خواص ماتریس‌های ساختمانی وروش چولسکی برای حل دستگاههای معادلات خطی

ترجمه وتنظیم:

کامران نعیم

فارغ التحصیل رشته راه و ساختمان دانشکده فنی تهران

فرزاد نعیم

دانشجوی سال چهارم راه و ساختمان دانشکده فنی تهران

چکیده

استفاده ازحسابگرالکترونیک برای حل دستگاههای ساختمانی، هر روز بیشتر رواج مییابد، ودر دفاتر فنی لزوم داشتن برنامه هائی که بتواند با احتیاجات روزمره دفتر تطبیق کند، چشم‌گیرتر میگردد.

این مساله با توجه به رواج هرچه بیشتر استفاده ازحسابگرهای کوچک دردفاتر فنی وحافظه محدود آنها بیشتر به چشم میخورد. درنتیجه درتهیه برنامه برای محاسبات ساختمانی باید از حداکثر سرعت استفاده کرده، ازمیزان محدودی حافظه به بهترین وجهی استفاده نمود. ودقت موردنظر راحفظ کرد وچون بیشترین حجم حافظه کامپیوتر درراه حل دستگاههای معادلات خطی صرف میشود باید ازروشهائی بهره‌گیری کرد که مقدار حافظه لازم برای انجام این عمل ومقدار محاسبات لازم ودرنتیجه مقدار وقت موردنیاز راتقلیل دهد. روش چولسکی (Cholesky) که اصول آن در زیر بیان میگردد ، یکی ازمناسب‌ترین روشهای حل دستگاههای معادلات خطی برای دستگاههای ساختمانی است.

درمحاسبه استاتیکی ساختمانهای بلند با کامپیوتر مسأله اساسی حل دستگاههای معادلات حاصل میباشد .بعنوان مثال اگر قابی فضایی را که دارای ۱۰۰ گره باشد در نظر گیریم برای حل کامل این قاب بروش ماترسیی محتاج به حل ۶۰۰ معادله ۶۰۰ مجهولی میباشیم وبدین طریق اگر برای حل آن از روش های عادی حل ماترسیی دستگاهها استفاده شود ۳۶۰۰۰۰ کلمه حافظه لازم خواهد بود .دراین مقاله روش حذفی حل دستگاههای معادلات باروش چولسکی که از ماتریسهای نواری برای حل دستگاههای مجهولات استفاده میکند، مقایسه شده‌است وگرچه این مقایسه تقریبی است، ولی بااینحال نشان دهنده برتری کامل روش چولسکی

میباشد. قبل از شروع مقایسه لازم است زمان مورد نیاز کامپیوتر برای حل یک مسأله را که بدو قسمت تقسیم میشود مطابق زیر شرح دهیم :

الف : زمانی که بمصرف عملیات محاسباتی میرسد و بدیهی است که مقدار آن بستگی به نوع حسابگر دارد.

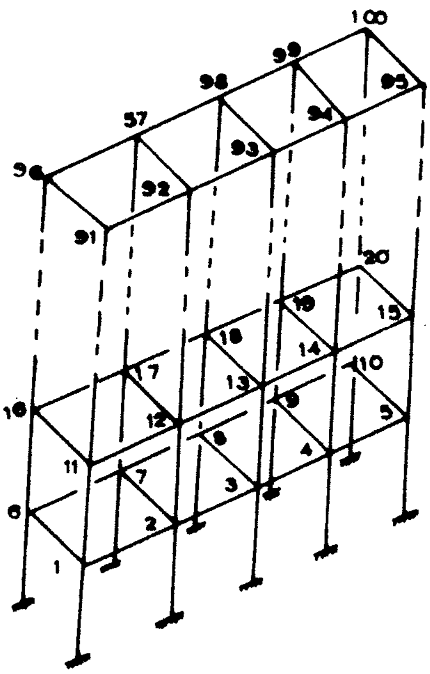
این زمان از حدود میلیونیم ثانیه برای یک عمل درمورد کامپیوترهای سریع تا حدود هزارم ثانیه برای هرعمل درمورد کامپیوترهای خیلی ضعیف (مورد استفاده در امور تجارتی) تغییر میکند .

ب : زمان انتقال اطلاعات از قسمتهای مختلف حسابگر به یکدیگر.

حسابگرهای فعلی معمولا از دونوع حافظه استفاده میکنند :

الف : حافظه مرکزی.

ب : حافظه های کمکی یافرعی یامجازی (مانند نوار مغناطیسی ودیسک) .



معمولا گنجایش حافظه های کمکی به تعداد زیادی بیشتر از حافظه های مرکزی است، برای مثال حسابگر I. B. M. 370 مدل ۱۱۵ دارای ۱٦٤۰۰۰ بایت (Byte) حافظه اصلی (Real Memory) در صورتیکه هرواحد دیسک مدل ۳۳٤۰/۷۰ که برای حسابگر فوق قابل استفاده است تقریباً معادل ۷۰ - میلیون بایت (Byte) حافظه دارد وهر دستگاه مرکزی میتواند دریک لحظه باچندعدد ازاین دستگاهها کارکند ویا حسابگر کوچک HP – 9830A قادر به داشتن ۱٦۰۰۰ بایت حافظه اصلی است و هر دستگاه نوار مغناطیسی که بصورت کاست است وبه آن متصل میشود، تقریباً دارای ۸۰۰۰ بایت حافظه است وبانصب دستگاه (Mass – Memory) برروی این حسابگر میتوان گنجایش حافظه فرعی را تا حدود ٤/۸ میلیون بایت افزایش داد .چون حسابگر معمولا نمیتواند محاسبات را برروی متغییرهای ضبط شده برروی حافظه فرعی انجام بدهد، لذالازم است این اعداد از حافظه فرعی به حافظه اصلی منتقل شوند وچون این، عملی

استالکترومکانیکیسرعتآن نسبت به‌سرعت محاسبات حسابگر کم‌استبطور مثال برای نوار مغناطیسی I.B.M.3411 سرعت خواندن ونوشتن محدود به ۰۰۰۰۴ کلمه در ثانیه است .

حال به‌مثال‌خود برگردیم که حل ۶۰۰ معادله ۶۰۰ مجهولی‌بود چنانچه گفته‌شد اگر برای حل این‌دستگاه از روش حذفی استفاده شود اولا احتیاج به ۳۶۰۰۰۰ حافظه خواهد بود (بطوریکه دیده میشود، استفاده از حافظه های کمکی دراین مورد تقریباً اجباری‌است)،ثانیاً دراین روش باید هر معادله رادر مضرب شخصی ضرب کرد هوبا معادلات دیگرترکیب نمائیم وبدین ترتیب تقریباً $\frac{۶۰۰^۳}{۳}$ عمل جبری برای حل این دستگاه لازم‌است.ثالثاً اگر مینی کامپیوتری در دست باشد که حافظه اصلی‌آن ۵۰۰۰ کلمه‌ای باشد لازم است همه ضرایب معادله را درحافظه‌فرعی ذخیره کرد و درموقع لزوم به حافظه اصلی منتقل نمود و- بنابراین در حدود $\frac{۲\times۶۰۰^۳}{۳}$ عمل انتقال بین حافظه‌هاانجام خواهد گرفته . چنانچه فرض کنیم سرعت کامپیوتر برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ ثانیه برای هر عمل جبری باشد (که در مورد کامپیوترهای بزرگ سرعت ناچیزی‌است) وسرعت‌انتقال از حافظه فرعی به‌اصلی نیز ۲۰۰۰ عدد درثانیه باشد،در اینصورت محاسبات‌جبری تقریباً دوساعت وقت ماشین را میگیرد وبیست ساعت صرف انتقال اعداد بین حافظه‌ها میشود.البته بانوشتن برنامه‌های خاص که‌در دفعات محدودی ازآنهااستفاده کنیم‌ممکن‌است‌این مدت را (بیست‌ساعت‌را)به‌سه یا چهار ساعت تقلیل دهیم‌ولی باید توجه داشت که درکارهای مهندسی برنامه‌هامعمولا برای استفاده‌طویل - المدت نوشته میشوند واستفاده ازآنها محدود نمیباشد .این نکته نیز قابل توجه است که دراستفاده‌از روش معمولی حل دستگاههای معادلات(مثلا روش حذفی)نه از تقارن ماتریس (در مورد اغلب ماتریس های ساختمانی)استفاده میشود ونه عناصر صفر ماتریس از عمل خارج میشوند .

درمورد مثال فوق(قابی فضایی با ۱۰۰ گره که برای حل آن‌بایدیک دستگاه ۶۰۰ معادله ۶۰۰ مجهولی را حل نمود)اگر از عناصر صفر ماتریس‌آن صرفنظر گردد فقط ۱۱۵۲۰ عضو غیرصفر باقی‌میماند (اگر از تقارن ماتریس نیز استفاده شود این مقدار به‌نصف تقلیل مییابد وبعبارت دیگر ۵۷۶۰ حافظه لازم خواهد بود) که درمقایسه بارقم قبلی(۳۶۰۰۰۰ حافظه)دیده میشود که ۳٪آنست.بدین ترتیب با توجه به‌تعداد کم عناصر غیر صفر در ماتریس‌های ساختمانی پیداکردن روش‌هایی برای استفاده از این خاصیت لازم بنظر میرسد .در زیر یکی از این‌روش‌ها بنام روش چواسکی (Cholesky) شرح داده میشود.

تعاریف :

۱-ماتریس [A] راپوزیتیو دیفینیت (Positive definite) گویند‌اگر وفقطا گر رابطه $[X]^T[A][X] > 0$ برای ماتریس [X] که در آن تمام اعضای هیچ ستونی صفر نباشد برقرار- گردد.

۲-ماتریس [A] راماتریسی نواری به‌عرض $(2m+1)$ گویند بشرط آنکه همه عناصر **aij**

که رابطه $|i-j| > m$ در مورد آنها صادق است صفر باشند برای مثال ماتریس زیر ماتریسی نواری به عرض سه میباشد.

$$A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های ساختمانی معمولا خاصیت فوق را دارا هستند.

اگر ماتریس مربع $[A]$ N در N متقارن وپوزیتیودیفینیت باشد میتوان رابطه $[A]=[G][G]^T$ را نوشت که در آن $[G]$ ماتریس مثلثی پائینی N در N میباشد که عناصر قطر اصلی آن همگی مثبت هستند. با توجه به رابطه اخیر، حل دستگاه معادلات $[A][X]=[B]$ را میتوان از لحاظ محاسباتی به طریق زیر ساده کرد.

$$\left[G\right] \left[G\right]^T \left[X\right] = \left[B\right] \qquad (۱-۱)$$

ومعادله (۱-۱) را میتوان بصورت دو دستگاه معادله بیان وحل نمود.

$$\left[G\right] \left[Y\right] = \left[B\right]$$

$$\left[G\right]^T \left[X\right] = \left[Y\right]$$

بدین ترتیب محاسبات بدو دلیل کوتاه میشوند. اول آنکه $[G]^T$ و $[G]$ ماتریس‌های مثلثی هستند و دوم آنکه چون $[A]$ ماتریس نواری به عرض $(2m+1)$ بود بنابراین $[G]^T$ و $[G]$ ماتریس‌های نواری به عرض $(m+1)$ خواهد بود. برای ماتریس $[A]$ در مثال فوق ماتریس $[G]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & g_{43} & g_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{54} & g_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix}$$

در مورد یک ماتریس نواری مانند $[A]$ مقدار زیادی گنجایش حافظه کامپیوتر صرفه‌جوئی میشود و این بعلت آنست که فقط ذخیره کردن عناصر غیر صفر در حافظه‌ها ضروری است حتی اگر ماتریس $[A]$ نواری

ومتقارن باشد ، ذخیره کردن همه عناصر غیر صفر نیز لازم نیست وفقط ذخیره کردن عناصر غیر صفر ماتریس نواری با عرض $(m+1)$ کافی است . بنابراین اگر [A] ماتریسی مربع شکل و $n\times n$ باشد فقط $n\times(m+1)$ عنصر آن باید ذخیره گردد ، از ماتریس [G] نیز فقط عناصر نواری به‌عرض $(m+1)$ باید ذخیره گردند.

با استفاده از این روش زمان محاسبات بسیار کوتاه‌تر شده ومسایل مشکل‌تری را نیز میتوان بسیار ساده حل نمود.

برای حل معادلات $[A]=[G][G]^T$ و پیدا کردن عناصر gij از ماتریس [G] چولسکی قدم‌های زیر را پیشنهاد میکند:

۱- j را مساوی یک فرض کنید.

۲- $g_{11}=\sqrt{a_{11}}$ است.

۳- (i) را مساوی $(j+1)$ قرار دهید.

۴- $g_{i1}=\frac{a_{i1}}{g_{11}}$

۵- (i) را مساوی $(i+1)$ قرار دهید وبه‌مرحله چهارم برگردید.

۶- مرحله چهار وپنج را آنقدر تکرار کنید تا $i=n+1$ شود.

۷- (j) را مساوی $(j+1)$ قرار دهید.

۸- gij از رابطه:

$$gjj = \sqrt{ajj-\sum_{K=1}^{j-1} g^2{}_jk}$$

بدست میآید.

۹- (i) را مساوی $(j+1)$ قرار دهید.

۱۰- gij از رابطه زیر بدست میآید:

$$aij=\frac{aij-\sum_{K=1}^{j-1}[g_ik\, g_jk}{gjj}$$

۱۱- (i) را برابر $(i+1)$ قرار دهید وبه‌مرحله دهم برگردید.

۱۲- مراحل ده ویازده را تا $i=n+1$ تکرار کنید.

۱۳- به‌مرحله ۷ برگردید.

۱۴- مراحل ۷ تا ۱۳ را تکرار کنید تا $j=n$ گردد.

بعنوان مثال دستگاه معادلات $[A]\,[X]=[B]$ را با مفروضات زیر حل مینمائیم:

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} , [X]=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \text{ و } [B]=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای حل به‌روش چولسکی ابتدا باید ماتریس [G] را بدست‌آوریم .

$$g_{11}=\sqrt{a_{11}}=\sqrt{1}=0$$

$$g_{21}=\frac{a_{21}}{1}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$g_{31}=\frac{a_{31}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$g_{41}=\frac{a_{41}}{1}=2$$

$$g_{22}=\sqrt{a_{22}-g^2_{21}}=\sqrt{5-1}=2$$

$$g_{32}=\frac{a_{32}-g_{31}g_{21}}{g_{22}}=\frac{-3-(1)(-1)}{2}=1$$

$$g_{42}=\frac{a_{42}-g_{41}g_{21}}{g_{22}}=\frac{0-(2)(-1)}{2}=1$$

$$g_{33}=\sqrt{a_{33}-(g^2_{31}+g^2_{32})}=\sqrt{3-(1+1)}=1$$

$$g_{43}=\frac{a_{43}-g_{41}g_{31}-g_{42}g_{32}}{g_{33}}=\frac{0-(2)(1)-(1)(-1)}{1}=-1$$

$$g_{44}=\sqrt{a_{44}-(g^2_{41}+g^2_{42}+g^2_{43})}=\sqrt{7-(1+1+4)}=1$$

در نتیجه داریم :

$$[G]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

قدم بعدی حل دستگاههای $[G][Y]=[B]$ میباشد که بطریق زیر عمل میشود:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

از معادله اول خواهیم داشت :

$$Y_1=2$$

» » دوم » »

$$2Y_2=-4+Y_1=-4+2=-2$$
$$Y_2=-1$$

» » سوم » »

$$Y_3=4+Y_2-Y_1=4-1-2$$
$$Y_3=1$$

» » چهارم » »

$$Y_4=1+Y_3-Y_2-2Y_1=1+1+1-4$$
$$Y_4=-1$$

قدم سوم حل دستگاههای معادلات $[G]^T[X]=[Y]$ میباشد و با توجه به ماتریس $[G]$ میتوان بطریق زیر عمل کرد :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

که از حل آن نتیجه نهائی مطأله بدست میاید :

$$X_4=-1$$
$$X_3=0$$
$$X_2=0$$
$$X_1=4$$

لیست کامل برنامهٔ فرعی کل دستگاههای معادلات خطی به‌روش چولسکی ، که به‌زبان فرترن نوشته شده ضمیمهٔ مقاله ست :

فهرست منابع:

1. R.K.Livesley, Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press.
2. W.Beafait, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice—Hall, Inc... 1970.

```
IV     36ON-FO-479      3-8      CHOLES      DATE      11/01/35      TIME      11.27.04
       SUBROUTINE CHOLES (A.N,MM,1B,NT,IPRNT,*)                               CHOLESKY
       DIMENSION A (1)                                                        CHOLESKY
       DOUBLE PRECISION S1,T1                                                 CHOLESKY
C***   A IS THE ARRAY CONTAINING THE ELEMENTS OF THE LOWER HALF BAND          CHOLESKY
C***   OF THE SYMMETRIC STRUCTURE STIFFNESS MATRIX.                           CHOLESKY
C***   N=NUMBER OF EQUATIONS OR NUMBER OF UNKNOWN DISPLACEMENTS.              CHOLESKY
C***   MM=HALF BAND WIDTH+DIAGONAL ELEMENT OR MUD+1                           CHOLESKY
       MUD=MM-1                                                               CHOLESKY
       NS=MUD*MM/2                                                            CHOLESKY
       NM=N*MM-NS                                                             CHOLESKY
       IF (NT-1)30,30,31                                                      CHOLESKY
30     DO20 J=1,N                                                             CHOLESKY
       IF (J-MUD)1,1,2                                                        CHOLESKY
2      IN=J-MUD                                                               CHOLESKY
       L=IN+(J-MM)*MUD+NS                                                     CHOLESKY
       GO T0 7                                                                CHOLESKY
1      IN=1                                                                   CHOLESKY
       L=IN+(J-1)*J/2                                                         CHOLESKY
7      IF(J-N+MUD) 103,103,105                                                CHOLESKY
105    M5=N                                                                   CHOLESKY
       GO TO 104                                                              CHOLESKY
103    M5=J+MUD                                                               CHOLESKY
104    S1=O.O                                                                 CHOLESKY
```

```
      J1=J-1                                CHOLESKY
      J2=J+1                                CHOLESKY
      IF(J1)4,4,3                           CHOLESKY
3     DO 6 K=IN,J1                          CHOLESKY
      T1=A(L)                               CHOLESKY
      S1=S1+T1**2                           CHOLESKY
6     L=L+1                                 CHOLESKY
4     T1=A(L)                               CHOLESKY
      IF(T1-S1.LT.O.) GO TO 100             CHOLESKY
      T1=DSQRT(T1-S1)                       CHOLESKY
      A(L)=T1                               CHOLESKY
      IF(J-N) 19,20,20                      CHOLESKY
19    DO 18 I=J2,M5                         CHOLESKY
      SUM=0,0                               CHOLESKY
      IF(I-MUD) 68,68,71                    CHOLESKY
71    IN=I-MUD                              CHOLESKY
      LL=IN+(I-MM)*MUD+NS                   CHOLESKY
      GO TO 5                               CHOLESKY
68    IN=1                                  CHOLESKY
      LL=IN+(I-1)*I/2                       CHOLESKY
5     IF(J1) 18,18,8                        CHOLESKY
8     IF(IN-J1) 53,53,18                    CHOLESKY
53    DO 17 K=IN,J1                         CHOLESKY
      LM=L+K-J                              CHOLESKY
```

```
      SUM=SUM+A(LL)*A(LM)                                   CHOLESKY
17    LL=LL+1                                               CHOLESKY
18    A(LL)=(A(LL)-SUM)/A(L)                                CHOLESKY
20    CONTINUE
C***  BEGIN FORWARD SUBSTITUTION.                           CHOLESKY
31    NR=IB+1                                               CHOLESKY
      NB=NM+1                                               CHOLESKY
      DO 65 K=1,NR                                          CHOLESKY
      A(NB)=A(NB)/A(1)                                      CHOLESKY
      DO 60 I=2,N                                           CHOLESKY
      IF(I-MUD)21,21,22                                     CHOLESKY
22    IN=I-MM                                               CHOLESKY
      KS=IN*MUD+NS                                          CHOLESKY
      M5=MUD                                                CHOLESKY
      GO TO 27                                              CHOLESKY
21    IN=0                                                  CHOLFSKY
      M5=I-1                                                CHOLESKY
      KS=M5*I/2                                             CHOLESKY
27    SUM=0.0                                               CHOLESKY
      DO 61 J=1,M5                                          CHOLESKY
      JR=J+IN                                               CHOLESKY
      L=JR+KS                                               CHOLESKY
      JR=JR+NB-1                                            CHOLESKY
61    SUM=SUM+A(L)*A(JR)                                    CHOLESKY
      ID=I+KS                                               CHOLESKY
```

```
                                                            CHNLESKY
60     A(JR+1)=(A(JR+1)-SUM)/A(ID)                          CHOLESKY
65     NB=NB+N                                              CHOLESKY
C***   BEGIN BACKWARD SUBSTITUTION.                         CHOLESKY
       NB=MM+N                                              CHOLESKY
       DO 75 K=1,NR                                         CHOLESKY
       A(NB)=A(NB)/A(MM)                                    CHOLESKY
       DO 80 II=2,N                                         CHOLESKY
       I=N-II+1                                             CHOLESKY
       IF(I-MUD)41,41,95                                    CHOLESKY
95     ID=I+(I-MM)*MUD+NS                                   CHOLESKY
       GO TO 42                                             CHOLESKY
41     ID=I+(I-1)*I/2                                       CHOLESKY
42     IF(I-N+MM)43,43,45                                   CHOLESKY
45     M5=II-1                                              CHOLESKY
       GO TO 76                                             CHOLESKY
43     M5=MUD                                               CHOLESKY
76     SUM=0.0                                              CHOLESKY
       DO 81 J=1,M5                                         CHOLESKY
       JR=I+J                                               CHOLESKY
       IF(JR-MUD)98,98,99                                   CHOLESKY
99     L=I+(JR-MM)*MUD+NS                                   CHOLESKY
       GO TO 82                                             CHOLESKY
98     L=I+(JR-1)*JR/2                                      CHOLESKY
82     JR=NB-N+JR                                           CHOLESKY
```

```
81      SUM=SUM+A(L)*A(JR)                                                      CHOLESKY
        JR=NB-N+I                                                               CHOLESKY
80      A(JR)=(A(JR)-SUM)/A(ID)                                                 CHOLESKY
75      NB=NB+N                                                                 CHOLESKY
        RETURN                                                                  CHOLESKY
100     WRITE(IPRNT,901)                                                        CHOLESKY
901     FORMAT(1H,10×,‘STIFFNESS MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINITE HALT THI        CHOLESKY
        1S JOB’)                                                                CHOLESKY
        RETURN 1                                                                CHOLESKY
        END                                                                     CHOLESKY
```