تقدیم به‌پدربزرگوار ونیکوسرشتم که‌استعداد
خوب وصحیح فکرکردن را در من بمیراث
نهاد وعالی پرورش داد.

تعمیم قضیه‌های هندسه مسطحه در فضا

نوشته‌ی

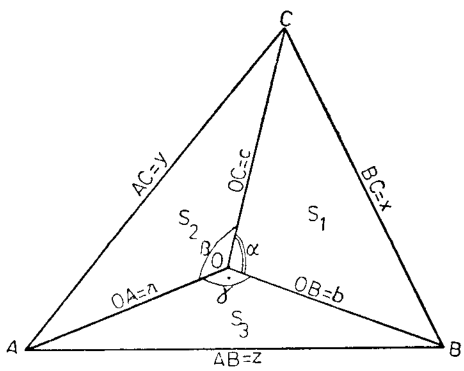
مهندس جمشید حسیبی

بسیاری از قضیه‌های سه ضلعی‌های مسطح در مورد چهار وجهی‌های فضائی قابل تعمیم است، با این تفاوت که خطها به‌صفحه‌ها تبدیل شوند وسطح وجه‌ها جانشین طول خطها گردند.
بعنوان مثال میتوان تعمیم قضیه های مربوط به تشابه مثلث ها وقضیه‌ی فیثاغورث وتعمیم فرمول مثلثاتی‌ی

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\widehat{BAC}$$

(در مثلثی با ضلع های a ، b ، c) را درمورد چهار وجهی‌های فضائی نام برد. دوقضیه‌ی اخیر بعنوان مثال درمتن زیر استدلال شده است.

چهار وجهی‌ی OABC را با فرضهای زیر درنظر میگیریم:



(شکل الف)

$\overline{OA}=a$ $\qquad \widehat{BOC}=\alpha$

$\overline{OB}=b$ $\qquad \widehat{COA}=\beta$

$\overline{OC}=c$ $\qquad \widehat{AOB}=\gamma$

$\overline{BC}=x$ $\qquad S_{۱}=\frac{bc}{۲}\sin\alpha$

$CA=y$ $\qquad S_{۲}=\frac{ca}{۲}\sin\beta$

$$AB = z \qquad\qquad S_{3} = \frac{ab}{2}\sin\gamma$$

درهندسه‌ی مسطحه ثابت شده است که مربع سطح مثلث ABC با ضلعهای x ، y ، z برابراست با:

$$S^2_{ABC} = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{z+y-z}{2}\right)\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)$$

که پس ازضرب واختصار نتیجه میشود:

$$(1) \qquad S^2_{ABC} = -\frac{x^4+y^4+z^4-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{16}$$

اگر $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ (یعنی‌مثلث‌های OAB ، OBC و OCA ازرأس O قائمه‌الزاویه) فرض‌شوندرابطه‌ی فوق را میتوان بصورت زیرنوشت:

$$S^2_{ABC} = -\frac{1}{16}\Big\{(b^2+c^2)^2+(c^2+a^2)^2+(a^2+b^2)^2-2\Big[(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$
$$+(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(a^2+b^2)(b^2+c^2)\Big]\Big\}$$

که پس ازضرب واختصار نتیجه میشود:

$$S^2_{ABC} = \left[\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4}\right]$$

فرمول فوق تعمیم رابطه‌ی فیثاغورث درفضا بوده وآنرا میتوان بصورت زیرنوشته وبیان نمود:

$$(2) \qquad S^2_{ABC} = S^2_{OBC}+S^2_{OCA}+S^2_{OAB}$$

قضیه: درچهاروجهی‌ی $OABC$ که کنج O درآن‌سه قائمه میباشد. مجذورسطح‌وجه روبروبه‌کنج O مساویست با مجموع مجذورهای سطح سه وجه دیگر.

درحالتیکه α ، β و γ مقدارهای غیرمشخص باشند رابطه‌ی (۱) را بصورت زیر میتوان نوشت:

$$S^2_{ABC} = -\frac{1}{16}\Big\{(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)^2+(c^2+a^2-2ca\cos\beta)^2+(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)^2-$$
$$2\Big[(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)(c^2+a^2-2ca\cos\beta)+(c^2+a^2-2ca\cos\beta)(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)$$
$$+(a^2+b^2-2ab\cos\gamma)(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)\Big]\Big\}$$

که پس از ضرب واختصار نتیجه میشود:

$$(3) \qquad S^2_{BCD} = \frac{1}{4}\Big\{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(b^2c^2\cos^2\alpha+c^2a^2\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\gamma)-$$
$$2\Big[c^2ba(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)+b^2ca(\sin\beta-\cos\alpha\cos\gamma)+a^2bc(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)\Big]\Big\}$$

ازطرف دیگر $\widehat{S_1S_2}$ ، $\widehat{S_2S_3}$ و $\widehat{S_3S_1}$ بترتیب زاویه بین صفحه های S_1 ، S_2 و S_3 باشند میتوان ثابت[1] کرد که:

$$(٤)\quad \cos\widehat{S_1S_2}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\ ،\ \cos\widehat{S_2S_3}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\ \text{و}\ \cos\widehat{S_3S_1}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

با توجه به مقدارهای فوق که اثبات آنها درآخر مقاله آمده است، رابطه‌ی(۳) بصورت زیر نوشته میشود:

$$S^2_{ABC}=\frac{1}{4}\Big((b^2c^2\sin^2\alpha+c^2a^2\sin^2\beta+a^2b^2\sin^2\gamma)-2(bc\sin\alpha\cdot ca\sin\beta\cdot\cos\widehat{S_1S_2})-$$
$$2(ca\sin\beta\cdot ab\sin\gamma\cdot\cos\widehat{S_2S_3})-2(ab\sin\gamma\cdot bc\sin\alpha\cdot\cos\widehat{S_1S_3})\Big)$$

و رابطه‌ی فوق را میتوان چنین نوشت:

$$(٥)\qquad S^2_{ABC}=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2(S_2S_3\cos\widehat{S_2S_3}+S_3S_1\cos\widehat{S_3S_1}+S_1S_2\cos\widehat{S_1S_2})$$

فرمول فوق از نظر فرم کاملاً شبیه فرمول مثلثاتی‌ی:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

میباشد.

توضیح : فرمولهای (۲) و (٥) بطریق هندسی وساده‌تر منتها با توجه به‌شکل وترسیم خطهائی درآن قابل استدلال میباشد وروش فوق از نظر اینکه احتیاجی به‌مراجعه بشکل ندارد برگزیده شده است.

۱- برای اثبات فرمولهای (٤) کنج oxyz فرض میشود که درآن زاویه‌ی دوصفحه‌ی oxz و oyz را برحسب زاویه‌های $\widehat{yoz}=\alpha$ و $\widehat{zox}=\beta$ و $xoy=\gamma$ بدست میآوریم:

نقطه‌ی A را با فرض $OA=1$ روی ox مشخص کرده و از A صفحه‌ای بر ox عمود میکنیم تا oy را در B و oz را در c قطع کند. زاویه‌ی مسطحه‌ی $\widehat{BAC}=\delta$ زاویه‌ی دو صفحه‌ی oxy و oxz میباشد. با توجه باینکه مثلثهای $\overset{\triangle}{OAB}$ و $\overset{\triangle}{OAC}$ قائمه‌الزاویه میباشند ضلع های هرم OABC را حساب میکنیم:

$$(٦)\qquad \begin{cases}\overline{OA}=1 & \\ \overline{OB}=\dfrac{1}{\cos\gamma} & \overline{OC}=\dfrac{1}{\cos\beta}\\ \overline{AB}=tg\gamma & \overline{AC}=tg\beta\end{cases}$$

درمثلث OBC میتوان نوشت:

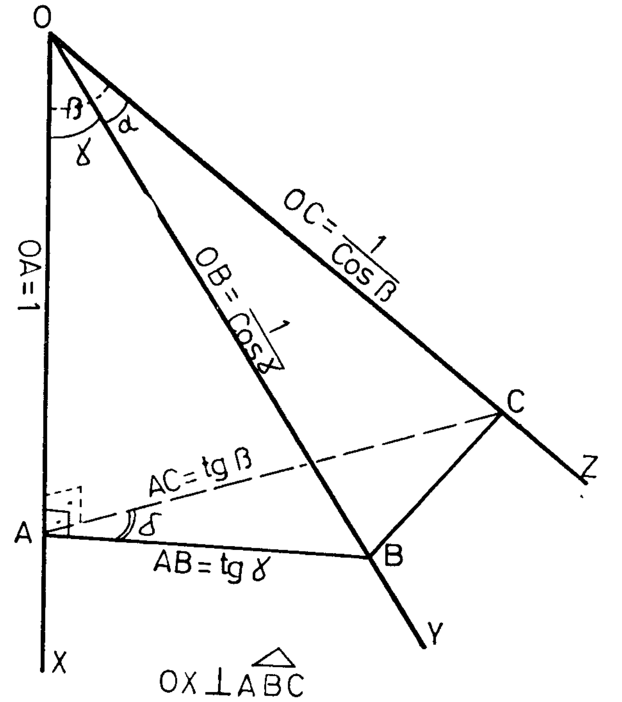
$$(٧)\qquad \overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OB}\cdot\overline{OC}\cos\alpha$$

اگر دررابطه‌ی (۷) بجای $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$ مقدارآنهارا از رابطه‌های (٦) قرار دهیم رابطه‌ی زیر بدست میآید:

$$(٨)\qquad \overline{BC}^2=\frac{1}{\cos^2\gamma}+\frac{1}{\cos^2\beta}-2\frac{1}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}\cos\alpha$$

وهمچنین درمثلث ABC میتوان نوشت:

$$\overline{BC}^{2}=\overline{AB}^{2}+\overline{AC}^{2}-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\delta \qquad (9)$$



(شکل ب)

واگر بجای $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ در رابطه‌ی (۹) نیز مقدارهای آنها را از رابطه های (۶) قراردهیم بدست میآید:

$$\overline{BC}^{2}=tg^{2}\beta+tg^{2}\gamma-2\,tg\beta\,tg\gamma\cos\delta \qquad (10)$$

از تساوی‌ی طرفین رابطه های (۸) و (۱۰) نتیجه میشود:

$$\cos\delta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \qquad (11)$$

واز رابطه‌ی (۱۱) میتوان رابطه های (٤) را نتیجه گرفت.