پهنای باند بر حسب تغییرات بهره متفاوت است، مطابقت دارد:

$$B = \frac{f_0}{N} \quad (21)$$

f_0 فرکانس میانی و N تعداد حلقه‌های فلزی می‌باشد. دیده می‌شود که این رابطه برای N های بزرگ بطور تقریبی صادق است.

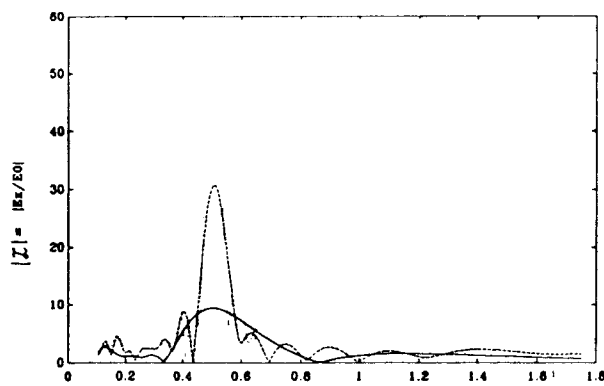
نکته‌ای که قابل توجه است این است که منحنی‌های شکل (۶) و (۸) به هر حال بهره در جهت محوری آنتن را نشان می‌دهند نه بهره ماکزیمم را، بنابراین این امکان وجود دارد که منحنی‌ها در بعضی از حالات نامناسب از صفر دسی‌بل (0dB) نیز کمتر شوند!

شدت میدان الکتریکی متوجه در نقاط روی محور ناشی از مجموع شدت میدانهای منعکسه از سطح آنتن می‌باشد و به همین علت زمانی که اختلاف فاز ناشی از اختلاف مسیر شدت میدانهای منعکسه از نوارهای مختلف آنتن آنچنان باشد که میدانها یکدیگر را تقویت نمایند دارای ماکزیمم و در

غیر اینصورت دارای مینیمم هستیم که این مطلب در (شکل ۶) نشان داده شده است.

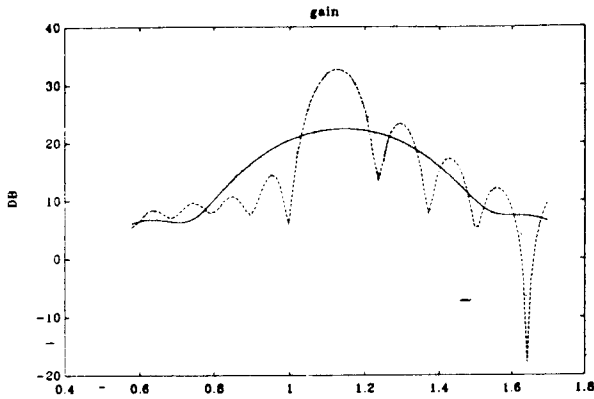
اختلاف نتایج تجربی و تئوری را می‌توان ناشی از دو عامل دانست اول اینکه خود روش تئوری یک روش تقریبی بوده است و ثانیاً به علت مشکلات ساخت قادر به اعمال دقت خیلی زیاد مکانیکی نبوده‌ایم. لکن همانطور که در شکل (۹-الف) نشان داده شده است برای فرکانس و فاصله کانونی طراحی دارای بهره ماکزیمم می‌باشیم که با کم شدن فاصله کانونی مقدار بهره نیز کاهش می‌یابد. رفتار کلی نتایج تئوری فوق و آزمایشهای تجربی موافقت خوبی با هم دارند.

در شکل (۹-الف) بهره سیستم آنتن طراحی شده $N=3$ برای فواصل کانونی مختلف وقتی آنتن گیرنده یک آنتن شیوری استاندارد مطابق شکل (۹-ب) با بهره ماکزیمم $G_{fm} = 16dB$ است بر حسب فواصل کانونی مختلف داده شده است.

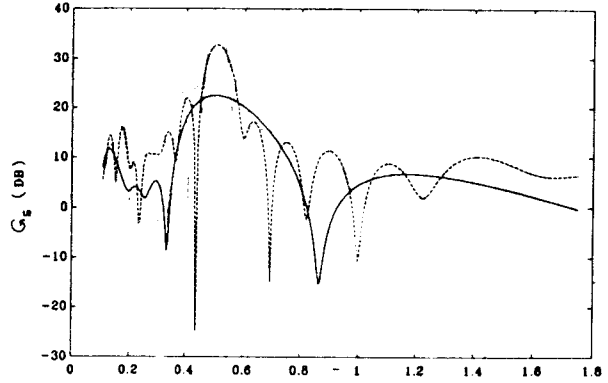


فاصله کانونی (متر)

شکل ۵: شدت میدان نسبی روی نقاط مختلف محور آنتن بر حسب سه نوع آنتن مختلف. $N=3$, $N=10$, $N=20$ آنتن‌ها برای فاصله کانونی ۰/۵ متر و فرکانس ۱۱/۳۲۵ GHz طراحی شده‌اند. $d=4mm$, $\epsilon_r=2/54$



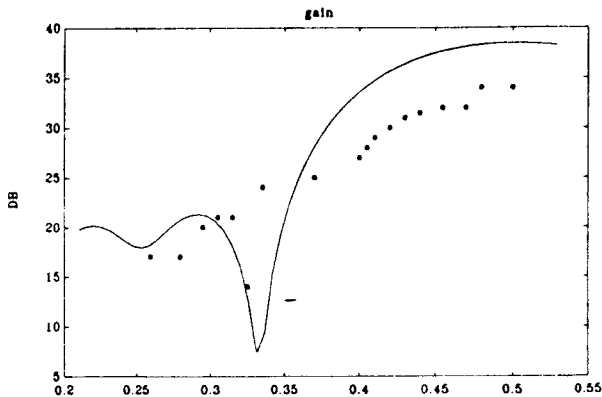
فرکانس (Hz)



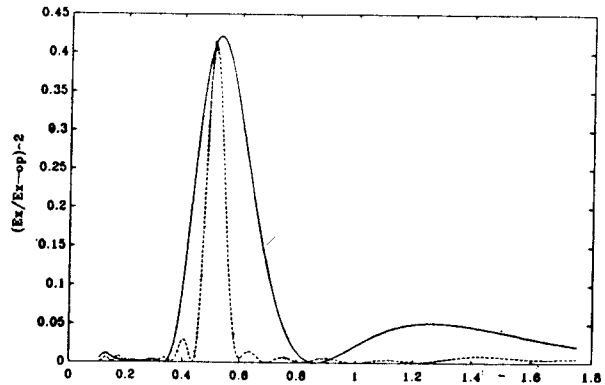
فاصله کانونی (متر)

شکل ۸: تغییرات بهره در جهت محوری آنتن بر حسب فرکانس سه آنتن با تعداد حلقه‌های مختلف $N=3, N=10, N=20$ ، فاصله کانونی 0.5 m ، طراحی بهینه در فرکانس $11/325\text{ GHz}$ ضخامت لایه دی‌الکتریک 4 mm ، $\epsilon_r = 2/54$ ، تغذیه ایزوتروپیک یک جهته می‌باشد.

شکل ۶: تغییرات بهره آنتن بر حسب تغییرات نقطه تغذیه (بهره در جهت محوری) برای سه آنتن مختلف $N=3, N=10, N=20$ آنتن‌ها برای فاصله کانونی 0.5 متر و فرکانس $11/325\text{ GHz}$ طراحی شده‌اند. $\epsilon_r = 2/54, d = 4\text{ mm}$



فاصله کنونی (متر)



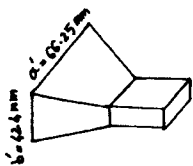
فاصله کانونی (متر)

شکل ۹ الف: بهره به عنوان تابعی از مکان نقطه تغذیه.

شکل ۷: بازدهی آنتن تعریف شده بوسیله معادله (۱۵) به ازای تغییرات فاصله کانونی برای سه آنتن مختلف با تعداد حلقه‌های فلزی، $N=3, N=10, N=20$ آنتن‌ها برای فاصله کانونی 0.5 متر و فرکانس $11/325\text{ GHz}$ طراحی شده‌اند. $\epsilon_r = 2/54, d = 4\text{ mm}$

شکل ۹ ب: بهره 16 dB انتخاب شده باشد. وقتی آنتن گیرنده مطابق شکل (۹ ب) با بهره 16 dB انتخاب شده باشد. $\epsilon_r = 2/54, d = 4\text{ mm}, f = 11/325\text{ GHz}$ آنتن با سه حلقه فلزی طراحی برای فاصله کانونی 0.5 متر می‌باشد.

* نتایج تجربی — نتایج تئوری



شکل ۹ ب: آنتن شیپوری استاندارد

۶- نتیجه گیری

یک روش برای تحلیل آنتن مناطق فرنل با استفاده از جریانه‌های معادل مغناطیسی و اصل هم‌ارزی بیان شد بعضی از نتایج این روش با نتایج مراجع مختلف مطابقت خوبی دارد. به کمک مفهوم تابع تصحیح فاز، یک بیان برای شدت تمرکز امواج تابیده شده روی آنتن در نقطه کانونی آنتن بدست آورده شد. تابع تصحیح فاز بهینه که برای سطح مقطع ثابتی از آنتن بیشترین تمرکز امواج را خواهد داد بدست آمده و بازدهی آنتنهای دیگر با آن مقایسه گردید. به کمک چنین روشی بهره آنتن ساخته شده محاسبه گردیده، نتایج این محاسبه با نتایج تجربی موافقت خوبی را نشان داده است. چنین روشی را می‌توان برای عدسیهای مناطق فرنل با توابع تصحیح فاز پیچیده‌تر نیز بکار برد.

قدردانی:

نویسندگان مایلند از زحمات همکاران طرح پژوهشی فوق، آقایان دکتر صفی‌الدین صفوی، مهندس عامری و مهندس بوربور، تشکر فراوان نمایند.

ضمیمه: اثبات رابطه تقریبی معادله (۱۶) برای بازدهی:

فرض کنید که شعاعهای $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ نواحی اصلی فرنل باشد: (N تعداد کل این مناطق می‌باشد).

$$k_0 \sqrt{b_n^2 + F_0^2} = 2n\pi + k_0 F_0 \quad (1)$$

می‌توان انتگرال $[\rho_a \text{ تا } 0]$ را به فاصله‌های ρ_{n-1} تا ρ_n تقسیم کرد: $(E_0 = 1)$

$$E_x(0, 0, F_0) = j k_0 \sum_{n=1}^N \int_{\rho_{n-1}}^{\rho_n} \left(1 + \frac{1}{jk_0 R}\right) \frac{F_0 \rho'}{R} \text{Exp}(j\phi(\rho') - jk_0 R) / R \, d\rho' \quad (2)$$

در فاصله بین ρ_{n-1} تا ρ_n می‌توان $\left(1 + \frac{1}{jk_0 R}\right)$ به صورت

زیر تقریب زد، در این تقریب مقدار R بوسیله فاصله وسط

$$\text{منطقه فرنل تا کانون تقریب زده شده است.} \\ R_n = \sqrt{F_0^2 + \left(\frac{\rho_n + \rho_{n-1}}{2}\right)^2} \quad (3)$$

با استفاده از این تقریب و معادله (۲) خواهیم داشت:

$$E_x(0, 0, F) = j k_0 \left(1 + \frac{1}{jk_0 R_n}\right) \frac{F_0}{R_n} \sum_{n=1}^N \int_{\rho_{n-1}}^{\rho_n} \text{Exp}(j\phi(\rho') - jk_0 R) \rho' / R \, d\rho' \quad (4)$$

حالا اگر تغییر متغیر ρ' به θ را در انتگرال (۴) بکار بگیریم

خواهیم داشت:

$$\theta = k_0 \left\{ (F_0^2 + \rho'^2)^{1/2} - (F_0 + n\lambda_0) \right\}$$

$$E_x(0, 0, F_0) = j k_0 \cdot 2\pi \cdot \text{Exp}(-jk_0 F_0) \cdot \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{jk_0 R_n}\right) \frac{F_0}{R_n} \int_0^{2\pi} \text{Exp}(j\phi'(\theta) - j\theta) \, d\theta \quad (5)$$

که در این معادله $\phi'(\theta) = \phi(\rho'(\theta))$ خواهد بود.

$$E_{xopt}(0, 0, F_0) = j k_0 \cdot 2\pi \cdot \text{Exp}(-jk_0 F_0) \cdot \sum_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{jk_0 R_n}\right) \frac{F_0}{R_n} \quad (6)$$

اگر تابع تصحیح فاز با پله‌های $\frac{2\pi}{M}$ تقریب زده شده باشد

می‌توان نوشت:

$$\phi'(\theta) = \frac{2\pi m}{M} \quad \frac{2\pi m}{M} < \theta < \frac{2\pi(m+1)}{M} \\ m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (7)$$

و با جایگذاری در معادله (۵) و انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$E_{x \text{ step}}(0, 0, F_0) = j 2\pi k_0 \cdot \text{Exp}(jk_0 F_0 + j\pi/M) \cdot \frac{\sin(\pi/M)}{\pi/M}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{F_0}{R_n} \left(1 + \frac{1}{j k_0 R_n}\right) \quad (8)$$

با استفاده از (۸) و (۶) نهایتاً داریم:

$$\left| \frac{E_{x \text{ step}}}{E_{xopt}} \right| = \frac{\sin(\pi/M)}{\pi/M} \quad (9)$$

و اثبات کامل شده است.

فهرست منابع

- 1- W.Rotman, "Analysis of an EHF aplanatic zoned dielectric lens antenna, "IEEE Trans. Antennas propagat., Vol. AP-32, No. 6, June 1984, PP. 611-617.
 - 2- L.F. Van Buskirk and C.E.Hendrix, "The zone plate as a radio - frequency focusing element, IRE Trans. Antennal propagat., Vol. AP-9, May 1961, pp. 319 - 320.
 - 3- D. Black & J.Wiltse, L Millimeter- wave characteristics of phase correcting Fresnel zone plates, "IEEE Trans. Microwave theory techinques, Vol. MTT-35 , No. 12, December 1987, pp.1122-1129.
 - 4- J.C. Wiltse and J. E. Garrett, : 'The Fresnel zone plate antenna, : Microwave Journal, Vol. 34, No.1 (Euro-global ed.), Jan. 1991, pp. 101-114.
 - 5- L. Leyton and H.A.J. Herben, "Vectorial far field analysis of Fresnel-zone plate antenna: a comparison with the parabolic reflector antenna," Microwave and optical thechnology letters, Vol. 5, No. 2, February 1992, pp.49 - 56.
 - 6- Y.J.Guo and S.K.Barton, "On the subzone phase correction of Fresnel zone plate antennas, "Microwave and optical thechnology letters, Vol. 6, No. 15, December 5 1993, pp. 840 - 843.
 - 7- R. E. Collin, Antennas and radio wave propagation, Mc Grawhill Company, 1985.
-