روش ترسیمی برای بدست آوردن ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای درجه (n)

نوشتهٔ

ایرج-شمس ملک‌آرا

استاد دانشکده فنی

میدانیم که بیشتر مسائل مهندسی بصورت یک چند جمله‌ای درجه (n) نمودار میشود که باید ریشه های حقیقی آن‌را بدست‌آورد و در بین راه‌حل های مختلف موجود که در اغلب آنها باید دست بدامن حسابگر های الکترونیک(Computer) شد یک راه‌حل ترسیمی بسیار ساده‌جدید بنام روش (Lill–Eisenberg) موجود است که اینک درزیر بشرح آن میپردازیم.

چندجمله‌ای

$$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

را که درحالت اول تمام ضرایب آن‌مثبت فرض شده است درنظر میگیریم وضرائب این چندجمله‌ای‌رابصورت یک شبکه قائم‌الزاویه به‌ترتیب زیر نمایش میدهیم.

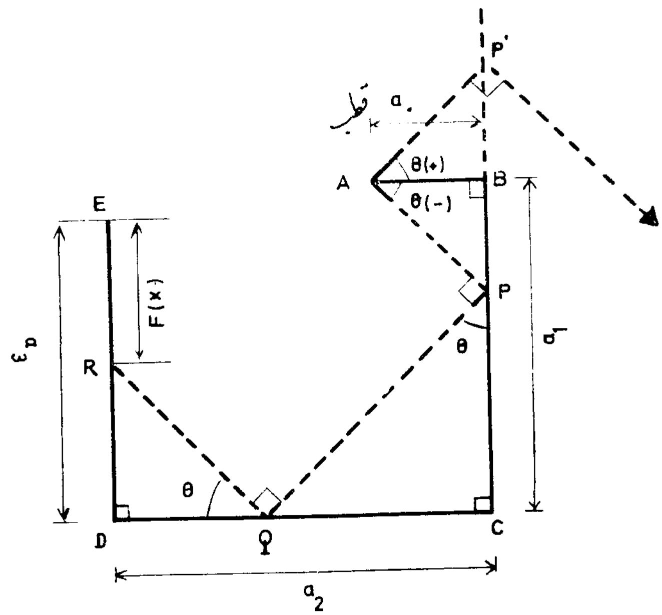
ازیک نقطه مبداء A که قطب نامیده میشود قطعه خط $\overline{AB}$ را با مقیاس مناسبی و در جهت مثبت (چپ براست) وافقی باندازه ضریب a_0 رسم میکنیم و بعداز نقطه B درجهت حرکت عقربه ساعت و عمود به AB قطعه‌خط $\overline{BC}$ را باندازه ضریب a_1 رسم مینمائیم.

سپس‌از نقطهC قطعه‌خط $\overline{CD}$را باندازه a_2 وهمواره درجهت‌حرکت عقربه های ساعت وعمودبه BC رسم خواهیم‌کرد وبهمین ترتیب‌تمام ضرائب دنبال هم با همان مقیاس رسم خواهد شد ودرنتیجه یک چند ضلعی قائم‌الزاویه که تعداد اضلاع آن (n+۱) و تعداد رؤس آن (n) میباشد بدست خواهد آمد که آنرا (شبکهٔ ضرائب) خواهیم نامید.

درحالتیکه ضرائب دارای علامت‌های مختلف باشند درهرتغییر علامت جهت رسم شبکه‌ضرائب‌را عوض میکنیم مثلاً اگر ضریب (a_2) منفی باشد قطعه خط $\overline{CD}$ را درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت رسم مینمائیم واگر a_3 هم منفی باشد دراین صورت قطعه خط $\overline{DE}$ را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در دنبال $\overline{CD}$ رسم خواهیم نمود.

و بطور کلی تا موقعیکه علامت ضریب تغییر نکرده جهت رسم شبکه هم تغییر نخواهد کرد من باب مثال درشکل ۱ شبکه ضرائب برای یک چندجمله‌ای درجه سوم با ضرائب مثبت:

$$F(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$



شکل (۱)

رسم شده است ودرنتیجه چهارضلعی قائم‌الزاویه (ABCDE) بدست آمده است.

حال پس از رسم شبکه ضرائب یک شبکه قائم‌الزاویه جدید به‌ترتیب زیر رسم خواهیم نمود ازقطب A خط AP را طوری رسم میکنیم که با خط $\overline{AB}$ زاویه θ تشکیل دهد بدیهی است اگر علامت θ منفی باشد خط AP درزیر AB ودرصورتیکه مثبت باشد دربالای AB قرارخواهد گرفت وسپس خط PQ راعمود به AP رسم میکنیم وبهمین ترتیب ادامه میدهیم تا شبکه قائم‌الزاویه (APQR) بدست آید مطابق شکل ۱ بسهولت دیده میشود اگر ریشه اول چندجمله‌ای مورد بحث $x=tg\theta$ فرض شود که دراین حالت منفی است طول قطعه خط RE برابر چندجمله‌ای F(x) مورد نظر خواهد بود زیرا:

$$\overline{BP}=\overline{AB}tg\hat{\theta}=-a_0x$$

و:

$$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=a_1+a_0x$$

و:

$$\overline{CQ}=\overline{PC}tg\hat{\theta}=(a_1+a_0x)tg\theta=-(a_1x+a_0x^2)$$

و:

$$\overline{QD}=\overline{CD}-\overline{CQ}=a_2+a_1x+a_0x^2$$

و :

$$\overline{DR}=\overline{QD}tg\hat{\theta}=-(a_2x+a_1x^2+a_0x^3)$$

وبالاخره:

$$\overline{RE}=\overline{DE}-\overline{DR}=a_3+a_2x+a_1x^2+a_0x^3=F(x)$$

بدیهی است اگر تعداد ضرائب بیش از چهار عدد باشد تعداد اضلاع شبکه به همان میزان زیادتر خواهد شد ولی درهرحال آخرین قسمت باقی‌مانده در روی آخرین ضلع شبکه برابر چندجمله‌ای $F(x)$ خواهد بود . ضمناً در حالتیکه زاویه θ مثبت باشد شبکه دوم بصورت $AP'Q'$ در می‌آمد که باز هم آخرین قسمت باقی‌مانده برابر $F(x)$ میشود شبکه قائم‌الزاویه دوم که بترتیب بالابدست میآید (شبکهٔ ریشه ها) نامیده میشود حال با توجه به استدلال بالا می‌بینیم که اگر آخرین قسمت باقی‌مانده یعنی $\overline{RE}$ مساوی صفر شود خواهیم داشت:

$$F(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

بنابراین اگر زاویه $\hat{\theta}$ را طوری انتخاب کنیم کـه آخرین خط شبکه ریشه ها از آخرین نقطهٔ شبکه ضرائب بگذرد $(x=tg\theta)$ یکی از ریشه های حقیقی چندجمله‌ای خواهد بود و بدیهی است در صورتیکه نتوان چنین زاویه‌ای بدست‌آورد چندجمله‌ای موردنظر دارای ریشه‌حقیقی نخواهد بود .

پس از تعیین ریشه اول که بصورت :

$$\left(x=tg\theta=\frac{BP}{AB}\right)$$

به‌شرح بالا بدست میآید میتوانیم ریشه‌دوم راهم بارسم یک‌شبکه قائم‌الزاویه سوم به‌ترتیب زیربدست‌بیاوریم

نخست ثابت میکنیم که شبکه قائم‌الزاویه‌دوم که آنرا شبکه ریشه ها خواندیم خود شبکه ضرائب برای چندجمله‌ای ساده شده درجه $(n-1)$ است که از تقسیم کردن چندجمله‌ای درجه (n) مورد بحث بـه یک جمله‌ای ریشه **اول** یعنی $(x-tg\theta)$ بدست میآید.

زیرا با انجام عمل تقسیم می‌بینیم که:

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\div(x-tg\theta)=$$
$$=a_0x^{n-1}+(a_1+a_0tg\theta)x^{n-2}+[a_2+(a_1+a_0tg\theta)tg\theta]x^{n-3}+\cdots$$

وبطوریکه در روی شکل ۱ دیده میشود با توجه بعلامت $\hat{\theta}$ که‌منفی است‌خواهیم داشت:

$$a_0=AB \qquad a_1+a_0tg\theta=\overline{BC}-\overline{BP}=\overline{PC}$$
$$a_2+(a_1+a_0tg\theta)tg\theta=\overline{CD}-\overline{PC}tg\theta=\overline{CD}-\overline{CQ}=\overline{QD}$$

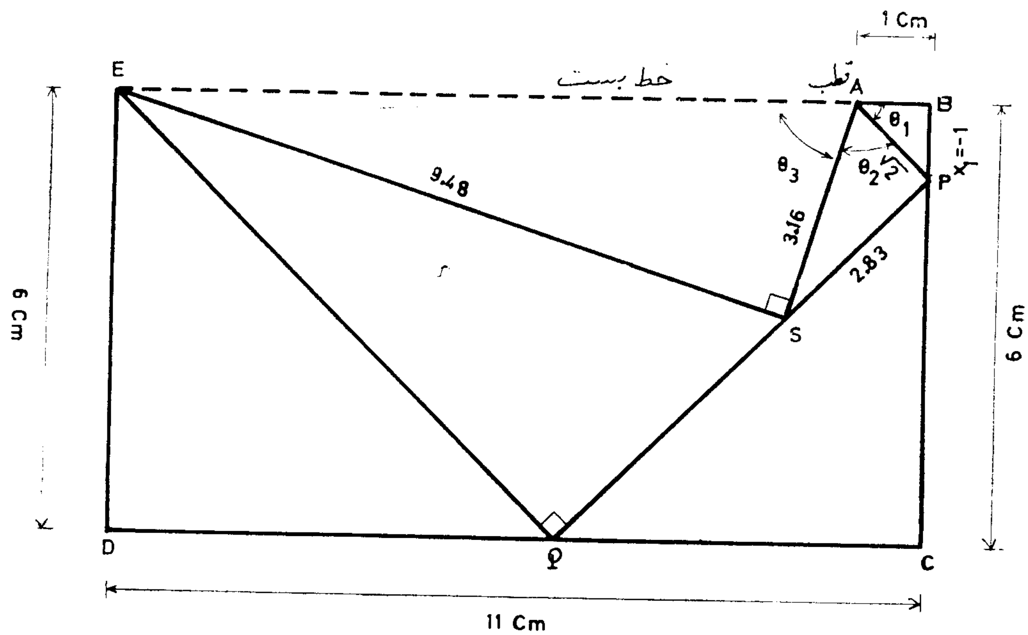
وبنابراین می‌بینیم که‌ضرائب چندجمله‌ای‌ساده‌شده‌درجه $(n-1)$ به‌ترتیب قطعه خط های $\overline{AB}$ و $\overline{PC}$ و $\overline{QD}$ وغیره است که برخلاف شبکه ضرائب دنبال هم قرار نگرفته‌اند ولی اگر قطعات فوق را درعدد $\left(\frac{1}{cos\theta}\right)$ ضرب کنیم تبدیل بـه قطعه خطهـای AP و $\overline{PQ}$ و $\overline{QR}$ و غیره خـواهد شد کـه هـم دنبال هم قـرار دارند و هـم بـا اختلاف مقیاس $\frac{1}{cos\theta}$ درست همان شبکـه قـائم‌الزاویه ضرائب چندجلمه‌ای ساده شده $(n-1)$ خواهد بود که‌قطب آن نیز همان‌قطب سابق و انتهای آن نیز همان انتهای شبکه سابق است .

حال که شبکه ضرائب چندجمله‌ای ساده شده $(n-1)$ بدست آمد کافی است که مانند حالت قبل یک شبکه قائم‌الزاویه سوم که تعداد اضلاع آن $(n-2)$ میباشد از همان قطب A رسم کنیم بطوریکه آخرین ضلع آن ازآخرین نقطه شبکه ضرائب بگذرد و باین ترتیب ریشه دوم معادله مورد نظر بصورت $(x_2=tg\theta_2)$ یعنی تانژانت زاویه بین اولین ضلع شبکه جدید ریشه‌ها با اولین ضلع شبکه قبلی ریشه‌ها با در نظر گرفتن علامت بدست خواهد آمد لازم به تذکر نیست که شبکه سوم فوق‌الذکر با توجه به استدلال بالا خود شبکه ضرائب چندجمله‌ای ساده‌شده درجه $(n-2)$ خواهد بود که ازتقسیم کردن چندجمله‌ای درجه $(n-1)$ به یک جمله‌ای ریشه دوم یعنی $(X-tg\theta_2)$ بدست میآید وبنابراین میتوان به ترتیب بالا شبکه قائم‌الزاویه چهارم را که تعداد اضلاع آن $(n-3)$ است از همان قطب A رسم نمود وریشه سوم را بصورت $(X_3=tg\theta_3)$ بدست آورد و بدیهی است با ادامه رسم شبکه‌های پی‌درپی تمام ریشه‌های حقیقی معادله بدست خواهد آمد.

تبصره- برای سهولت حل مسئله میتوان چندجمله‌ای موردنظر را بصورت نرمال نوشت که ضریب بزرگترین قوه آن برابر یک میباشد و بدین منظور کافی است که تمام ضرائب را به (a_0) تقسیم کنیم ودراین حالت طول ضلع اول شبکه ضرائب مساوی یک خواهد بود که درحقیقت مقیاس شبکه است.

برای روشن شدن روش ترسیم بذکر دومثال ساده مبادرت میورزیم.

مثال ۱- معادله درجه سوم که دارای ریشه‌های حقیقی $x_1=-1$ و $x_2=-2$ و $x_3=-3$ میباشد



شکل (۲)

$$\left(X_1=\frac{BP}{AB}=-1\right) \qquad \left(X_2=\frac{PS}{AP}=-\frac{2.83}{\sqrt{2}}=-2\right) \qquad \left(X_3=\frac{SE}{AS}=-\frac{9.48}{3.16}=-3\right)$$

$$F(x)=X^3+6X^2+11X+6=0$$ حل ترسیمی معادله درجه سوم

درنظرمیگیریم که بصورت زیر نوسته میشود:

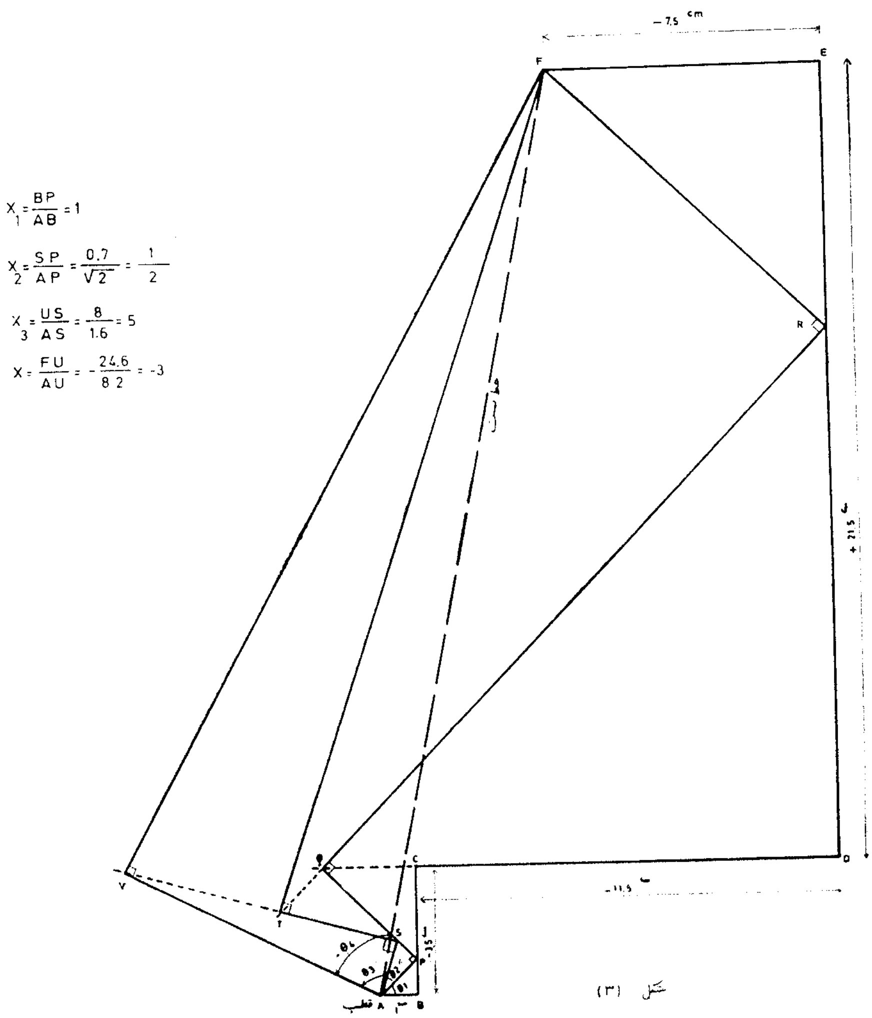
$$F(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

برای بدست آوردن ریشه‌های‌این چهارجمله‌ای بطریق ترسیمی با توجه باینکه تمام ضرائب مثبت است ابتدا شبکه ضرائب‌را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت مانند شکل ۲ بصورت چهارضلعی‌قائم‌الزویه (ABCDE) که طول اضلاع آن به‌ترتیب ۱و۶و۱۱و۶ میباشد رسم میکنیم وسپس شبکه قائم‌الزاویه (APQE) را رسم خواهیم‌کرد که آخرین ضلع آن ازنقطه E میگذرد. وباین‌ترتیب ریشه ($x_1 = tg\theta_1 = -1$) رابدست خواهیم آورد وپس از آن شبکه قائم‌الزاویه ASE را رسم میکنیم که ریشه $x_2 = tg\theta_2 = -2$ را بدست خواهد داد و بالاخره شبکه آخر راکه فقط دارای یک ضلع است و آن را خط بست نامیده‌ایم رسم میکنیم و ریشه $x_3 = tg\theta_3 = -3$ بدست خواهد آمد برای‌تعیین مقدار ($tg\theta$) به‌ترتیبی که زیر شکل ۲ شرح داده شده طول اضلاع مربوط را با مقیاس اندازه‌گرفته وبهم تقسیم میکنیم.

مثال ۲- معادله درجه چهارم که دارای ریشه‌های حقیقی

$$x_1 = 1 \text{ و } x_2 = \frac{1}{2} \text{ و } x_3 = 5 \text{ و } x_4 = -3$$

است درنظر میگیریم که بصورت زیر نوشته میشود:



شکل (۳)

$$F(x)=(x-۱)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(x-۵)(x+۳)=x^{۴}-۳ر۵x^{۳}-۱۱ر۵x^{۲}+۲۱ر۵x-۷ر۵=0$$

برای بدست آوردن ریشه های این پنج‌جمله‌ای بطریق ترسیمی ابتدا شبکه ضرائب (ABCDEF) را با توجه به‌علامت ضریب‌ها به ترتیبی که قبلاً شرح داده شد رسم میکنیم و بطوریکه در شکل ۳ دیده میشود چون ضریب دوم پنج‌جمله‌ای مورد بحث منفی است لذا $\overline{BC}$ در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت رسم شده وچون ضریب سوم نیز منفی است لذا $\overline{CD}$ در دنبال $\overline{BC}$ درجهت‌حرکت‌عقربه های ساعت رسم شده ولی ضریب چهارم که مثبت است درجهت عکس $\overline{CD}$ یعنی در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت رسم گردیده‌است وبالاخره ضریب پنجم هم که منفی است درجهت عکس $\overline{DE}$ یعنی بازدرجهت عکس عقربه‌های ساعت رسم شده است بطوریکه می‌بینیم فقط درموقع تغییر علامت ضریب جهت رسم شبکه تغییر میکند.

پس‌از رسم شبکه ضرائیب به‌ترتیب شبکه های قائم‌الزاویه (APQRF) و (ASTF) و (AVF) وبالاخره‌خط‌بست AF‌رارسم میکنیم بطوریکه‌آخرین‌ضلع هرشبکه‌ازآخرین نقطه F بگذرد‌با‌ین‌ترتیب ریشه های مورد بحث به‌ترتیب‌با محاسبه تانژانت زوایای $\hat{\theta}$ وبا توجه به‌جهت آن‌ها بصورت

$$x_{۱}=tg\theta_{۱}=\frac{BP}{AB}=۱ \qquad x_{۲}=tg\theta_{۲}=\frac{SP}{AP}=\frac{۰ر۷}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$x_{۳}=tg\theta_{۳}=\frac{VS}{AS}=\frac{۸}{۱ر۶}=۵ \qquad x_{۴}=tg\theta_{۴}=\frac{FV}{AV}=\frac{۲۴ر۶}{۸ر۲}=-۳$$

بدست خواهد آمد که طول اضلاع لازم برای محاسبه تانژانت با مقیاس اندازه گرفته شده است توضیحاً اضافه میشود که مقیاس شکل ۳ در موقع تهیه کلیشه تقریباً نصف شده است بعلاوه چون تانژانت‌حاصل تقسیم دو ضلع است لذا انتخاب مقیاس هیچ تأثیری در محاسبه ریشه‌ها ندارد و هرچه مقیاس بزرگتر باشد ریشه ها با دقت بیشتری بدست‌خواهد آمد.

تبصره- علاوه بر تعیین ریشه‌هابطوریکه ازاستدلال بالانتیجه‌میشود میتوانیم بااین‌روش‌مقدار یک چندجمله‌ای $F(x)$ از درجه n رابرای مقدار معین $x=l$ حساب کنیم وبرای این منظور کافی است که زاویه θ شبکه قائم‌الزاویه را طوری درنظر بگیریم که $tg\theta=l$ باشد وبدیهی است که دراین صورت آخرین قسمت باقی‌مانده یعنی $\overline{RE}$ باتعیین جهت وباتوجه‌به‌مقیاس‌برابر $F(l)$ خواهد شد که‌بمراتب سهل‌تر از محاسبه جمله مزبور میباشد.