

الگوی عددی تحلیل دینامیکی سکوه‌های پرتاب موشک مبتنی بر روش تأثیرگذاری سازه‌ای^۱

دکتر رسول میرقادری * عباس محمدولی سامانی **

چکیده:

سازه سکوی پرتاب موشک از آغاز عمل پرتاب تا زمان میراشدن کامل ارتعاشات پس از جدا شدن موشک از روی آن دچار ارتعاشات می‌شود. این ارتعاشات در نتیجه حرکت شتابدار بدنه موشک روی آن پدید می‌آید. ارتعاشات مذکور از یک طرف موجب ایجاد تنشهای دینامیکی در سازه می‌شود که محاسبه آنها در راستای طراحی سازه حائز اهمیت است و از طرف دیگر شرایط اولیه پرتاب موشک یعنی مختصات نقطه جدا شدن همچنین زاویه محور آن نسبت به حالت استاتیکی قبل از آغاز پرتاب را تغییر می‌دهد، محاسبه این تغییرات در تخمین مختصات محل اصابت موشکهای غیر هدایت شونده کمک مؤثری می‌کند.

در این مقاله یک الگوی عددی مبتنی بر روش تأثیرگذاری سازه‌ای (1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6) و (7) ارائه شده است که با استفاده از آن می‌توان تنشهای دینامیکی، تغییر شکل‌های سازه پرتاب در هر لحظه و همچنین شرایط اولیه پرتاب موشک در لحظه جدا شدن را محاسبه کرد. براساس این الگوی عددی، یک بسته نرم‌افزار تهیه شده و در پایان مقاله یک مثال با بهره‌گیری از این بسته نرم‌افزار حل شده است که تواناییهای الگوی مورد بحث را تا حدودی منعکس می‌سازد.

مقدمه:

جسم متحرک و سازه نگهدارنده آن است، این عامل به ویژه در مسئله مورد بحث که جرم متحرک در مقایسه با جرم سازه زیاد است، ارتعاشات سازه را تحت الشعاع قرار می‌دهد. از ویژگیهای روش تأثیرگذاری سازه‌ای که در این مقاله به کار رفته است در مقایسه با روشهای عددی دیگر معمول مانند روش اجزاء محدود^۲ و روش تفاوتهای محدود^۳ این است که عامل مذکور را به راحتی می‌توان مورد توجه قرار داد (5). از ویژگیهای دیگر این روش، توانایی آن در بررسی ارتعاشات سازه‌های پیچیده تحت بارهای متحرک است، به شرطی که تحلیل استاتیکی آنها امکان‌پذیر باشد، همچنین با استفاده از این روش به راحتی

سازه سکوی پرتاب موشک طی عمل پرتاب تحت تأثیر بارهای متحرک ناشی از جرم موشک قرار می‌گیرد. طبیعت این بارها با توجه به تغییر موقعیت آنها روی سازه، دینامیکی است. در این مقاله سازه سکوی پرتاب موشک به صورت یک قاب مسطح و موشک به صورت یک جسم صلب که جرمش در طول آن به طور دلخواه توزیع شده الگوسازی شده است، همچنین فرض می‌شود که موشک از طریق دو تکیه‌گاه غلطکی با سکوی پرتاب تماس دارد و حرکت آن در زمان پرتاب شتابدار است.

یکی از عوامل مهمی که در ارتعاشات سازه‌های تحت بارهای متحرک مطرح است عامل اندرکنش^۴ میان

*- استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

** - عضو هیئت علمی دانشکده فنی دانشگاه تهران

1- Structural Impedance Approach

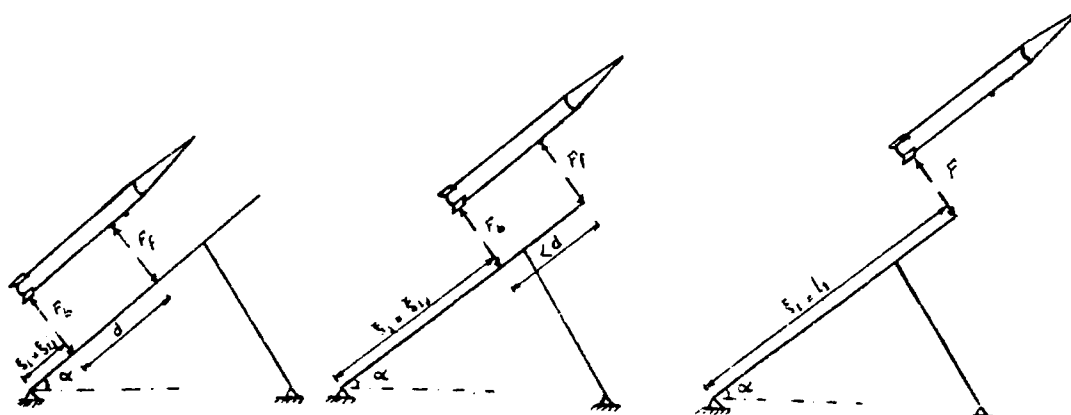
3- Finite Element

2- Interaction

4- Finite Difference

می‌توان اثر بارهای متحرک شتابدار را روی سازه‌ها بررسی کرد. در مسئله مورد بررسی بارهای متحرک از طریق دو تکیه‌گاهی که قبلاً اشاره شد به سکو انتقال می‌یابند، بنابراین چنانکه در شکل (۱) می‌بینیم مسئله مورد بحث به یک قاب مسطح که بسته به موقعیت موشک روی سکو تحت تأثیر دو یا یک بار متمرکز متحرک قرار دارد خلاصه

می‌توان اثر بارهای متحرک شتابدار را روی سازه‌ها بررسی کرد. در مسئله مورد بررسی بارهای متحرک از طریق دو تکیه‌گاهی که قبلاً اشاره شد به سکو انتقال می‌یابند، بنابراین چنانکه در شکل (۱) می‌بینیم مسئله مورد بحث به یک قاب مسطح که بسته به موقعیت موشک روی سکو تحت تأثیر دو یا یک بار متمرکز متحرک قرار دارد خلاصه



شکل (۱-الف) طرحواره پیکره

آزادسکوی پرتاب در مرحله اول

شکل (۱-ب) طرحواره پیکره

آزادسکوی پرتاب در مرحله دوم

شکل (۱-ج) طرحواره پیکره آزاد

سکوی پرتاب در آستانه جدا شدن موشک

و سطح شیار وجود نداشته باشد.
۴- ارتعاشهای سکو صرفاً از حرکت موشک با سرعت و شتاب دلخواه بر روی سکو ناشی می‌شود و نقش عوامل دیگر مانند گازهای خارج شده از موشک و سایر عوامل قابل توجه نیست، همچنین فرض می‌شود که تغییر جرم موشک طی عمل پرتاب یعنی از زمان آغاز تا لحظه جدا شدن کامل از روی سکو ناچیز است.

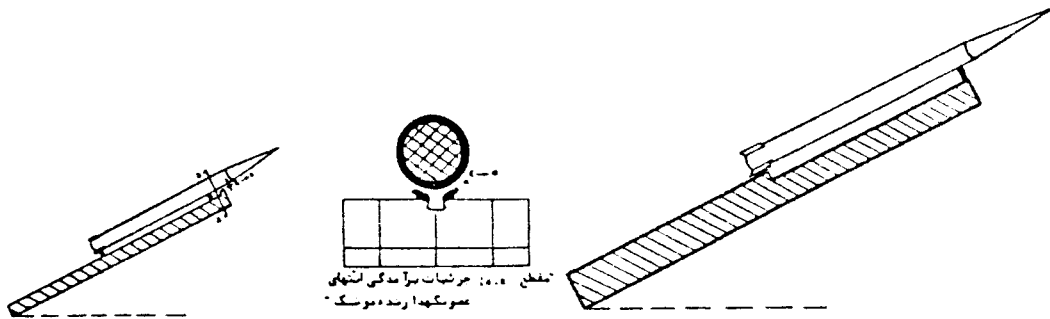
۵- در موقع جدا شدن تکیه‌گاه جلویی موشک از روی سکو، بدنه موشک ضربه قابل توجهی به سکو وارد نمی‌آورد. برای تأمین شرایط عملی لازم جهت برآوردن فرض اخیر، تدابیری به کار می‌روند که نمونه‌هایی از آنها در شکل (۲) دیده می‌شوند.

شرح و بدست آوردن معادله‌های حاکم:

برای به دست آوردن معادله‌های حاکم بر ارتعاشات مورد بررسی از روش تأثیرگذاری سازه‌ای استفاده شد که بر اصل جمع آثار مبتنی است. فرضهای مسئله عبارت‌اند از:
۱- تغییر شکل‌های سازه کوچک است و قانون هوک^۲ در مورد آن صادق است تغییر شکل‌های برشی اعضای سازه چندان نیست.

۲- نیروی میرایی سازه با سرعت ارتعاش آن به‌طور خطی متناسب است.

۳- بدنه موشک صلب است و تکیه‌گاه‌های آن در داخل شیار روی سکو می‌توانند به صورت غلطکی حرکت کنند به گونه‌ای که در راستای عمود بر محور بدنه هیچ‌گونه حرکت نسبی بین تکیه‌گاه‌های مذکور



شکل (۲-ب) - در انتهای سکو یک برآمدگی موجود است که با بدنه موشک فاصله بسیار کمی دارد. ($\epsilon \rightarrow 0$) و در لحظه جدا شدن، تکیه گاه جلویی موشک بدون وارد آمدن ضربه محسوس بر آن تکیه می کند.

شکل (۲-الف) عضو نگهدارنده موشک صورت پله ای دارد در نتیجه دو تکیه گاه موشک به طور همزمان جدا می شوند و ضربه ای به سکو وارد نمی آید.

تأثیرگذاری سازه ای با توجه به اصل جمع آثار به صورت زیر به دست می آید (۶) و (۷):

معادله کلی حاکم بر ارتعاش قابها در روش

$$\Delta(x_k, t) + \sum_{\bar{k}=1}^m \int_0^{l_{\bar{k}}} \underline{C}(x_k, x_{\bar{k}}) \left\{ \underline{M}_{x_{\bar{k}}} \frac{\partial^2 \Delta(x_{\bar{k}}, t)}{\partial t^2} + \underline{C}_{x_{\bar{k}}} \frac{\partial \Delta(x_{\bar{k}}, t)}{\partial t} \right\} dx_{\bar{k}} = \sum_{j=1}^n \underline{C}(x_k, \xi_j) F(\xi_j) \quad (1)$$

شرایط مسئله بسط داد. در این راستا با توجه به شکل (۱) ملاحظه می شود که بسته به موقعیت موشک بر روی سکو، ابتدا دو نیروی متمرکز متحرک F_b ، F_f که از آغاز حرکت تا زمان جدا شدن تکیه گاه جلویی موشک به فاصله ثابت d از یکدیگر قرار دارند، پس از جدا شدن تکیه گاه جلویی، نیروی F_f با موقعیت ثابت در انتهای سکو و نیروی F_b متحرک، روی آن اعمال می شوند و بالاخره در لحظه جدا شدن موشک تنها یک نیروی F در انتهای سکو قرار می گیرد. بنابراین پرتاب موشک تا زمان جدا شدن موشک از روی سکو سه مرحله دارد، مرحله اول از ابتدای حرکت آغاز می شود و در زمان جدا شدن تکیه گاه جلویی موشک پایان می گیرد، مرحله دوم از لحظه جدا شدن تکیه گاه مذکور شروع می شود و تا لحظه قبل از جدا شدن کامل موشک ادامه دارد و مرحله سوم لحظه ای است که تنها تکیه گاه عقبی موشک با انتهای سکو در تماس است.

که در آن $\Delta[x_k, t]$ بردار تغییر مکان نقطه ای است به مختصات x_k روی عضو k ام قاب در زمان t که سه مؤلفه افقی، قائم و چرخشی دارد. $\underline{C}[x_k, x_{\bar{k}}]$ ، ماتریس نرمی نقطه ای به مختصات x_k از عضو k ام است که دربرگیرنده مؤلفه های تغییر مکان آن نقطه در اثر اعمال بردار نیروی واحد در نقطه ای به مختصات $x_{\bar{k}}$ روی عضو \bar{k} ام قاب است. $\underline{M}_{x_{\bar{k}}}$ و $\underline{C}_{x_{\bar{k}}}$ ، به ترتیب نشان دهنده ماتریسهای جرم و میرایی واحد طول عضو \bar{k} ام در نقطه ای به مختصات محلی $x_{\bar{k}}$ روی آن اند. $F[\xi_i]$ بردار نیروی متمرکز متحرک در نقطه ای به مختصات محلی ξ_i روی عضو i ام قاب است و $l_{\bar{k}}$ ، m و n به ترتیب عبارت انداز طول عضو \bar{k} ام قاب، تعداد اعضای قاب و تعداد بارهای متمرکز متحرک روی اعضای قاب.

برای بدست آوردن معادله حاکم بر ارتعاشهای سکوی پرتاب، سمت راست معادله (۱) را باید متناسب با

گذشت مورد پیدا می‌کند.
 در مرحله اول پرتاب چنانچه ξ_f و ξ_b به ترتیب
 مختصات محلی تکیه‌گاه جلویی و عقبی موشک باشند
 می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \underline{C}(x_k, \xi_i) \underline{E}(\xi_i) = \underline{C}(x_k, \xi_b) \underline{E}_b + \underline{C}(x_k, \xi_f) \underline{E}_f$$

مراحل سه‌گانه بالا در صورتی مورد دارند که از
 روش شکل (۲-ب) برای جلوگیری از وارد آمدن ضربه به
 سکو استفاده شده باشد و هرگاه روش شکل (۲-الف)
 به کار رفته باشد تنها مرحله اول پرتاب به شرحی که

هرگاه α زاویه‌ای باشد که محور موشک با محور
 افقی می‌سازد رابطه بین بردارهای \underline{E}_b و \underline{E}_f با نیروی F_f و
 F_b در جهت عمود بر محور موشک چنین به دست می‌آید.

$$\underline{E}_b = F_b \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} = F_b \underline{R}, \quad \underline{E}_f = F_f \underline{R}$$

از نشانیدن روابط اخیر در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\underline{\Delta}(x_k, t) + \sum_{k=1}^m \int_0^{x_k} \underline{C}(x_k, x_k) \left\{ \underline{M}_{x_k} \frac{\partial^2 \underline{\Delta}(x_k, t) + \underline{C}_{x_k}}{\partial t^2} \underline{\Delta}(x_k, t) \right\} dx_k =$$

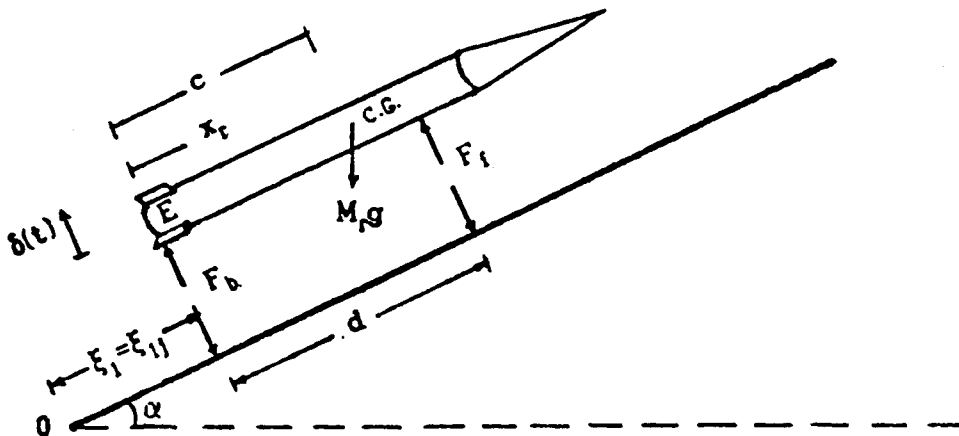
$$\left\{ \underline{C}(x_k, \xi_b) F_b + \underline{C}(x_k, \xi_f) F_f \right\} \underline{R} \quad (2)$$

مناسب برای به دست آوردن پارامترهای مذکور با توجه به
 بیکره طرحواره آزاد موشک در شکل (۳) از معادله‌های
 تعادل نیروها در جهت عمود بر محور موشک همچنین
 نگرهان نسبت به نقطه E انتهای موشک چنین بدست می‌آید:

معادله (۲) با توجه به اینکه F_b و F_f در آن مقادیر
 معلومی نیستند، قابل حل نیست، این پارامترها به وزن
 موشک همچنین به نیروی لختی موشک ناشی از
 ارتعاشهای سکوطی عمل پرتاب بستگی دارند. روابط

$$F_f = \frac{1}{d} \left\{ c M_r g \cos \alpha + \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} dx_r \right\} \quad (3)$$

$$F_b = \frac{d-c}{d} M_r g \cos \alpha + \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} dx_r$$



شکل (۳) - «طرحواره بیکره آزاد موشک و بخشی از سکو در مرحله اول پرتاب»

در این روابط l_r ، طول موشک، $\bar{m}_r(x_r)$ جرم واحد طول آن در نقطه‌ای به مختصات محلی x_r و $\delta(t)$ ، تغییر

با توجه به فرض سوم مسئله و با توجه به شکل (۴)، رابطه بین δ_s تغییر مکان یکی از تکیه‌گاهها در جهت عمود بر محور موشک با Δ تغییر مکان در مختصات کلی نقطه‌ای از سکو که با آن تکیه‌گاه تماس دارد چنین به دست می‌آید.

در روابط بالا Δ_x ، Δ_y و θ به ترتیب مؤلفه‌های افقی، عمودی و چرخش بردار تغییر مکان Δ می‌باشند.

بنابراین اگر تغییر مکانهای نقاطی از سازه که با تکیه‌گاههای جلوئی و عقبی موشک در تماس‌اند در زمان t به ترتیب $\underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, t)$ و $\underline{\Delta}(\xi_{1j}, t)$ باشند که ξ_{1j} مختصات محلی تکیه‌گاه عقبی موشک روی سکو است. می‌توان نوشت:

$$\delta_f(t) = \underline{R}_o^T \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, t), \quad \delta_b(t) = \underline{R}_o^T \underline{\Delta}(\xi_{1j}, t)$$

از نشان دادن آنها در معادله (۴) به دست می‌آید:

$$\delta(t) = \underline{R}_o^T \left\{ \frac{x_r}{d} \underline{\Delta}(\xi_{1(g+n_d)}, t) + \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) \underline{\Delta}(\xi_{1j}, t) \right\} \quad (5)$$

فواصل مساوی $\Delta \xi$ ضرورت دارد که به راحتی برگزیده می‌شوند و زمینه را برای داشتن حل عددی ساده و پایدار فراهم می‌آورند (5).

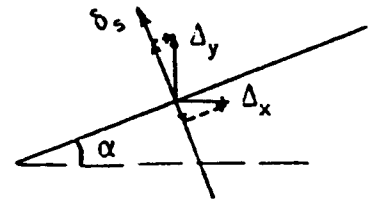
۳- با توجه به داشتن $\Delta \xi$ های برابر روی سکو، این ایستگاههای فرضی را به راحتی می‌توان روی گرههای مشخص و از پیش تعریف شده‌ای روی سکو قرار داد. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری از معادله (5) می‌توان نتیجه گرفت که:

مکان نقاط موشک در جهت عمود بر محور آن در زمان t است. اگر $\delta_f(t)$ و $\delta_b(t)$ به ترتیب تغییر مکان نقاط تکیه‌گاههای جلوئی و عقبی موشک در جهت عمود بر محور آن در زمان t باشند، با توجه به فرض صلب بودن بدنه موشک می‌توان نوشت:

$$\delta(t) = \frac{x_r}{d} \delta_f(t) + \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) \delta_b(t) \quad (4)$$

$$\delta_s = -\Delta_x \sin \alpha + \Delta_y \cos \alpha$$

$$\delta_s = (-\sin \alpha \cos \alpha \ 0) \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \theta \end{Bmatrix} = \underline{R}_o^T \underline{\Delta}$$



شکل (۴) - محورهای نشان‌دهنده تغییر مکان تکیه‌گاههای موشک و مؤلفه‌های تغییر مکان نقاط سازه در تماس با آنها

در این مرحله از تغییر متغیر ξ_{1j} به جای متغیر زمان t استفاده خواهد شد، انجام این کار دارای ویژگیهای زیر است.

۱- پارامترهای سرعت و شتاب موشک مستقیماً وارد معادله‌های حاکم بر مسئله می‌شوند در نتیجه بررسی حساسیت پاسخ مسئله در رابطه با این پارامترها به راحتی امکان‌پذیر خواهد بود.

۲- در حل عددی معادله‌های حاکم بر مسئله، داشتن تعدادی نقاط فرضی روی سکو به عنوان ایستگاه با

$$\frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} = \underline{R}^T \left[\dot{v}(\xi_1) \left\{ \frac{x_r}{d} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\} \right] \quad (6)$$

$$+ v^2(\xi_1) \left\{ \frac{x_r}{d} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\}$$

از ترکیب معادله‌های (۲) و (۳) و (۶)، معادله حاکم بر ارتعاشهای سکودر مرحله اول چنین نتیجه می‌شود.

$$\underline{\Delta}(x_k, \xi_1) + \sum_{\bar{k}=1}^m \int_0^{1_{\bar{k}}} \underline{C}(x_k, x_{\bar{k}}) \left[v^2(\xi_1) \underline{M}_{x_{\bar{k}}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_{\bar{k}}, \xi_1) + \right.$$

$$\left. \left\{ \dot{v}(\xi_1) \underline{M}_{x_{\bar{k}}} + v(\xi_1) \underline{C}_{x_{\bar{k}}} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(x_{\bar{k}}, \xi_1) \right] dx_{\bar{k}} =$$

$$\frac{1}{d} \left\{ (d-c) \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + c \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \right\} M_{rg} \cos \alpha \underline{R}$$

$$+ \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) \underline{R}^T \left[v(\xi_1) \left\{ I_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + I_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\} \right]$$

$$+ v^2(\xi_1) \left\{ I_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\}$$

$$+ \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \underline{R}^T \left[\dot{v}(\xi_1) \left\{ I_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + I_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\} \right] \quad (7)$$

$$+ v^2(\xi_1) \left\{ I_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_1) + I_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\}$$

هرگاه سکوی پرتاب نوع شکل (۲-الف) مدنظر باشد، تا لحظه جدا شدن موشک تنها معادله (۷) حاکم است و از آن لحظه به بعد ارتعاشهای آزاد سازه حاکم می‌شود و اگر سکوی پرتاب نوع شکل (۲-ب) مدنظر باشد ارتعاشات سازه در مرحله دوم به شرحی که خواهد آمد حاکم خواهد بود.

در مرحله دوم با توجه به اینکه دوبار متمرکز روی سازه اعمال می‌شوند که یکی دارای موقعیت ثابت در انتهای سکو است، معادله (۱)، چنین بسط می‌یابد.

که در آن I_1 ، I_2 و I_3 تابعهایی از جرم موشک در طول آناند و از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$I_1 = \int_0^{1_r} \bar{m}_r(x_r) \left(1 - \frac{x_r}{d}\right)^2 dx_r$$

$$I_2 = \int_0^{1_r} \bar{m}_r(x_r) \left(\frac{x_r}{d}\right)^2 dx_r$$

$$I_3 = \int_0^{1_r} \bar{m}_r(x_r) \frac{x_r}{d} \left(1 - \frac{x_r}{d}\right) dx_r$$

$$\underline{\Delta}(x_k, t) + \sum_{\bar{k}=1}^m \int_0^{l_{\bar{k}}} \underline{C}(x_k, x_{\bar{k}}) \left\{ \underline{M}_{x_{\bar{k}}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\Delta}(x_{\bar{k}}, t) + \underline{C}_{x_{\bar{k}}} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Delta}(x_{\bar{k}}, t) \right\} dx_{\bar{k}} =$$

$$\left\{ \underline{C}(x_k, \xi) F_b + \underline{C}(x_k, l_1) F_f \right\} \underline{R} \quad (8)$$

در این رابطه $[x_k$ و $l_1]$ ، ماتریس نرمی نقطه‌ای به مختصات x_k به ازای اعمال بردار بار واحد در نقطه انتهای سکو است. برای تعیین معادله‌های حاکم بر F_f و F_b

$$F_f = \frac{1}{(l_1 - \xi_1)} \left\{ c M_{rg} \cos \alpha + \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} dx_r \right\} \quad (9)$$

$$F_b = \frac{(l_1 - \xi_1) - c}{(l_1 - \xi_1)} M_{rg} \cos \alpha + \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) \left(1 - \frac{x_r}{(l_1 - \xi_1)} \right) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} dx_r$$

با توجه به فرض صلب بودن موشک، $\delta(t)$ در این مرحله از رابطه زیر به دست آید.

$$\delta(t) = \underline{R}_0^T \left\{ \frac{x_r}{l_1 - \xi_1} \underline{\Delta}(l_1, t) + \left(1 - \frac{x_r}{l_1 - \xi_1} \right) \underline{\Delta}(\xi_{1j}, t) \right\} \quad (10)$$

که در آن $\delta_f(t)$ و $\delta_b(t)$ در این مرحله عبارت‌اند از: مشتق‌گیری از آن نسبت به t خواهیم داشت:

$$\delta_f(t) = \underline{R}_0^T \underline{\Delta}(l_1, t) \quad \text{و} \quad \delta_b(t) = \underline{R}_0^T \underline{\Delta}(\xi_{1j}, t)$$

$$\frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} = \underline{R}_0^T \left[v^2(\xi_1) \left\{ \frac{x_r}{(l_1 - \xi_1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) + \left(1 - \frac{x_r}{l_1 - \xi_1} \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\} \right.$$

$$+ \frac{x_r}{(l_1 - \xi_1)} \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(l_1 - \xi_1)} + \dot{v}(\xi_1) \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(l_1 - \xi_1)$$

$$- \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(l_1 - \xi_1)} \frac{x_r}{(l_1 - \xi_1)} - \dot{v}(\xi_1) \left(1 - \frac{x_r}{l_1 - \xi_1} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1)$$

$$\left. + \frac{x_r}{(l_1 - \xi_1)} \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(l_1 - \xi_1)^2} + \frac{\dot{v}(\xi_1)}{(l_1 - \xi_1)} \right\} \left\{ \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) - \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) \right\} \right] \quad (11)$$

از ترکیب معادله‌های (۸) و (۹) و (۱۱) معادله حاکم برابر تعاشهای سکودر در مرحله دوم چنین به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 & \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) + \sum_k^m \int_0^{1k} \underline{C}(x_k, x_k) \left[v^2(\xi_1) \underline{M}_{x_k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) + \right. \\
 & \left. \left\{ v(\xi_1) \underline{M}_{x_k} + v(\xi_1) \underline{C}_{x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) \right] dx_k = \\
 & \frac{1}{(1-\xi_1)} \left\{ (1-\xi_1-c) \underline{C}(x_k, \xi_1) + c \underline{C}(x_k, 1) \right\} M_{rg} \cos \alpha \underline{R} \\
 & + \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) \underline{RR}_0^T \left[v^2(\xi_1) \left\{ \bar{I}_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) + \bar{I}_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(1_1-\xi_1) \right\} \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)} \bar{I}_3 - \dot{v}(\xi_1) \bar{I}_1 \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) + \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)} + \dot{v}(\xi_1) \right\} \bar{I}_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)^2} + \frac{\dot{v}(\xi_1)}{(1-\xi_1)} \right\} \bar{I}_3 \left\{ \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) - \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right\} \right] \\
 & + \underline{C}(x_k, 1) \underline{RR}_0^T \left[v^2(\xi_1) \left\{ \bar{I}_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) + \bar{I}_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(1_1-\xi_1) \right\} \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)} \bar{I}_2 - \dot{v}(x_1) \bar{I}_3 \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) + \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)} + \dot{v}(\xi_1) \right\} \bar{I}_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{2v^2(\xi_1)}{(1-\xi_1)^2} + \frac{\dot{v}(\xi_1)}{(1-\xi_1)} \right\} \bar{I}_2 \left\{ \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_1) - \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right\} \right] \tag{۱۲}
 \end{aligned}$$

در پایان مرحله دوم پرتاب، تکیه‌گاه انتهایی موشک و نقطه انتهایی سکو که در طول زمان مرحله دوم به صورت تکیه‌گاه برای بدنه موشک عمل کرد برهم منطبق می‌شوند و موشک تنها یک تکیه‌گاه در انتهای خود خواهد داشت. طرحواره پیکره آزاد موشک و سکو در این لحظه را شکل (۱-ج) نشان می‌دهد. معادله حاکم بر ارتعاشهای سازه در این لحظه به شرحی که خواهد آمد تعیین می‌شود. با توجه به شکل (۱-ج) معادله (۱) به صورت زیر بسط می‌یابد.

در معادله بالا \bar{I}_2, \bar{I}_1 و \bar{I}_3 تابعهایی از توزیع جرم موشک در طول آن‌اند و از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\bar{I}_1 = \int_0^{1r} \bar{m}_r(x_r) \left(1 - \frac{x_r}{1-\xi_1} \right)^2 dx_r$$

$$\bar{I}_2 = \int_0^{1r} \bar{m}_r(x_r) \left(\frac{x_r}{1-\xi_1} \right)^2 dx_r$$

$$\bar{I}_3 = \int_0^{1r} \bar{m}_r(x_r) \frac{x_r}{1-\xi_1} \left(1 - \frac{x_r}{1-\xi_1} \right) dx_r$$

$$\underline{\Delta}(x_k, t) + \sum_k^m \int_0^{l_k} \underline{C}(x_k, x_k) \left\{ \underline{M}_{x_k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\Delta}(x_k, t) + \underline{C}_{x_k} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Delta}(x_k, t) \right\} dx_k = \underline{C}(x_k, l_1) F \underline{R} \quad (13)$$

برای تعیین معادله حاکم بر F، معادله های حاکم بر تعادل دینامیکی بدنه موشک در این لحظه نوشته می شود:

$$F = M_{rg} \cos \alpha + \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_1) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_f} dx_r \quad (14)$$

$$\int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) \frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_f} dx_r = -c M_{rg} \cos \alpha \quad (15)$$

در معادله های بالا $\frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_f}$ عبارت است از مشتق تغییر مکان موشک در جهت عمود بر محور آن نسبت به زمان در لحظه t_f و t_f ، نشانه دهنده زمان جدا شدن موشک از روی سکوست. با توجه به فرض صلب بودن بدنه موشک، اگر $\delta_b(t_f)$ و $\theta(t_f)$ به ترتیب تغییر مکان نقطه انتهای موشک در جهت عمود بر محور آن و تغییر مکان چرخشی آن در لحظه t_f باشند، داریم.

$$\delta(t_f) = \delta_b(t_f) + \theta(t_f) x_r = \underline{R}_0^T \underline{\Delta}(l_1, t) + \theta(t_f) x_r \quad (16)$$

با دوبار مشتق گیری متوالی نسبت به t از معادله بالا و استفاده از تغییر متغیر ξ به جای t ، به دست می آید:

$$\left[\frac{\partial^2 \delta(t)}{\partial t^2} \right]_{t=t_f} = \underline{R}_0^T \left\{ \bar{v}(l_1) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} + v^2(l_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} \right\} + \left[\frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial t^2} \right]_{t=t_f} x_r \quad (17)$$

در این رابطه $v[l_1]$ و $\dot{v}[l_1]$ به ترتیب سرعت و شتاب موشک در لحظه t_f انداز ترکیب معادله های (15) و (17) خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial^2 \theta(t)}{\partial t^2} \right]_{t=t_f} = \frac{-1}{J_3} \left[c M_{rg} \cos \alpha + J_2 \underline{R}_0^T \left\{ \dot{v}(l_1) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} + v^2(l_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} \right\} \right] \quad (18)$$

و از ترکیب معادله های (14)، (17) و (18) داریم

و از ترکیب معادله‌های (۱۴)، (۱۷) و (۱۸) داریم

$$F = (1 - c \frac{J_2}{J_3}) M_{rg} \cos \alpha + (J_1 - \frac{J_2^2}{J_3}) \mathbb{R}^T \left\{ \dot{v}(1_1) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right. \\ \left. + v^2(1_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right\} \quad (19)$$

که در آنها J_1 ، J_2 و J_3 عبارت‌اند از.

$$J_1 = \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) dx_r = M_r, \quad J_2 = \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) x_r dx_r, \quad J_3 = \int_0^{l_r} \bar{m}_r(x_r) x_r^2 dx_r$$

چپ آن، معادله حاکم بر ارتعاشهای سازه در لحظه جدا شدن موشک چنین به دست می‌آید.

از نشانیدن معادله (۱۹) درست راست معادله (۱۳) و با در نظر گرفتن متغیر ξ_1 به جای t درست

$$\underline{\Delta}(x_k, 1_1) + \sum_k^m \int_0^{1_k} \underline{C}(x_k, x_k) \left[v^2(1_1) \underline{M}_{x_k} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right. \\ \left. + \{v(1_1) \underline{M}_{x_k} + v(1_1) \underline{C}_{x_k}\} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right] dx_k =$$

$$\underline{C}(x_k, 1_1) \left[1 - c \frac{J_2}{J_3} \right] M_{rg} \cos \alpha \mathbb{R} + (J_1 - \frac{J_2^2}{J_3}) \mathbb{R}^T \left\{ \dot{v}(1_1) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right. \\ \left. + v^2(1_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(1_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=1_1} \right\} \quad (20)$$

برای بدست آوردن رابطه حاکم بر مسئله در این مرحله کافی است سمت راست معادله (۱) برابر با صفر قرار دهیم، در نتیجه خواهیم داشت:

پس از جدا شدن موشک از روی سکو، ارتعاشهای آزاد با توجه به شرایط ابتدائی^۱ مربوط به لحظه جدا شدن موشک برقرار می‌شود، این ارتعاشات با توجه عامل میرائی به تدریج از بین می‌رود.

$$\Delta(x_k, t) + \sum_k^m \int_0^{1k} \underline{C}(x_k, x_k) \{ \underline{M}_{x_k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta(x_k, t) + \underline{C}_{x_k} \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_k, t) \} dx_k = 0 \quad (21)$$

معین به کار رفته است.

در مورد روش تفاوت‌های محدود در حالت کلی روابط (۲۲) بین مشتقات اول و دوم تابع یک متغیره $\beta(\xi)$ نسبت به ξ در نقطه‌ای به مختصات $\xi_1 = \xi_j$ و مقادیر تابع در نقاط مورد نظر برقرار است (2).

حل عددی معادله‌های حاکم بر مسئله:

معادلات حاکم بر مسئله در مراحل مختلف پرتاب از نوع انتگرالی - دیفرانسیلی است که برای تبدیل آنها به معادله‌های جبری قابل حل، روش عددی تفاوت‌های محدود همچنین روش‌های عددی مربوط به محاسبه انتگرال‌های

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \beta(\xi) \right]_{\xi=\xi_j} = \frac{1}{h} \left[\sum_{i=0}^q a_i \beta(\xi_{j-i}) \right] + O(h^{q-1}), \quad a_q = 0 \quad (22)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \beta(\xi) \right]_{\xi=\xi_j} = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=0}^q b_i \beta(\xi_{j-i}) \right] + O(h^{q-1})$$

خطا کمتر خواهد بود.

برای تبدیل انتگرالها به عبارت جبری ساده از روش‌های عددی محاسبه انتگرال‌های معین استفاده شده است که رابطه کلی مربوطه برای تابع یک متغیره $f(x)$ چنین است.

در این روابط، h فاصله بین دو نقطه متوالی روی محور ξ و a_i, b_i, q که عدد صحیحی است، اعدادی هستند که به نوع تفاوت‌های محدود و مرتبه آنها بستگی دارند و $O(h^{q-1})$ مقدار خطا را نشان می‌دهد که تابعی از h^{q-1} است، یعنی هرچه h کوچکتر انتخاب شود مقدار

$$\int_D f(x) dx = \sum_{i=1}^{N+1} \omega_i H f(x_i) \quad (23)$$

در نقطه x_i هستند.

با توجه به روابط (۲۲) در مورد تابع $\Delta(x_k, \xi_1)$ می‌توان نوشت:

در این رابطه D ، نشاندهنده انتگرالگیری و N تعداد تقسیمات مساوی به طول H روی آن محدوده است. ω_i و $f(x_i)$ نیز به ترتیب ضریب وزنی انتگرالگیری و مقدار تابع

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \Delta(x_k, \xi_1) \right]_{\xi_1=\xi_{1j}} \cong \frac{1}{h} \sum_{i=0}^q a_i \Delta(x_k, \xi_{1(j-i)}) \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1^2} \Delta(x_k, \xi_1) \right]_{\xi_1=\xi_{1j}} \cong \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^q b_i \Delta(x_k, \xi_{1(j-i)})$$

نتیجه گرفت.

به همین ترتیب از روابط (۲۳) می‌توان رابطه زیر را

به همین ترتیب از روابط (۲۳) می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

$$\int_0^{l_k} \underline{C}(x_k, x_k) \left[v^2(\xi_1) M_{x_k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) + \left\{ v(l_1) M_{x_k} + v(\xi_1) \underline{C}_{x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_k, \xi_1) \right] dx_k$$

$$\sum_{kk=1}^{N_k+1} \underline{C}(x_k, x_{kk}) f_{kk} h_k \left\{ v^2(\xi_1) M_{x_{kk}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(x_{kk}, \xi_1) + (v(\xi_1) M_{x_{kk}} + v(\xi_1) \underline{C}_{x_{kk}}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(x_{kk}, \xi_1) \right\} \quad (25)$$

در رابطه اخیر N_k ، تعداد تقسیمات مساوی روی عضو \bar{k} از قاب مربوط به سازه سکوست x_{kk} ، مختصات طولی محلی نقاط روی عضو مذکور است که برای انتگرالگیری عددی معرفی می شوند و h_k ، فاصله بین نقاط روی آن عضو و f_{kk} ضریب وزنی مربوط به روش انتگرالگیری عددی است. از نشان دادن روابط (۲۴) و (۲۵) در معادله (۷) و سپس ساده کردن آن چنین به دست می آید.

$$h_1^2 \underline{\Delta}(x_k, \xi_{1j}) + \sum_{k=1}^m \sum_{kk=1}^{N_k+1} \underline{C}(x_k, x_{kk}) f_{kk} h_k \left\{ A_0(\xi_{1j}) M_{x_{kk}} + h_1 a_0 v(\xi_{1j}) \underline{C}_{x_{kk}} \right\}$$

$$\underline{\Delta}(x_{kk}, \xi_{1j}) - A_0(\xi_{1j}) \{ I_1 \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + I_3 \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \} \underline{RR}^T \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_{1j})$$

$$- A_0(\xi_{1j}) \{ I_3 \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + I_2 \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \} \underline{RR}^T \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_{1j}) =$$

$$\frac{h_1^2}{d} \{ (d-c) \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + c \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \} M_r g \cos \alpha \underline{R}$$

$$- \sum_{k=1}^m \sum_{kk=1}^{N_k+1} \underline{C}(x_k, x_{kk}) f_{kk} h_k \sum_{i=1}^q [A_i(\xi_{1j}) M_{x_{kk}} + h_1 a_i v(\xi_{1j}) \underline{C}_{x_{kk}}]$$

$$\underline{\Delta}(x_{kk}, \xi_{1(j-i)}) + \{ I_1 \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + I_3 \underline{C}(x_k, \xi_{1(j-n_d)}) \} \underline{RR}^T \sum_{i=1}^q A_i(\xi_{1j}) \underline{\Delta}(\xi_{1j}, \xi_{1(j-i)})$$

$$+ \{ I_3 \underline{C}(x_k, \xi_{1j}) + I_2 \underline{C}(x_k, \xi_{1(j+n_d)}) \} \underline{RR}^T \sum_{i=1}^q A_i(\xi_{1j}) \underline{\Delta}(\xi_{1(j+n_d)}, \xi_{1(j-i)}) \quad (26)$$

که در آن $A_i(\xi_{1j})$ که تابعی از ضرایب a_i و b_i و نیز سرعت و شتاب موشک در موقعیت $\xi_{1j} = \xi_1$ است به صورت زیر است.

تغییر مکان نقاط سازه در زمانهای مختلف طی مرحله دوم پرتاب به دست می‌آید. معادله حاکم در لحظه جدا شدن موشک از نشانندن روابط (۲۴) و (۲۵) د معادله (۲۰) و ساده کردن آن چنین به دست می‌آید.

$$h_1^2 \underline{\Delta}(x_k, l_1) + \sum_{k=1}^m \sum_{kk=1}^{N_k+1} \underline{C}(x_k, x_{kk}) f_{kk} h_{kk} \left\{ A_o(l_1) \underline{M}_{x_k} + h_1 a_{ov}(l_1) \underline{C}_{x_{kk}} \right\} \underline{\Delta}(x_{kk}, \xi l_1)$$

$$- (J_1 \frac{J_2}{J_3}) A_o(l_1) \underline{C}(x_k, l_1) \underline{R} \underline{R}^T \underline{\Delta}(l_1, l_1) =$$

$$h_1^2 (1-c \frac{J_2}{J_3}) M_{rg} \cos \alpha \underline{C}(x_k, l_1) \underline{R} - \sum_{i=1}^q \sum_{k=i}^m \sum_{kk=1}^{N_k+1} f_{kk} h_{kk} \underline{C}(x_k, x_{kk})$$

$$\{ A_i(l_1) \underline{M}_{x_{kk}} + h_1 a_{iv}(l_1) \underline{C}_{x_{kk}} \} \underline{\Delta}(x_{kk}, l_1 - ih_1) + (J_1 \frac{J_2}{J_3})$$

$$\sum_{i=1}^q A_i(l_1) \underline{C}(x_k, l_1) \underline{R} \underline{R}^T \underline{\Delta}(l_1, l_1 - ih_1) \quad (28)$$

سه پارامتر را شامل می‌شود که عبارت‌اند از دو پارامتر مربوط به مختصات نقطه انتهای موشک و دیگر زاویه محور آن با امتداد افقی. مختصات نقطه پایان موشک که همان مختصات نقطه انتهای سکوی پرتاب در لحظه جدا شدن موشک است به راحتی با توجه به تغییر مکانهای تعیین شده در آن لحظه به دست می‌آید.

برای محاسبه زاویه مورد نظر محور موشک با امتداد افقی، ابتدا باید تغییر زاویه آن نسبت به زاویه ابتدایی مربوط به حالت سکون را به دست آورد، برای این منظور با توجه به قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری و همچنین روابط (۲۲) می‌توان نوشت.

$$\left[\frac{\partial^2 \theta(l)}{\partial t^2} \right]_{t=t_f} = \sum_{i=0}^q \left(\frac{\dot{v}(l_1)}{h_1} a_i + \frac{v^2(l_1)}{h_1^2} b_i \right) \theta(l_1 - ih_1) \quad (29)$$

پیش از جدا شدن موشک از نشانندن رابطه بالا در معادله (۱۸) و سپس ساده کردن آن خواهیم داشت.

با اعمال معادله بالا به کلیه نقاط قاب می‌توان این معادله را به صورت ماتریسی $\underline{\Delta} = \underline{F} \underline{K}$ نوشت که از حل آن مجهولهای مورد نظر یعنی بردار $\underline{\Delta}$ در برگیرنده

در معادله بالا $\underline{\Delta}(x_{kk}, l_1 - ih_1)$ و $\underline{\Delta}(l_1, l_1 - ih_1)$ ترتیب عبارت‌اند از بردار تغییر مکان نقطه‌ای به مختصات محلی x_{kk} روی یکی از اعضای قاب و بردار تغییر مکان نقطه انتهای سکوی پرتاب در گام قبل از لحظه جدا شدن موشک.

پس از اعمال معادله اخیر بر کلیه نقاط سازه دستگاه معادله‌هایی به صورت $\underline{\Delta} = \underline{F} \underline{K}$ به دست می‌آید که از حل آن بردار تغییر مکان $\underline{\Delta}$ در برگیرنده تغییر مکانهای نقاط سازه در لحظه جدا شدن موشک تعیین می‌شود. تعیین شرایط ابتدایی پرتاب موشک در لحظه جدا شدن: شرایط ابتدایی پرتاب موشک در لحظه جدا شدن،

در این رابطه، عبارت $\theta(l_1 - ih_1)$ عبارت است از تغییر مکان زاویه‌ای محور موشک نسبت به امتداد اولیه خود در گام

$$\theta(t_f) = - \frac{h_1^2}{A_o(l_1)J_3} \left[cM_{rg} \cos \alpha + J_2 \underline{R}_0^T \left\{ v(l_1) \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} \right. \right. \quad (30)$$

$$\left. \left. + v^2(l_1) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \underline{\Delta}(l_1, \xi_1) \right]_{\xi_1=l_1} \right\} \right] \frac{1}{A_o(l_1)} \sum_{i=1}^q A_i(l_1) \theta(l_1 - ih_1)$$

با توجه به صلب بودن بدنه موشک می توان نوشت:

$$\theta(\xi_{1(j-i)}) = \frac{\underline{R}_0^T (\underline{\Delta}(l_1, l_1 - ih_1) - \underline{\Delta}(l_1 - ih_1, l_1 - ih_1))}{ih_1} \quad (31)$$

از ترکیب دو معادله اخیر رابطه لازم برای محاسبه $\theta(t_f)$ تغییر مکان زاویه ای محور موشک نسبت به حالت ابتدایی چنین بدست می آید.

$$\theta(t_f) = - \frac{1}{A_o(l_1)} \left[\frac{1}{J_3} \{ h_1^2 cM_{rg} \cos \alpha + J_2 \underline{R}_0^T A_o(l_1) \underline{\Delta}(l_1, l_1) \} + \underline{R}_0^T A_o \sum_{i=1}^q A_i(l_1) \right. \quad (32)$$

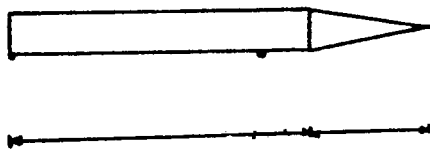
$$\left. \left\{ \left(\frac{J_2}{J_3} + \frac{1}{ih_1} \right) \underline{\Delta}(l_1, l_1 - ih_1) - \frac{1}{ih_1} \underline{\Delta}(l_1 - ih_1, l_1 - ih_1) \right\} \right]$$

آن ارتعاشهای سکوی پرتاب موشک دو مرحله ای شکل (۵-الف) هنگام پرتاب موشک بررسی شده است. برای اطمینان از درستی عملکرد الگو و بسته نرم افزار مذکور در مرجع (۶) مثالهایی حل شده و نتیجه های به دست آمده با نتایج حل های تحلیلی یا مدل های دیگر مقایسه شده است و این نتایج بسیار رضایت بخش بوده اند.

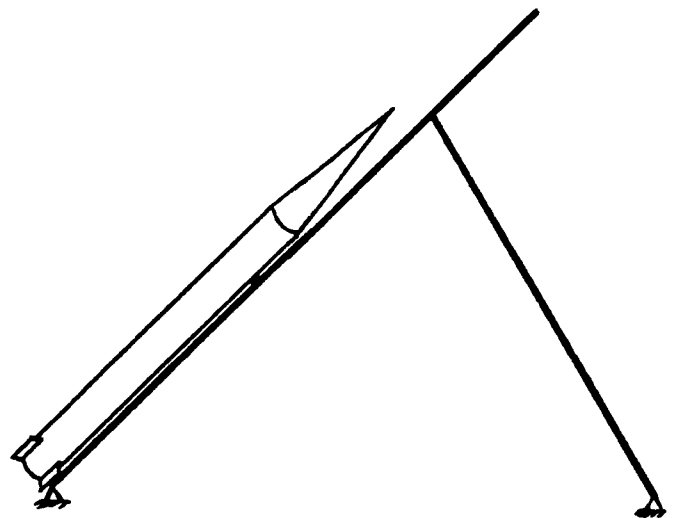
بنابراین هرگاه زاویه ابتدایی محور موشک با افق θ_0 باشد، زاویه و محور موشک با افق در لحظه جدا شدن که با θ نمایش داده می شود چنین خواهد بود.

$$\theta = \theta_0 + \theta(t_f) \quad (33)$$

مثال: برای روشن شدن تواناییهای الگوی مورد بحث در این مقاله، یک بسته نرم افزاری تهیه شده که با بهره گیری از



شکل (۵-ب) طرحواره بدنه موشک که روی تعدادی نقطه برای معرفی نحوه توزیع جرم آن نمایش داده شده.



شکل (۵-الف) سکوی پرتاب دو مرحله ای

داده‌های مسئله در جدولهای (۱-الف) و (۱-ب) آورده شده‌اند.

مشخصات عضو	شماره عضو	1-13	9-21
جرم در واحد طول	$(\frac{Kg \times Sec^2}{Cm^2})$	2.5×10^{-3}	1.8×10^{-3}
لنگرلختی چرخشی در واحد طولی	$(Kg \times Sec^2)$	2.0	1.7
لنگرلختی مقطع	(Cm^4)	200	150
سطح مقطع	(Cm^2)	350	250
ضریب میرایی انتقالی در واحد طول	$(\frac{Kg \times Sec}{Cm^2})$	5×10^{-2}	3.6×10^{-2}
ضریب میرایی چرخشی در واحد طول	$(\frac{Kg \times Sec}{Cm})$	10	8.25

جدول (۱-الف) مشخصات اعضای سکوی پرتاب

شماره نقطه روی موشک	جرم در واحد طول $Kg \times Sec^2 / Cm^2$
1	5
2	5
3	5
.	.
.	.
23	5
24	3.47
25	2.22
26	1.25
27	0.56
28	0.14
29	0

جدول (۱-ب) - توزیع جرم موشک

سرعت و شتاب موشک به صورت تابعه‌هایی از t_1 ، فاصله تکیه‌گاه عقبی تا ابتدای سکوی، مانند روابط زیر فرض شده‌اند.

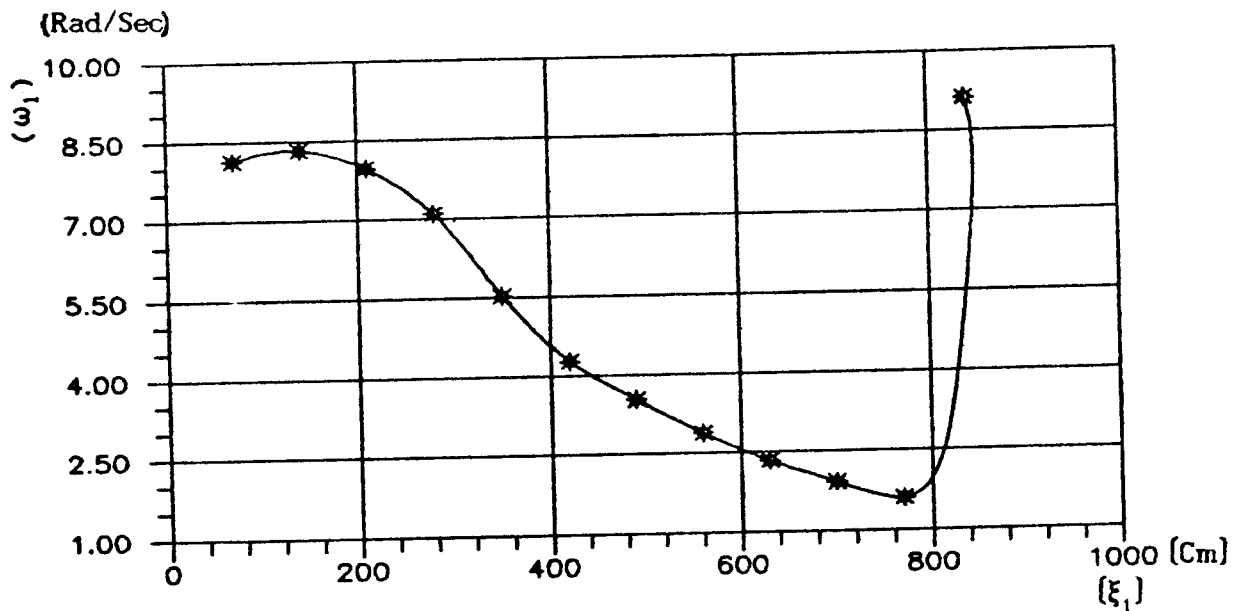
ارتعاشی کوچکتر باشد تا دقت لازم به دست آید. براساس اصولی که در تهیه این الگو به کار رفته است (۶) بسامدهای طبیعی حداقل دستگاه ارتعاشی به ازای ξ_1 به دست آمده است، منحنی تغییرات این بسامدها در شکل (۶) دیده می شود. در این منحنی می بینیم که بسامد طبیعی حداقل در لحظه جدا شدن موشک ناگهان جهش کرده است، دلیل این جهش، کاهش ناگهانی جرم دستگاه ارتعاشی مورد بحث است.

$$v = (-2000t^3 + 1560t^2 + t) \times 10^2 \text{ (Cm/Sec)}$$

$$\dot{v} = (-6000t^2 + 3120t + 1) \times 10^2 \text{ (Cm/Sec}^2\text{)}$$

$$\xi_1 = \int v dt = (-500t^4 + 520t^3 + 0.5t^2) \times 10^2 \text{ (Cm)}$$

فاصله بین نقاط روی سکو $\Delta \xi_1$ برابر ۷۰ سانتیمتر در نظر گرفته شده است. این فاصله اصولاً باید چنان باشد که فاصله زمانی لازم برای طی شدن آن به وسیله موشک از کسری از کوچکترین زمان تناوب طبیعی اول دستگاه



شکل (۶) - منحنی تغییرات بسامدهای طبیعی حداقل به ازاء ξ_1

$$(\Delta t)_{\min} = 0.114 \text{ Sec} \Rightarrow \frac{(\Delta t)_{\min}}{(T_1)_{\min}} = 0.15$$

با توجه به منحنی بالا داریم :

$$(\omega_1)_{\max} = 8.32 \text{ Rad/Sec}$$

$$(T_1)_{\min} = \frac{2\pi}{8.32} = 0.76 \text{ Sec}$$

این مقدار، دقت لازم را به دست می دهد و ضمناً به ازای ξ_1 های بزرگتر سرعت حرکت موشک افزایش می یابد در نتیجه دقت نتایج حاصل بیشتر می شود، بنابراین فاصله های $\Delta \xi_1$ به کار رفته در مثال مناسب اند.

نتایج حاصل از اجرای نرم افزارهای تهیه شده براساس الگوی مورد بحث راشکلهای (۷) و (۸) نشان می دهند. در شکلهای (۷ - الف) تا (۷ - ل) طرحواره سازی سکوی پرتاب همراه با شکل تغییر یافته آن به ازای موقعیتهای مختلف موشک تا لحظه جدا شدن آن دیده می شوند و در شکل (۸) منحنی تغییرات تغییر مکان نقطه انتهای سکوی

بنابراین :

با توجه به رابطه حاکم بر سرعت موشک، Δt فاصله زمانی بین دو ایستگاه متوالی روی سکو متغیر است و بزرگترین مقدارش را در ابتدای حرکت دارد که سرعت موشک حداقل است. با توجه به رابطه به نامبرده داریم:

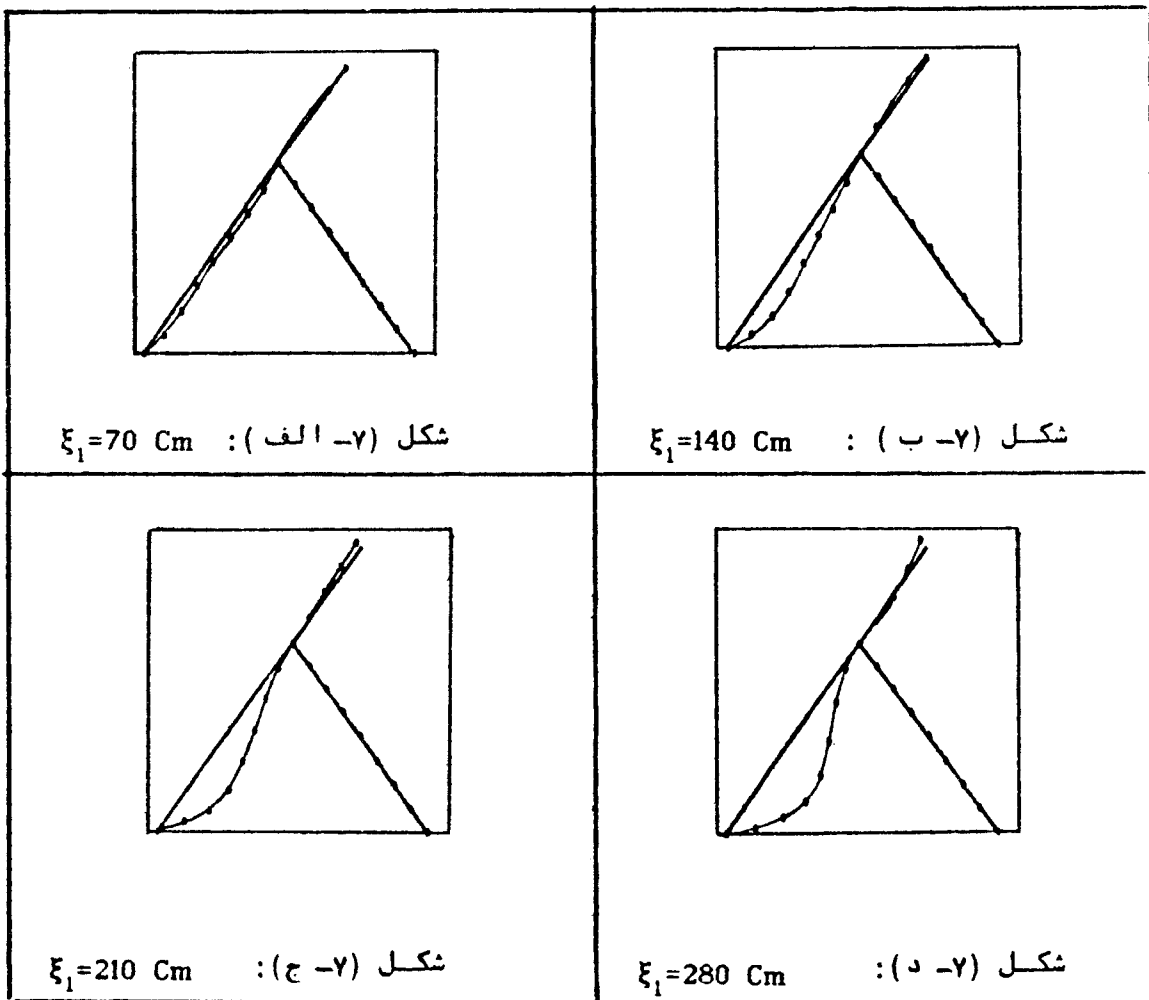
پرتاب در دستگاه مختصات محلی عضو نگهدارنده موشک در لحظه جدا شدن موشک به ازای موقعیتهای مختلف موشک در لحظه جدا شدن آن چنان به دست آمده‌اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} XI=594.06, \text{ Cm} \\ YI=593.931 \text{ CM} \end{array} \right.$$

$$\theta_0 = 0.7854 \text{ Rad} = \text{زاویه اولیه محور موشک با افق}$$

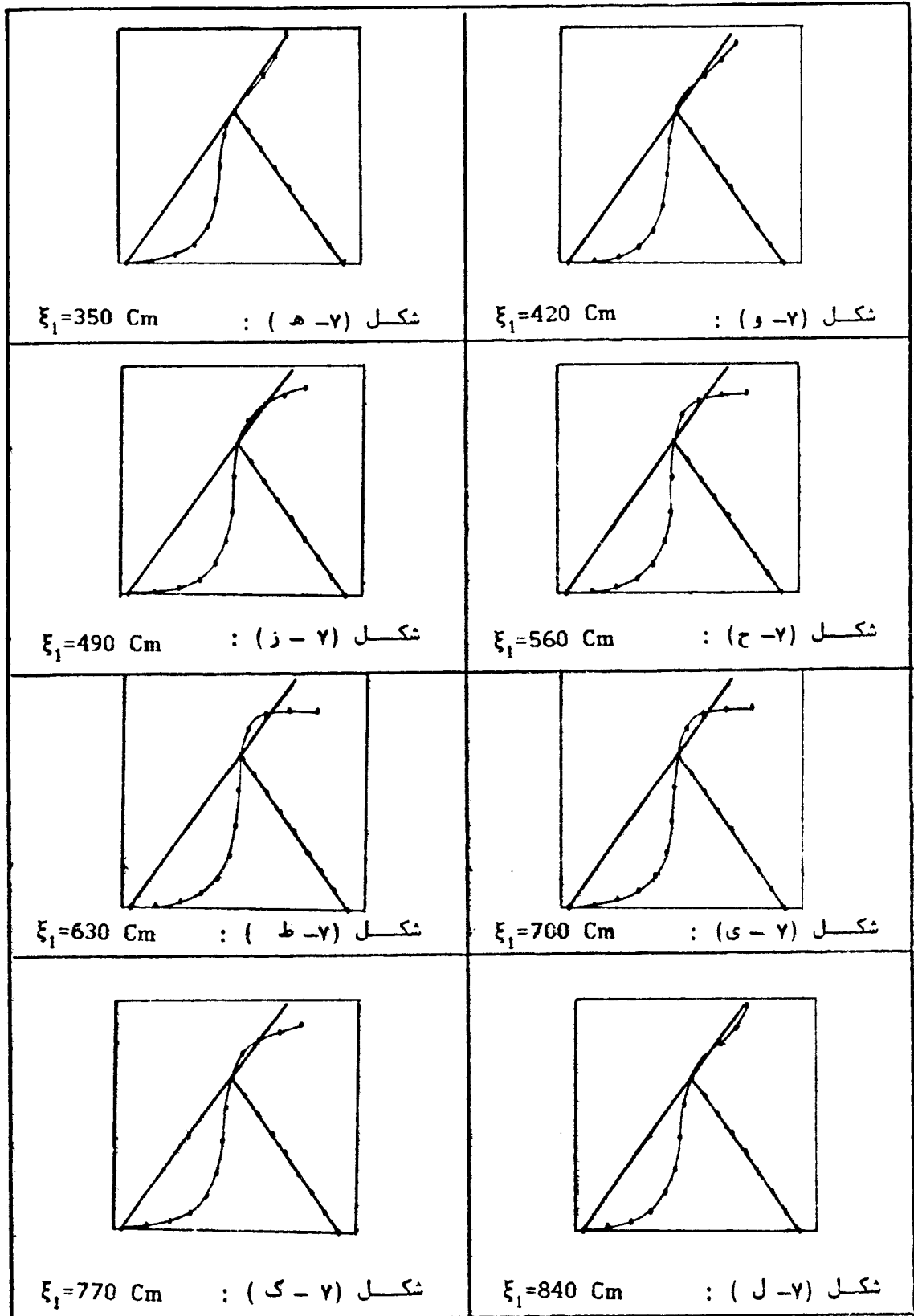
$$\theta(t_f) = 4.931 \times 10^{-4} \text{ Rad} = \text{اندازه تغییر زاویه اولیه پرتاب}$$

$$\theta = 0.7858 \text{ Rad} = \text{زاویه پرتاب موشک در لحظه جدا شدن}$$



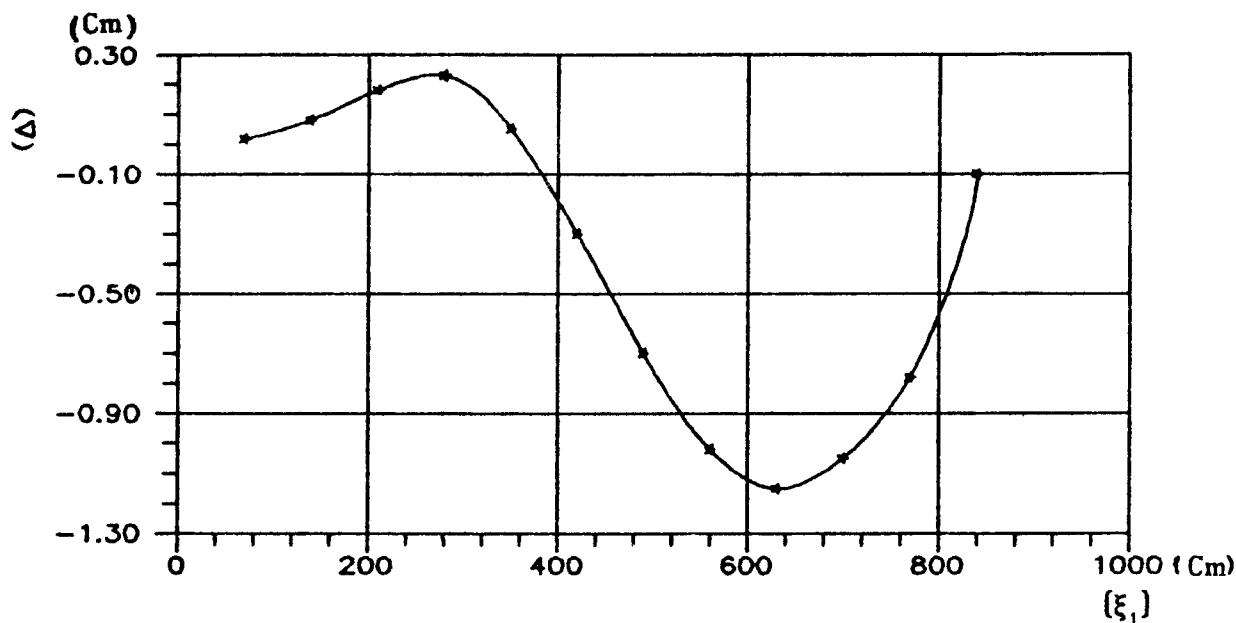
شکل‌های (۷ الف) تا (۷-د) - سازه تغییر شکل یافته سکوی پرتاب به ازای موقعیتهای مختلف

موشک تغییر شکلها ۴۰ برابر بزرگتر شده‌اند.



شکل‌های (ه-۷) تا (ل-۷) - سازه تغییر شکل یافته سکوی پرتاب به ازای موقعیتهای

مختلف موشک. تغییر شکلها ۴۰ برابر بزرگتر شده‌اند.



شکل (۸) - منحنی تغییرات تغییر شکل نقطه انتهای سکو به ازای ξ_1

نتیجه گیری:

روشهای عددی مانند شکل پایداری جوابها، طی مثالهای نسبتاً ساده‌ای که در مراجع (5) و (6) و (7) بررسی شده‌اند به اثبات رسیده است، لذا این الگو، یک الگوی توانمند و قابل اطمینان برای بررسی مسائل پیچیده‌تر از قبیل ارتعاشات سکوهاى پرتاب موشک است.

با توجه به اصول ساده روش تأثیرگذاری سازه‌ای می‌توان دقت الگوی مورد بحث را با در نظر گرفتن عوامل دیگری مانند تغییرات جرم موشک طی عمل پرتاب همچنین انعطاف‌پذیر بودن بستر زیر سکو بهبود داد.

روش تأثیرگذاری سازه‌ای که مبنای الگوی مورد بحث در این مقاله است. در بررسی ارتعاشات سازه‌های تحت بارهای متحرک روش بسیار رنیرومندی است که علاوه بر سادگی اصول، توانایی حل مسائل بارهای متحرک پیچیده را دارد. در این روش عامل اندرکنش میان جرم متحرک و سازه را می‌توان به راحتی و با دقت زیاد بررسی کرد در حالی که در روشهای دیگر مانند روش تفاوت‌های محدود، انجام این کار بسیار پرهزینه است (5). توانایی و دقت بالای الگوهای مبتنی بر روش تأثیرگذاری سازه‌ای همچنین عاری بودن آنها از مشکلات

فهرست منابع :

- 1- Fryba, L. "Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads." , Noordhoff International Publishing. Czechoslovakia
 - 2- Salvadori, M. G. & Baron , M. L., "Numerical Methods in Engineering.," Englewood Cliffs, N. J.; Prentice - Hall. 1961.
 - 3- Ting, E. C. & Genin, J. & Ginsberg, J.H., "A General Algorithm for Moving Mass Problems .,"Journal of Sounds and Vibration (1974). 33 (1) , 49 - 58
 - 4- Ting, E. G. & Genin, J. & Ginsberg, J. H.,A Complete Formulation of Inertial Effects in the Guideway - Vehicle Interaction Problem . journal of Sound and Vibration (1974)38(1),15-26.
 - 5- Vajarasathira, K. & Yener, M. & Ting, E. C., "Aircraft Pavement Interaction in Runway Analysis.," ASCE Journal of Structural Engineering, Vol . 110 , NO, 5 , May 1984
- ۶- تحلیل دینامیکی سکوها‌ی پرتاب موشک - پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته مهندسی سازه دانشگاه تهران - از عباس محمدولی سامانی با راهنمایی دکتر رسول میرقادری سال ۱۳۶۹ .
- ۷- بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها تحت بارهای متحرک - از مجموعه مقاله‌های علمی ارائه شده در کنگره بین‌المللی راه و ساختمان دانشگاه شیراز سال ۱۳۶۹ از دکتر رسول میرقادری و عباس محمدولی سامانی .

A Numerical Algorithm for Dynamic Analysis of Missile Launchers

R. Mirghaderi

A. M. Vali Samani

ABSTRACT:

The projection structure is vibrated by the dynamic effects of the projectile in the initial stages before separation. This induces two major results, one is the calculation of stresses obtained because of vibration in order to design the launcher and other one which is very important, is the determination of initial conditions of the missile projection at the time of separation from the launcher. These conditions are not the same as the static conditions before projection, because of vibration at the time of projection. Therefore, these conditions should be

determined in order to be accurate in hitting the target.

In this study, a numerical algorithm based on Structural Impedance Approach (1), (3), (4), (5), (6), (7) is presented to obtain the appropriate governing equations. Finally, a software has been prepared by which the displacements of different points on the launcher at various times and initial conditions of missile at the time of separation from the launcher can be predicted.