تصویر جهانی استوانه‌ای یا مرکاتور نصف‌النهاری

(U·T.M) Universal Transverse Mercator

نوشته :

ایرج شمس ملک‌آرا

استاد دانشکده فنی

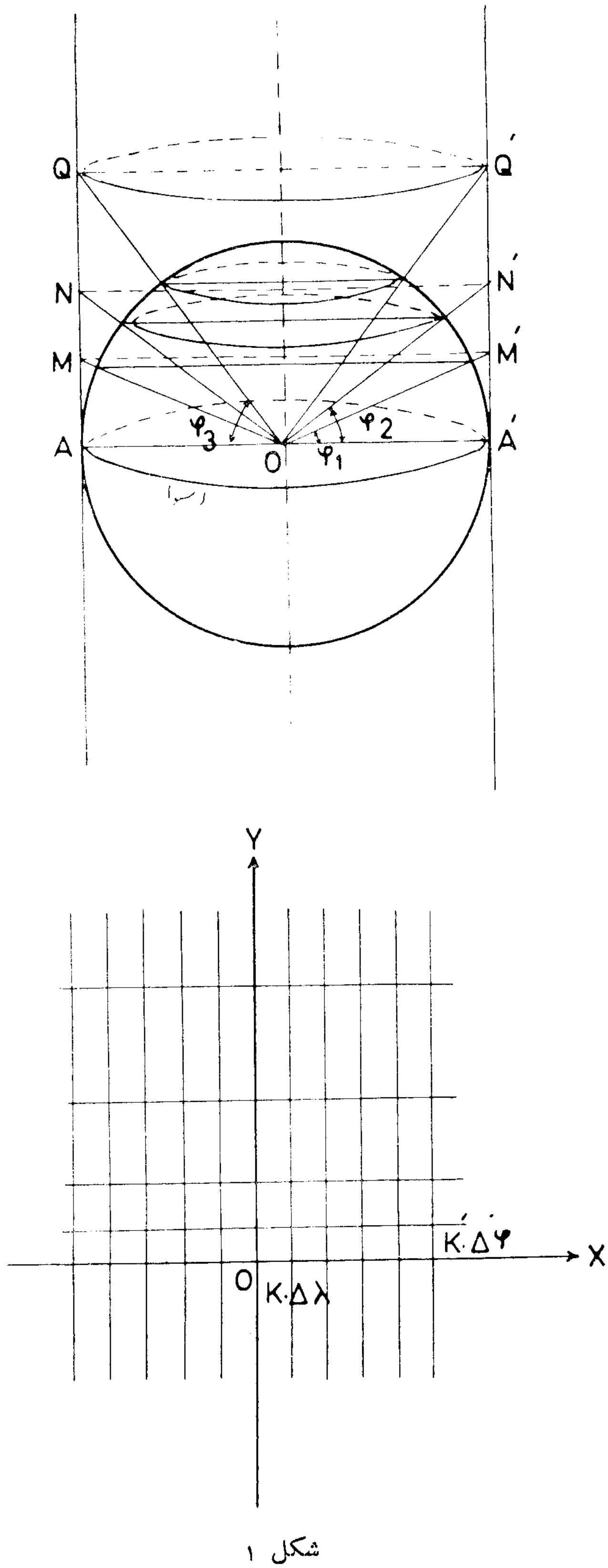
بطوریکه میدانیم سابقاً در نقشه‌نگاری (Cartographie) دونوع یادو سیستم تصویر بکارمیبردند معروف به مرکاتور و لامبر (Mercator) و (Lambert) واکثر نقشه های قدیمی کشورهای مختلف جهان دراین دوسیستم تهیه شده‌اند.

۱ـ درسیستم مرکاتور یا استوانه‌ای استوائی تصویر مرکزی نصف‌النهارها و مدارهای کره زمین بترتیب تبدیل به خطوط مولد استوانه و دوائر واقع در صفحه عمود به مولدها میگردد و پس ازگسترش استوانـه تصویرهای فوق‌الذکر تبدیل به دو دسته خطوط موازی عمود بیکدیگر خواهد شد کـه آنرا شبکه مختصات یا (Grid) مینامند که یک شبکه قائم‌الزاویه معمولی است (شکل ۱).

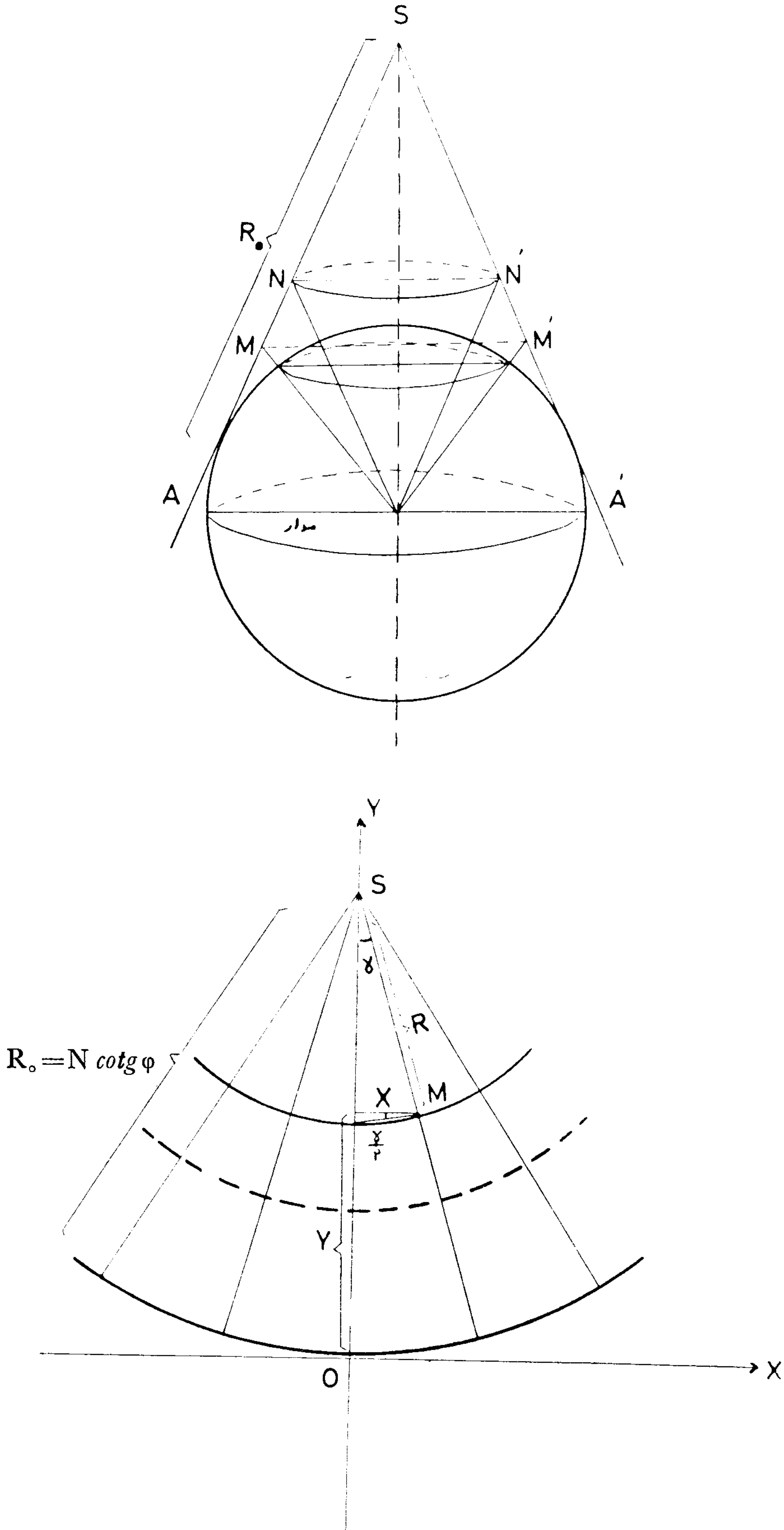
واضح است که بتدریج کـه عرض جغرافیائی (φ) زیاد میشود فاصله نسبی تصویر مدارها یعنی خطوط شبکه افقی نیز اضافه میگردد و بعداً خواهیم دید که برای حفظ تشابه باید این‌فاصله را طبق فرمول معین تنظیم نمود.

۲ـ در سیستم لامبر یا مخروطی مداری تصویر مرکزی نصف‌النهارها ومدارها بترتیب تبدیل به خطوط مولد مخروط ودوائر واقع درصفحه عمود به محور مخروط میگردد و پس‌ازگسترش‌مخروط تصویرهای فوق‌الذکر بترتیب به یک دسته خطوط متقاطع شعاعی و یک‌دسته دوائر متحدالمرکز عمود بخطوط شعاعی مزبور تبدیل‌خواهد شد که یک‌شبکه مختصات قطبی‌تشکیل میدهند بطوریکه یک‌نقطه (M) دراین‌تصویر دارای مختصات قطبی (γ و R) خواهد بود (شکل ۲).

بدیهی است دراین‌سیستم نیز برای‌حفظ تشابه باید فاصله نسبی دوائر متحدالمرکز مداری‌را طبق فرمول معینی تنظیم‌نمود بعلاوه چنانچه OX و OY خط مماس به مدار مبدأ و نصف‌النهار مرکزی منطقه


Q
Q́
N
Ń
M
Ḿ
A
Á
O
φ_3
φ_2
φ_1
Y
X
O
$K\cdot\Delta\lambda$
$K'\cdot\Delta\varphi$

شکل ۱



شکل ۲

رامحور مختصات فرض کنیم بین مختصات قطبی نقطه M و مختصات معمولی آن روابط زیر برقرار خواهد بود:

$$X = R \sin \hat{\gamma}$$

$$Y = N \cot g\, \varphi - \left(R \cos \hat{\gamma} + X\, tg \frac{\hat{\gamma}}{2}\right)$$

(N طول قائم بزرگ و φ زاویه عرض جغرافیائی مدار مبدأ میباشد).

بطوریکه می‌بینیم هیچیک از دو سیستم تصویر فوق خاصیت عمومی و جهانی ندارند زیرا تصویر مرکاتور استوائی بدلیل تغییرشکل زیاد طولها درنقاط دور از استوا فقط برای مناطق استوائی مناسب‌است و تصویر مخروطی لامبر هم چون با تغییر مدار مبدأ تمام محاسباتش تغییر میکند لذا خاصیت جهانی نخواهد داشت .

بدلائل فوق امروزه سیستم تصویر دیگری بنام (U.T.M) یا مرکاتور نصف‌النهاری مرسوم شده است که کاملاً جنبه عمومی وجهانی دارد زیرا استوانه تصویر بجای آنکه در دور استوا به کره زمین مماس گردد در دور یک نصف‌النهار به زمین مماس خواهد شد و میتوانیم با تغییر دادن نصف‌النهار مبدأ و یا بعبارت دیگر با چرخاندن استوانه تصویر نقشه تمام مناطق زمین‌را درطول جغرافیائی شش درجه بدون‌تغییر شکل محسوس ومهم بایک‌فرمول واحدتهیه نمائیم. نقشه مربوط به هرشش‌درجه را یک‌منطقه یا (Zone) می‌نامند ومحاسبات برای تمام (Zone) ها یکسان میباشد.

بنابراین کلمه جهانی یا (Universal) برای این سیستم تصویر کاملا بجاست و بهمین‌دلیل اکثر کشورهای جهان سیستم تصویر جهانی فوق‌الذکر را قبول کرده‌اند و ازجمله کشور ایران از طریق اداره جغرافیائی ارتش که عهده‌دار تهیه نقشه های عمومی کوچک مقیاس کشور است این‌سیستم را پذیرفته است ونقشه های جدید $\frac{1}{250000}$ و $\frac{1}{50000}$ کشور ایران که با همکاری سرویس نقشه‌برداری ارتش امریکا از مجرای سازمان همکاری‌های منطقه‌ای (Cento) تهیه میشود دراین سیستم تصویر ترسیم میگردد.

ضمناً باید یادآوری شود که در تهیه نقشه های فوق‌الذکر مبنای محاسبات ژئودزی همان مبنای اروپائی است زیرا هنوز راجع بشکل ژئوئید (Geoide) یا زمینواره ایران مطالعات علمی کافی نشده است .

ولی راجع به (Reference Spheroide) اسفروئید یا گویواره مبنا ، کشور ایران مانند سایر کشورهای عضو (Cento) گویواره بین‌المللی (International) را پذیرفته است که مشخصات آن بشرح زیر میباشد :

۱- نیم قطر دائره استوائی :

a=۶۳۷۸۳۸۸ متر

۲- نیم قطر کوچک بیضی نصف‌النهاری :

b=۶۳۵۶۹۱۲ متر

۳- فشردگی قطبین

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{۱}{۲۹۷}$$

٤- خروج ازمرکز بیضی نصف‌النهاری :

$$e^{۲} = ۰/۰۰۶۷۲۲۶۷$$

کلیه جداول مربوط به محاسبات سیستم تصویر فوق درسال (۱۹۵۸) توسط سرویس نقشه‌برداری ارتش امریکا (Army Map Service) تهیه و دردسترس عموم قرار داده شده است ودرانتهای این مقاله یک صفحه ازآن جداول برای ملاحظه خوانندگان محترم چاپ شده است.

اینک در زیر طرز محاسبه این جداول و تئوری تصویر در سیستم (U.T·M) که مبنای آن کتاب ژئودزی لاکلاور (Laclavere) و انتشارات فنی سرویس نقشه‌برداری ارتش امریکا است.

(Department of The Army Technical Manual)

بطور مشروح بیان خواهد شد.

بطوریکه گفتیم در این سیستم استوانه تصویر در دور نصف‌النهار به گویواره مبنا مماس میشود و بنابراین تصویر مرکزی نصف‌النهارها و مدارها بترتیب بیضی ومنحنی چپ درجه چهارم خواهد شد (فصل مشترك صفحه واستوانه ومخروط و استوانه شکل ۳).

پس ازگستردن استوانه تصویر منحنی‌های مذکور فوق بطوریکه بعداً خواهیم دید تبدیل بـه منحنی‌های درجه بالاتر میشوند و بطوریکه روی شکل دیده میشود منحنی‌های نصف‌النهاری تماماً از نقطه P یعنی گسترده قطب میگذرند و منحنی‌های مداری هم در نقطه‌ای مانند L گسترده نصف‌النهار مبدأ راکه همان محور Y هاست قطع مینمایند بطوریکه OL برابر طول قوس نصف‌النهار از استوا تا مدار نقطه (M) میباشد. (درشکل مربوط نصف‌النهار مبدأ درصفحه قائم POP′ فرض شده است).

شبکه مختصات در این‌سیستم بشکل مربع است و مقادیر X و Y نقطه (M) که درجداول مربوط به محاسبه به‌حروف E و N نشان داده شده است بترتیب فاصله های $(\overline{MF})$ و $(\overline{OF})$ میباشد.

برای بدست آوردن فرمولهای مختصات X و Y لازم است قبلا روابط زیر راکه مربوط به خواص هندسی نصف‌النهار بیضوی دوار یا گویواره‌است یادآوری‌نمود(شکل ٤).

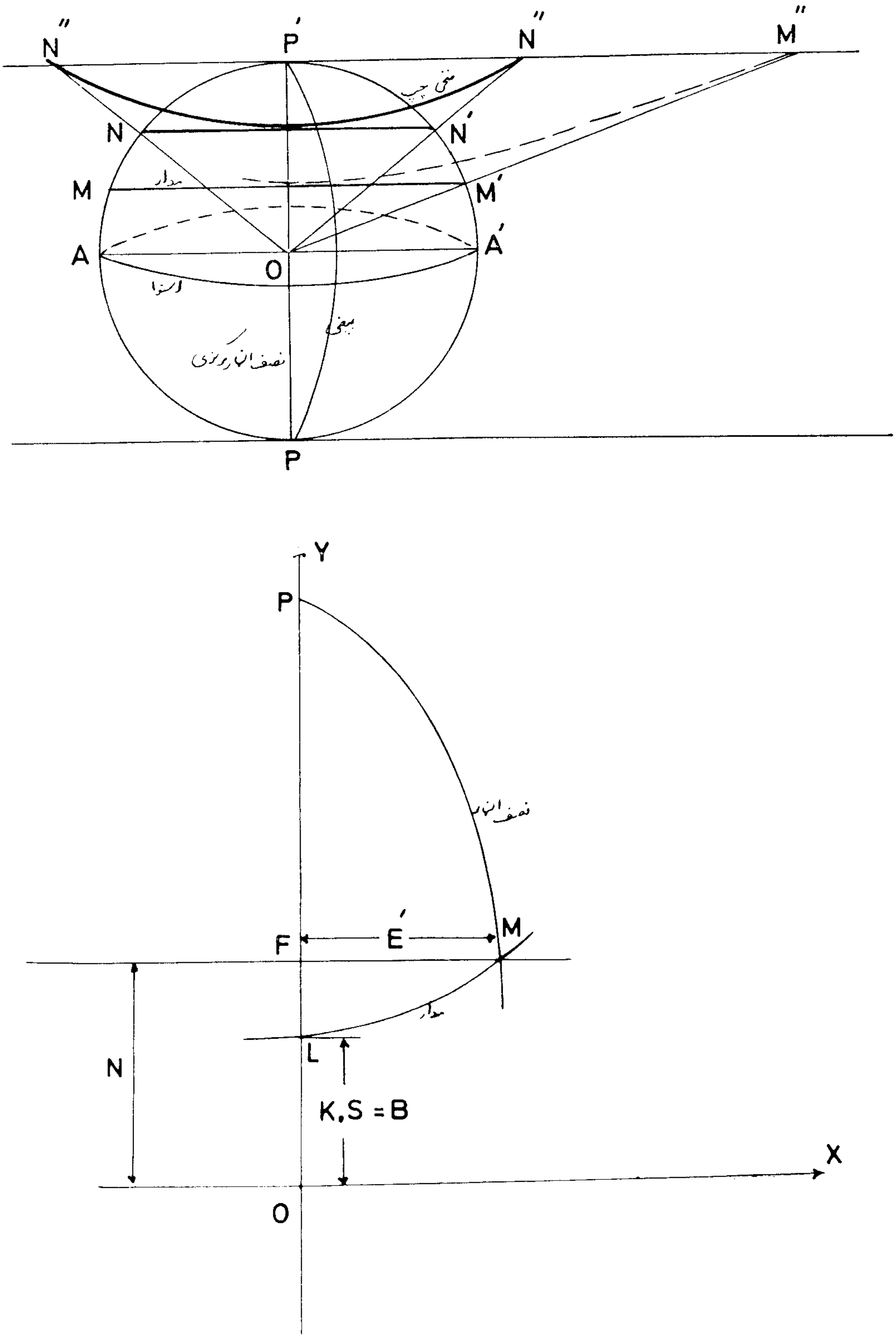
زاویه φ = عرض جغرافیائی (Latitude)

طول قائم بزرگ نقطه M بیضی:

$$\overline{MP} = N = \frac{a}{(۱-e^{۲}\sin^{۲}\varphi)^{\frac{۱}{۲}}}$$

طول شعاع خمیدگی نقطه M بیضی:

$$\overrightarrow{M\omega} = \rho = \frac{a(۱-e^{۲})}{(۱-e^{۲}\sin^{۲}\varphi)^{\frac{۳}{۲}}}$$


N''
P'
N''
M''
N
N'
M
M'
A
A'
O
P
مدار
استوا
نصف النهار مرکزی
Y
P
نصف النهار
E'
M
F
N
L
مدار
K,S = B
X
O

شکل ۳

$$\frac{N}{\rho}=\frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2}=\frac{(1-e^2)+e^2\cos^2\varphi}{(1-e^2)}$$

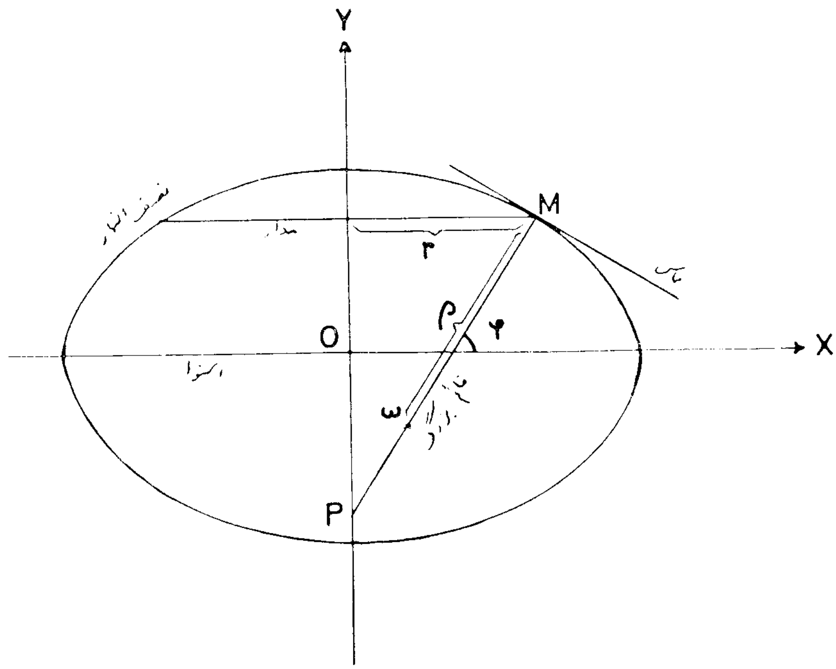
یا

$$\frac{N}{\rho}=1+e'^2\cos^2\varphi=V^2$$

$$e'^2=\frac{e^2}{1-e^2}$$

طول شعاع دائرهٔ مدار :

$$r=N\cos\varphi$$



شکل ٤

وهمچنین مشتق های :

$$\frac{dN}{d\varphi}=\frac{ae^2\sin 2\varphi}{2(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\rho e'^2\sin\varphi\cos\varphi$$

و با استفاده از مشتق رابطه : $\rho=\frac{N}{V^2}$

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{\frac{dN}{d\varphi}-\frac{N}{V^2}\frac{dV^2}{d\varphi}}{V^2}=\frac{3\rho e'^2\sin\varphi\cos\varphi}{V^2}$$

ودرمورد β قوس نصف‌النهار طبق تعریف شعاع خمیدگی :

$$\frac{d\beta}{d\varphi}=\rho$$

وهمچنین درمورد شعاع مدار :

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{dN}{d\varphi}\cos\varphi-N\sin\varphi=\rho e'^{2}\sin\varphi\cos^{2}\varphi-\rho(1+e'^{2}\cos^{2}\varphi)\sin\varphi=-\rho\sin\varphi$$

تعریف تصویر (Conform) همشکل :

بطورکلی دوشکل واقع درروی دوسطح مختلف را تصویر همشکل یکدیگر مینامند مشروط برآنکه زوایای مربوط مساوی واضلاع مربوط مشابه باشند بعلاوه سطحی که تصویر شکل روی آن ترسیم و محاسبه میگردد قابل گسترش باشد مانند (استوانه ومخروط). چون عموماً شکل ازروی زمین یاگویواره مبنا بصفحه تصویر منتقل میگردد لذا چنانچه مختصات یک نقطه گویواره راکه عموماً تابع مختصات جغرافیائی است u و v فرض کنیم و مختصات نقطه مربوط تصویر راکه پس ازگسترش سطح تصویر بدست می‌آید X و Y نام بگذاریم شرط اینکه دو تصویر همشکل باشد بصورت رابطه :

$$dS=Kds$$

نوشته میشود که در آن dS و ds طول یک قوس بی‌نهایت کوچک در روی سطح تصویر و سطح گویواره میباشد بعلاوه :

$$dS^{2}=dX^{2}+dY^{2} \quad \text{و} \quad ds^{2}=du^{2}+dv^{2}$$

وچون X و Y تابع u و v هستند لذا :

$$dX=\frac{\partial X}{\partial u}du+\frac{\partial X}{\partial v}dv$$

و

$$dY=\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv$$

و برای آنکه رابطه تشابه :

$$dS^{2}=K^{2}ds^{2}$$

درتمام نقاط برقرار باشد باید روابط زیر را داشته باشیم :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^{2}+\left(\frac{dY}{\partial u}\right)^{2}=\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^{2}+\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^{2}$$

و

$$\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v}=0$$

بعلاوه میدانیم که دو رابطه فوق شرط لازم وکافی برای آن است که تابع :

$$\boxed{X+iY=f(u+iv)}$$

یک تابع تحلیلی یا (Analytic) باشد و بعبارت دیگر تمام سیستم‌های مختلف تصویر همشکل از سطح

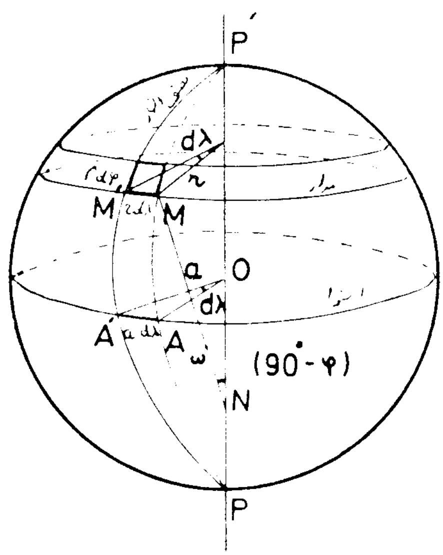
گویواره به سطح مختصات باید در تابع تحلیلی فوق صدق بنمایند.

حال اگر تابع مزبور را به سری تیلور (Taylor) بسط دهیم و قسمتهای حقیقی و موهومی دوطرف معادله را باهم برابر کنیم دو رابطه زیر بدست خواهد آمد که مبنای محاسبات مربوط به سیستم های مختلف تصویر میباشند.

$$\begin{cases} X = v \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{v^3}{6}\dfrac{\partial^3 f}{\partial u^3} + \dfrac{v^5}{120}\dfrac{\partial^5 f}{\partial u^5} + \cdots \\ Y = f(u) - \dfrac{v^2}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{v^4}{24}\dfrac{\partial^4 f}{\partial u^4} - \dfrac{v^6}{720}\dfrac{\partial^6 f}{\partial u^6} + \cdots \end{cases}$$

برای انتخاب یک سیستم مختصات مناسب درروی گویواره بطوریکه قبلا گفته شد سیستم مختصات جغرافیائی که عبارت از اختلاف طول جغرافیائی (Longitude) $(\Delta\lambda)$ و عرض جغرافیائی (Latitude) (φ) میباشد درنظرمیگیریم ولی این دومقدار قرینه یا (Symetric) نیستند زیرا قوس بی‌نهایت کوچک مدار برابر:

$$r d\lambda = N \cos\varphi \, d\lambda$$



شکل ۵

است درصورتیکه قوس بی‌نهایت کوچک نصف‌النهار برابر $\rho \, d\varphi$ میباشد بنابراین اگر بخواهیم:

$$du \equiv dv$$

یعنی مختصات قرینه باشد، باید داشته باشیم:

$$\rho d\varphi = N \cos\varphi \, d\lambda$$

و ازآنجا:

$$\boxed{d\lambda = \frac{\rho}{N \cos\varphi} d\varphi}$$

یعنی با مقیاس طول دائره استوا که برابر $(a \cdot d\lambda)$ است برای اینکه مختصات جغرافیائی قرینه باشد باید بجای زاویه عرض جغرافیائی φ زاویهٔ دیگری برابر :

$$L = \int_{\circ}^{\varphi} \frac{\rho}{N\cos\varphi} d\varphi$$

راقراردهیم که آنرا عرض جغرافیائی همپایه یا (Latitude isomctric) مینامند بنابراین سیستم مختصات قرینه در روی گویواره مقادیر :

$$v = \Delta\lambda$$

و

$$u = L = \int_{\circ}^{\varphi} \frac{\rho}{N\cos\varphi} d\varphi$$

خواهد شد که اگرآنرا باسیستم مختصات عادی X و Y سطح تصویر که آنهم یک سیستم قرینه است $(dX=dY)$ ارتباط دهیم با مقیاس طول قوس دائره استوا روابط ساده زیر بدست خواهد آمد:

$$X = K_{\circ} a \Delta\lambda \quad \text{و} \quad Y = K_{\circ} a L$$

بدست خواهدآمد که همان سیستم تصویر مرکاتور یاتصویر استوانه‌ای استوائی میباشد که یک مربع کوچک سطح گویواره را تبدیل به یک مربع کوچک سطح تصویر مینماید و بنابراین یک تصویر هم‌شکل میباشد.

من باب مثال مقدار زاویه L مربوط به چندزاویه عرض جغرافیائی φ درجدول صفحه بعد ذکرشده است که نسبت نقصان و افزایش آنرا بخوبی نشان میدهد و چنانچه شبکه خطوط موازی مربوط به مقادیر $\Delta\lambda$ و L را رسم کنیم سیستم تصویر هم‌شکل شبکه مرکاتور بدست خواهد آمد (شکل ٦).

برای محاسبه مقدار L ازجداول مخصوص استفاده میشود ولی میتوان مقدارآنرا بترتیب زیر بسهولت حساب نمود.

$$L = \int_{\circ}^{\varphi} \frac{\rho}{N\cos\varphi} d\varphi$$

$$\frac{\rho}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

و

$$\frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \frac{e^2\cos\varphi d\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e\frac{d(e\sin\varphi)}{1-(e\sin\varphi)^2}$$

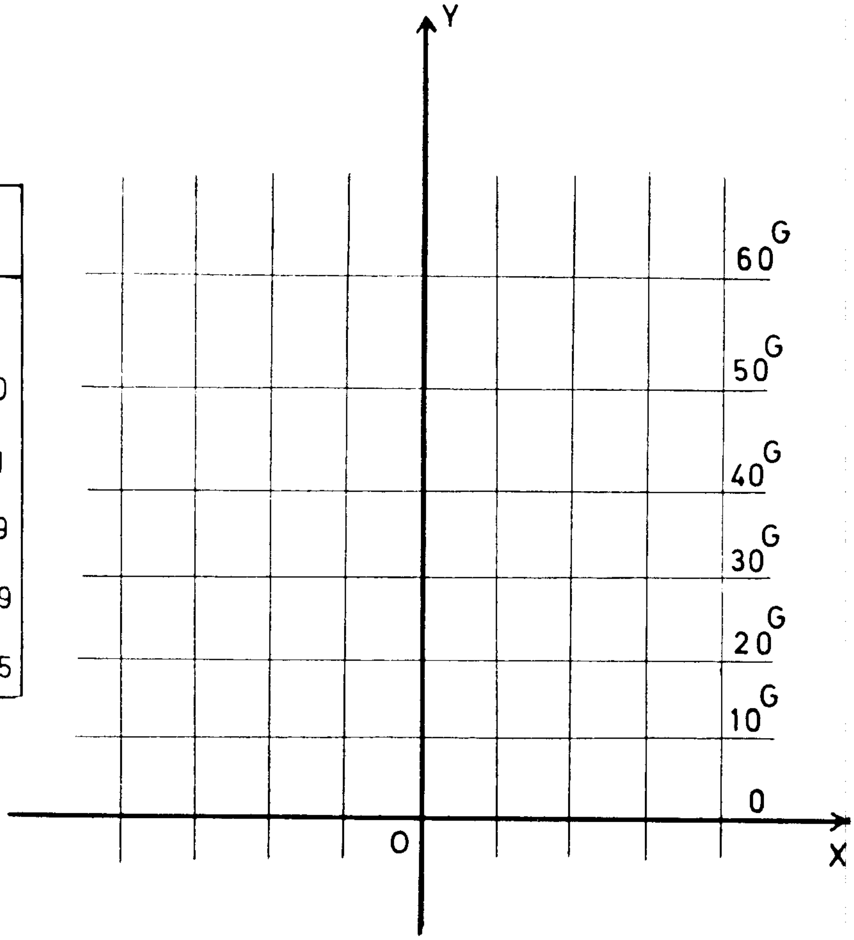
و

$$L = \int_{\circ}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - e\int_{\circ}^{\varphi} \frac{d(e\sin\varphi)}{1-(e\sin\varphi)^2} = Log\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} Log \frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

و پس از تبدیل به لگاریتم معمولی خواهیم داشت :

واحد گراد

φ	$\mathcal{L}$
10^G	9,9744
20^G	20,2050
30^G	30,9811
40^G	42,6739
50^G	55,8069
60^G	71,2205



شکل ۶

$$L = \frac{۱}{\mu}\left[\log tg\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\varphi}{۲}\right) - \frac{e}{۲}\log\frac{۱+e\sin\varphi}{۱-e\sin\varphi} \right]$$

که محاسبه آن با استفاده از ماشین های حساب الکترونیک بسیار ساده میباشد .

$$\mu = \log e = ۰٫۴۳۴۲۹$$

تبصره ـ راجع به سیستم تصویرمخروطی لامبرنیز باید گفت که اگر درشکل ۶ دائره بشعاع SO گسترده مدار مبدأ باشد طول شعاع این دائره برابر :

$$R_\circ = N_\circ \, cotg\varphi_\circ$$

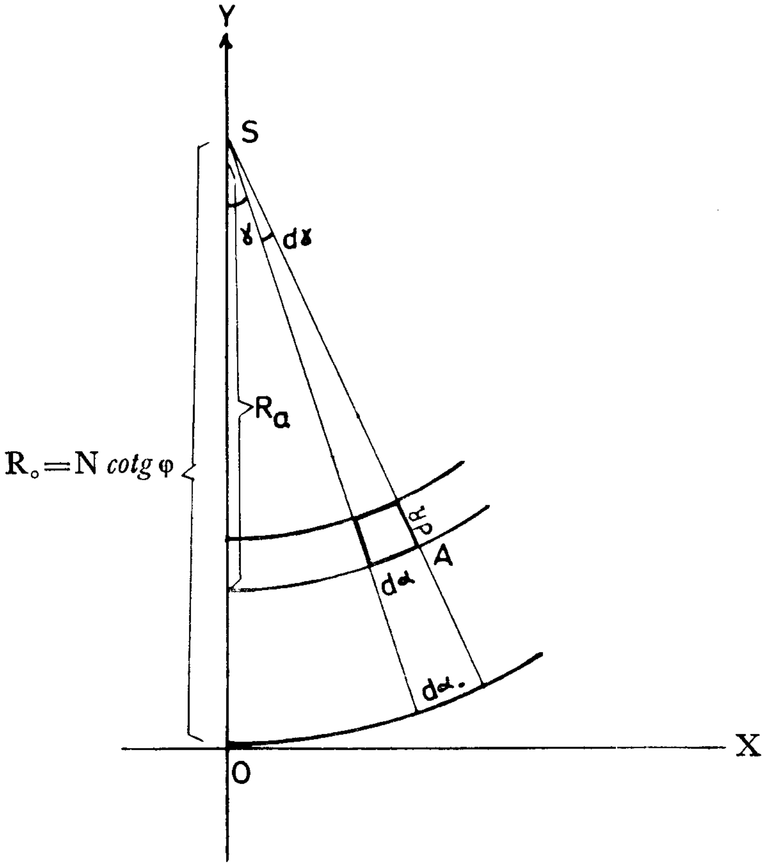
است وطول عنصر بی‌نهایت کوچک این قوس برابر :

$$d\alpha_\circ = R_\circ d\gamma$$

است درصورتیکه طول عنصر قوس نقطه A برابر :

$$d\alpha = R_a d\gamma$$

میباشد که کوچکتراست وبرای اینکه این طول مساوی با $d\alpha$ یعنی طول قوس مبدأ گشته وشبکه مختصات قطبی dR و $d\alpha$ قرینه شود باید $d\alpha$ را درضریب :



شکل ۷

$$K = \frac{R_\circ}{R_a}$$

ضرب نمود و بهمین ترتیب dR را هم به نسبت K افزایش داد و بنابراین بجای شعاع R_a باید شعاع کوچکتری مساوی R'_a قرار داد که طبق فرمول :

$$R'_a = R_\circ - \int_{R_\circ}^{R_a} KdR = R_\circ - R_\circ Log \frac{R_\circ}{R_a} = R_\circ - R_\circ Log K$$

حساب خواهد شد.

بنابراین فاصله بین دوائر مداری R'_a و دائره مبدأ برابر :

$$R_\circ - R'_a = R_\circ\, Log\, K$$

خواهد شد حال اگر روی سطح گویواره نیز فاصله های مداری را طبق فرمول عرض جغرافیائی همپایه بترتیبی که دربالا گفته شد اصلاح کنیم خواهیم داشت :

$$L_{\varphi_\circ}^{\varphi}=\int_{\varphi_\circ}^{\varphi}\frac{\rho}{N\cos\varphi}\,d\varphi=L_\varphi - L_{\varphi\circ}$$

لذا برای هم‌شکل ساختن تصویر باید بین دوفاصله مداری مذکور فوق تناسب برقرار سازیم و باین ترتیب فرمول محاسبه مختصات در سیستم تصویر مخروطی لامبر بصورت زیر خواهد بود :

$$R_\circ\, Log\,\frac{R_\circ}{R_a}=E(L_\varphi - L_{\varphi\circ})$$

که در آن نسبت (E) را سیتوان ضریب یا مقیاس تناسب نامید.

طرز محاسبه فرمول‌های مختصات در تصویر (U.T.M) :

برای بدست آوردن این فرمولها دردورابطه بسط سری تیلور مربوط به تابع تحلیلی تصویر هم‌شکل که قبلا شرح داده شد. بجای (u) مقدار L (عرض جغرافیائی همپایه) و بجای (v) مقدار ($\triangle\lambda$) تفاوت طول جغرافیائی را قرار میدهیم و باین ترتیب دو رابطه زیر که مبنای محاسبات است بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} X=\triangle\lambda\dfrac{\partial f}{\partial L}-\dfrac{\triangle\lambda^{3}}{6}\dfrac{\partial^{3} f}{\partial L^{3}}+\dfrac{\triangle\lambda^{5}}{120}\dfrac{\partial^{5} f}{\partial L^{5}}+\cdots\cdot \\ Y=f(L)-\dfrac{\triangle\lambda^{2}}{2}\dfrac{\partial^{2} f}{\partial L^{2}}+\dfrac{\triangle\lambda^{4}}{24}\dfrac{\partial^{4} f}{\partial L^{4}}-\dfrac{\triangle\lambda^{6}}{720}\dfrac{\partial^{6} f}{\partial L^{6}}+\cdots\cdot \end{cases}$$

ولی بطوریکه قبلا گفته شد طول β یا نصف‌النهار مبدأ که استوانه تصویر در دور آن به گویواره مماس است پس از گسترش بدون تغییر باقی خواهد ماند لذا خواهیم داشت :

برای $\triangle\lambda=0$ $X=0$ و $Y=f(L)=B$

که درآن :

$$B=\int d\beta$$

ولی قبلا دیدیم :

$$dL=\frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi}=\frac{d\beta}{r}$$

بنابراین کافی است که برای محاسبه سری‌های مقادیر X و Y فوق‌الذکر مشتق های زیر را حساب کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial B}{\partial L}=\frac{d\beta}{\partial L}$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial L^{2}}=\frac{\partial^{2}\beta}{\partial L^{2}}$$

$$\frac{\partial^{3} f}{\partial L^{3}}=\frac{\partial^{3}\beta}{\partial L^{3}}\cdots\cdot$$

محاسبه مشتق‌های پی‌در پی $d\beta$ با استفاده ازفرمولهائی که قبلایادآوری شد اشکال زیادی ندارد و بتدریج روابط زیر بدست خواهد آمد :

۱- طبق تعریف dL

$$\frac{d\beta}{dL} = r = N\cos\varphi$$

-۲

$$\frac{d^2\beta}{dL^2} = \frac{dr}{dL} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{dL}$$

ویا

$$\frac{d^2\beta}{dL^2} = -\rho\sin\varphi\cdot\frac{1}{\rho}\cdot N\cos\varphi = -\frac{1}{2}N\sin 2\varphi = -N\sin\varphi\cos\varphi$$

- ۳

$$\frac{d^3\beta}{dL^3} = -\left(\frac{1}{2}\,\frac{dN}{d\varphi}\sin 2\varphi + N\cos 2\varphi\right)\frac{d\varphi}{dL}$$

و چون :

$$\frac{d\varphi}{dL} = \frac{N}{\rho}\cos\varphi$$

لذا خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\frac{d^3\beta}{dL^3} &= -[\rho e'^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + N(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)]\,\frac{N}{\rho}\cos\varphi = \\ &= -[Ne'^2\sin^2\varphi\cos^3\varphi + N(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(1 + e'^2\cos^2\varphi)\cos\varphi] \\ &= -N\cos^3\varphi(1 + e'^2\cos^2\varphi - tg^2\varphi) = -N\cos^3\varphi(V^2 - tg^2\varphi)\end{aligned}$$

و بهمین ترتیب با محاسبات مفصل‌تر وحذف جمله‌های شامل e'^2 و e'^4 درمشتق های پنجم و ششم روابط زیر نیز بدست خواهد آمد :

$$\frac{d^4\beta}{dL^4} = N\cos^4\varphi\, tg\varphi(V^2 + 4V^4 - tg^2\varphi)$$

و

$$\frac{d^5\beta}{dL^5} = N\cos^5\varphi[V^2(14 - 58\,tg^2\varphi) + 40\,tg^2\varphi + tg^4\varphi - 9]$$

و

$$\frac{d^6\beta}{dL^6} = -N\cos^6\varphi\, tg\varphi(61 - 58\,tg^2\varphi + tg^4\varphi)$$

بنابراین باتوجه به مشتق‌های مذکور فوق و باانتخاب ضریب K_0 تغییر مقیاس و تبدیل $\Delta\lambda$ که به دسی‌میلیگراد اندازه‌گیری میشود به‌واحد رادیان بسط‌های مقادیرX و Y مختصات (U.T.M.) بصورت زیر نوشته خواهد شد :

$$X=K_0N(\sin i''\cos\varphi)\Delta\lambda+K_0N(\sin i''\cos\varphi)^{3}\left(\frac{V^{2}-tg^{2}\varphi}{6}\right)\Delta\lambda^{3}$$

$$+K_0N(\sin i''\cos\varphi)^{5}\left[\frac{V^{2}(14-58tg^{2}\varphi)+40\,tg^{2}\varphi+tg^{4}\varphi-9}{120}\right]\Delta\lambda^{5}$$

و

$$Y=K_0B+\frac{1}{2}K_0N\,tg\varphi(\sin i''\cos\varphi)^{2}\Delta\lambda^{2}$$

$$+K_0N\,tg\varphi\,(\sin i''\cos\varphi)^{4}\left(\frac{V^{2}+4V^{4}-tg^{2}\varphi}{24}\right)\Delta\lambda^{4}$$

$$+K_0N\,tg\varphi\,(\sin i''\cos\varphi)^{6}\left(\frac{61-58tg^{2}\varphi+tg^{4}\varphi}{720}\right)\Delta\lambda^{6}$$

بطوریکه دیده میشود فرمولهای مختصات(U·T.M) نسبت به $\cos\varphi$ از درجه‌پنجم وششم ونسبت به $tg\,\varphi$ از درجه چهارم و نسبت به (e') هم از درجه چهارم هستند و محاسبه‌آنها بدون حسابگر الکترونیک (Computer) کار بسیار دشواری است بهمین‌جهت سرویس نقشه‌برداری ارتش امریکا این‌زحمت را بعهده گرفته وجداول لازم برای محاسبه X و Y را تهیه نموده است.

در این جداول بجای $\Delta\lambda$ تفاوت طول جغرافیائی مبدأ و نقطه مورد نظر که تا اعشار ثانیه تعیین میشود عدد $(10^{4}p)$ را قرار میدهند بنابراین $p=0.0001\Delta\lambda$ ومقدار ضریب K_0 را هم بمنظور اینکه تغییر شکل در یک (Zone) شش‌درجه بین $+3°$ و $-3°$ دوطرف نصف‌النهار مبدأ تقسیم شود برابر (۰٫۹۹۹۶) میگیرند وباین ترتیب‌فرمولهای X و Y مختصات (U·T.M) به‌واحد متر واعشار سانتیمتر بطوریکه درجداول مذکور فوق حساب شده است بصورت زیر درخواهند آمد :

$$E'=X=(IV)p+(V)p^{3}+B_5$$

و

$$N=Y=(I)+(II)p^{2}+(III)p^{4}+A_6$$

که درآنها ضرائب توانهای p ومقادیر بسیارکوچک B_5 و A_6 دارای فرمولهای زیر میباشند :

$(I)=K_0B$ (طول تبدیل شده نصف‌النهار مبدأ)

$$(II)=K_0 10^{8}\sin^{2}i''\frac{N}{2}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$(III)=K_0 10^{16}\sin^{4}i''N\cos^{3}\varphi\sin\varphi\left(\frac{V^{2}+4V^{4}-tg^{2}\varphi}{24}\right)$$

$$(IV)=K_0 10^{4}\sin i''\cos\varphi$$

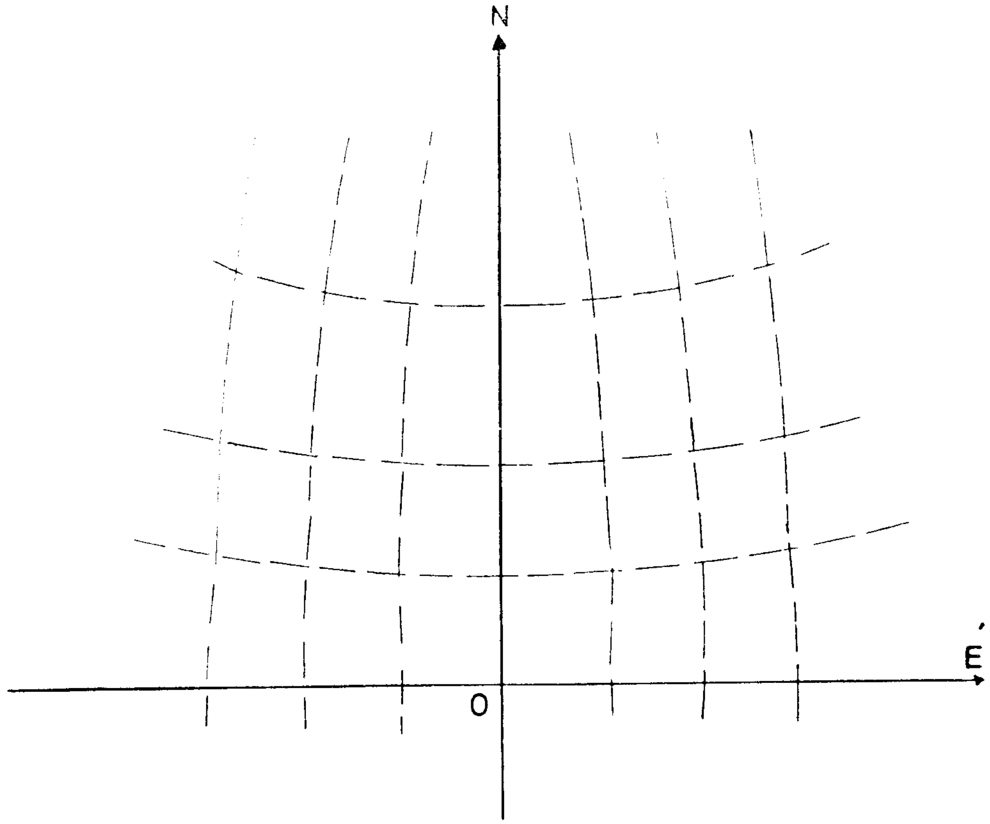
$$(V)=K_0 10^{12}\sin^{3}i''N\cos^{3}\varphi\left(\frac{V^{2}-tg^{2}\varphi}{6}\right)$$

$$B_5 = K_0 10^{20} \sin^5 1'' N \cos^5 \varphi \left[\frac{V^2(14 - 58\, tg^2\varphi) + 40 \cdot tg^2\varphi + tg^4\varphi - 9}{120} \right] p^5$$

$$A_6 = K_0 10^{24} \sin^6 1'' N \cos^5 \varphi \sin\varphi \left(\frac{61 - 58\, tg^2\varphi + tg^{24}}{720} \right) p^6$$

در جداول (U.T.M) ضرائب (I) (II) (III) (IV) (V) که فقط تابع عرض جغرافیائی (φ) میباشند برای دقیقه تعیین شده‌است و اختلاف تابل (Tabular Difference) هم برای هرثانیه تعیین شده‌است بنابراین میتوان بطریقه (Interpolation) ضرائب را برای ثانیه تعیین نمود. ولی توان‌های p باید مستقیماً بوسیلهٔ ماشین حساب شود و سپس در ضرائب مربوط ضرب گردد.

جمله های B_5 و A_6 مقادیر بسیار کوچکی هستند بطوریکه مقدار جمله A_6 درتمام عرض شش درجه یک منطقه ازحدود شش میلیمتر تجاوز نمیکند ولی تغییرات B_5 زیادتر است واز صفر تا ۲۰۰ میلیمتر تغییر مینماید بنابراین محاسبه (B_5) باید بادقت زیادتری صورت گیرد.



شکل ۹

معذلک هردو جمله فوق بدلیل کوچکی بوسیله آباك (Abaque) هائی حساب میشود که درکنار جدول مشاهده میگردد بدیهی است آباك مربوط به (B_5) بزرگتر و دقیق‌تر میباشد.

ضمناً باید توجه داشت که مقدار (N) برای نیمکره جنوبی برای احتراز از ارقام منفی بصورت :

$$N_S = ۱۰۰۰۰۰۰۰ - [(I) + (II)p^{۲} + (III)p^{٤} + A_{٦}]$$

محاسبه میگردد.

بطوریکه قبلا هم گفته شد شبکه مختصات X و Y در سیستم تصویر (U.T.M) یک شبکه مربع عادی است ولی نصف‌النهارها بصورت خطوط منحنی متقارب درقطب و مدارها بصورت خطوط منحنی عمود به نصف‌النهارها رسم میشوند بطوریکه منظره عمومی آنها کمی شبیه سیستم مختصات قطبی لاسبر بنظر میآید بعلاوه نمونه دوصفحه از جدول (U.T.M) در صفحات بعد ملاحظه میگردد که در مقابل عرض جغرافیائی معین که به درجه و دقیقه مشخص گشته مقادیر I و II و III و IV و V مربوط بآن تعیین شده است و اضافه مربوط به ثانیه هم بکمک احتلاف تابل حساب میشود که در مقابل هرضریب تعیین گشته این اختلاف تابل برای یک‌ثانیه‌است و باید درعدد ثانیه‌ها ضرب‌شود مثلا مقدارضریب I برای عرض‌جغرافیائی ′۱۰ °۳٤ برابر ۳۷۸۹۹۳۵ر۱۱۹ است واختلاف تابل برابر یک‌ثانیه ۳۰ر۸۰۱٤۹ میباشند بنابراین مقدار ضریب I برای عرض جغرافیائی ″۳۵ ′۱۰ °۳٤ برابر:

$$۳۷۸۹۹۳۵ر۱۱۹ + ۳۵ \times ۳۰ر۸۰۱٤۹ = ۳۷۸۹۹۳۵ر۱۱۹ + ۱۰۷۸ر۰۵۲ = ۳۷۹۱۰۱۳ر۱۷۱$$

خواهد شد و بهمین ترتیب ضریب های دیگر بعلاوه مقادیر B_5 و A_6 از روی اباك ها حساب میشود و مقدار P هم‌بطوریکه قبلا گفته شد برابر $\Delta\lambda$ ۰۰۰۱ر. میباشد که $\Delta\lambda$ به‌واحد ثانیه حساب خواهد شد مثلا برای ″۱٦ ′۵۷ °۲ = $\Delta\lambda$ خواهیم داشت :

$$\Delta\lambda = ۲ \times ۳٦۰۰ + ۵۷ \times ٦۰ + ۱٦ + ۰ر۸ = ۱۰٦۳٦ر۸$$

و از آنجا

$$p = ۱ر۰٦۳٦۸$$

UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

N of Equator $N = (I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6$

$p = .0001\ \Delta\lambda\ ''$ S of Equator $N = 10{,}000{,}000 - [(I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6]$

Latitude	(I)	Diff. 1″	(II)	Diff. 1″	(III)
37°00′	4 094 939.161	30.81564	3 605.769	0.01007	2.014
01	4 096 788.099	30.81574	3 606.373	0.01005	2.013
02	4 098 637.043	30.81582	3 606.977	0.01003	2.012
03	4 100 485.992	30.81590	3 607.578	0.01001	2.011
05	4 102 334.946	30.81600	3 608.179	0.00999	2.011
37 05	4 104 183.907	30.81609	3 608.779	0.00997	2.010
06	4 106 032.872	30.81617	3 609.377	0.00995	2.009
07	4 107 881.842	30.81625	3 609.974	0.00993	2.008
08	4 109 730.817	30.81634	3 610.570	0.00991	2.007
09	4 111 579.797	30.81644	3 611.164	0.00989	2.006
37 10	4 113 428.783	30.81652	3 611.757	0.00987	2.005
11	4 115 277.774	30.81660	3 612.349	0.00985	2.005
12	4 117 126.770	30.81669	3 612.940	0.00983	2.004
13	4 118 975.771	30.81679	3 613.530	0.00981	2.003
14	4 120 824.778	30.81687	3 614.119	0.00979	2.002
37 15	4 122 673.791	30.81695	3 614.706	0.00977	2.001
16	4 124 522.808	30.81703	3 615.292	0.00975	2.000
17	4 126 371.830	30.81713	3 615.877	0.00973	1.999
18	4 128 220.858	30.81722	3 616.460	0.00971	1.998
19	4 130 069.891	30.81730	3 617.042	0.00969	1.997
37 20	4 131 918.929	30.81738	3 617.624	0.00966	1.997
21	4 133 767.972	30.81748	3 618.203	0.00964	1.996
22	4 135 617.021	30.81757	3 618.782	0.00962	1.995
23	4 137 466.075	30.81765	3 619.360	0.00960	1.994
24	4 139 315.134	30.81773	3 619.936	0.00958	1.993
37 25	4 141 164.198	30.81783	3 620.511	0.00956	1.992
26	4 143 013.269	30.81792	3 621.085	0.00954	1.991
27	4 144 862.344	30.81800	3 621.657	0.00952	1.990
28	4 146 711.424	30.81808	3 622.228	0.00950	1.989
29	4 148 560.509	30.81818	3 622.798	0.00948	1.989
37 30	4 150 409.600	30.81827	3 623.367	0.00946	1.988
31	4 152 258.696	30.81835	3 623.935	0.00944	1.987
32	4 154 107.797	30.81843	3 624.501	0.00942	1.986
33	4 155 956.903	30.81853	3 625.067	0.00940	1.985
34	4 157 806.015	30.81862	3 625.631	0.00938	1.984
37 35	4 159 655.132	30.81870	3 626.193	0.00936	1.983
36	4 161 504.254	30.81878	3 626.755	0.00934	1.982
37	4 163 353.381	30.81888	3 627.315	0.00932	1.981
38	4 165 202.514	30.81897	3 627.874	0.00930	1.980
39	4 167 051.652	30.81905	3 628.432	0.00928	1.979
37 40	4 168 900.795	30.81913	3 628.989	0.00926	1.979
41	4 170 749.943	30.81923	3 629.544	0.00924	1.978
42	4 172 599.097	30.81932	3 630.098	0.00922	1.977
43	4 174 448.257	30.81940	3 630.651	0.00920	1.976
44	4 176 297.421	30.81950	3 631.203	0.00917	1.975
37 45	4 178 146.591	30.81957	3 631.753	0.00915	1.974
46	4 179 995.765	30.81967	3 632.303	0.00913	1.973
47	4 181 844.945	30.81975	3 632.851	0.00911	1.972
48	4 183 694.130	30.81985	3 633.398	0.00909	1.971
49	4 185 543.321	30.81993	3 633.943	0.00907	1.970
37 50	4 187 392.517	30.82002	3 634.487	0.00905	1.969
51	4 189 241.718	30.82010	3 635.031	0.00903	1.968
52	4 191 090.924	30.82020	3 635.572	0.00901	1.968
53	4 192 940.136	30.82028	3 636.113	0.00899	1.967
54	4 194 789.353	30.82037	3 636.653	0.00897	1.966
37 55	4 196 638.575	30.82047	3 637.191	0.00895	1.965
56	4 198 487.803	30.82055	3 637.728	0.00893	1.964
57	4 200 337.036	30.82063	3 638.263	0.00891	1.963
58	4 202 186.274	30.82072	3 638.798	0.00889	1.962
59	4 204 035.517	30.82080	3 639.331	0.00887	1.961
38 00	4 205 884.765		3 639.863		1.960

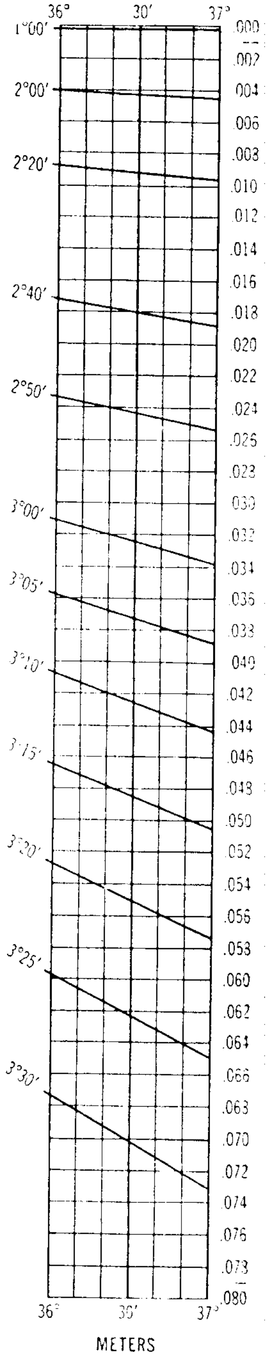
INTERNATIONAL SPHEROID
METERS

$E' = (IV)p + (V)p^3 + B_5$

$p = .0001\ \Delta\lambda''$

Latitude	(IV)	Diff. 1″	(V)	Diff. 1″
36°00′	250 365.585	−0.87817	30.592	−0.00102
01	250 312.895	0.87852	30.531	0.00102
02	250 260.183	0.87888	30.470	0.00102
03	250 207.451	0.87923	30.409	0.00102
04	250 154.697	0.87958	30.349	0.00101
36 05	250 101.922	−0.87994	30.288	−0.00101
06	250 049.126	0.88029	30.227	0.00101
07	249 996.308	0.88065	30.166	0.00101
08	249 943.469	0.88100	30.105	0.00101
09	249 890.609	0.88135	30.044	0.00101
36 10	249 837.728	−0.88171	29.983	−0.00101
11	249 784.826	0.88206	29.922	0.00101
12	249 731.902	0.88241	29.862	0.00101
13	249 678.958	0.88276	29.801	0.00101
14	249 625.992	0.88312	29.740	0.00101
36 15	249 573.005	−0.88347	29.679	−0.00101
16	249 519.996	0.88382	29.618	0.00101
17	249 466.967	0.88418	29.558	0.00101
18	249 413.916	0.88453	29.497	0.00101
19	249 360.845	0.88488	29.436	0.00101
36 20	249 307.752	−0.88523	29.375	−0.00101
21	249 254.638	0.88559	29.315	0.00101
22	249 201.503	0.88594	29.254	0.00101
23	249 148.346	0.88629	29.193	0.00101
24	249 095.169	0.88664	29.133	0.00101
36 25	249 041.970	−0.88700	29.072	−0.00101
26	248 988.750	0.88735	29.011	0.00101
27	248 935.509	0.88770	28.951	0.00101
28	248 882.247	0.88805	28.890	0.00101
29	248 828.964	0.88840	28.829	0.00101
36 30	248 775.660	−0.88876	28.769	−0.00101
31	248 722.335	0.88911	28.708	0.00101
32	248 668.988	0.88946	28.647	0.00101
33	248 615.621	0.88981	28.587	0.00101
34	248 562.232	0.89016	28.526	0.00101
36 35	248 508.822	−0.89051	28.466	−0.00101
36	248 455.392	0.89086	28.405	0.00101
37	248 401.940	0.89122	28.345	0.00101
38	248 348.467	0.89157	28.284	0.00101
39	248 294.973	0.89192	28.224	0.00101
36 40	248 241.458	−0.89227	28.163	−0.00101
41	248 187.921	0.89262	28.103	0.00101
42	248 134.364	0.89297	28.042	0.00101
43	248 080.786	0.89332	27.982	0.00101
44	248 027.187	0.89367	27.921	0.00101
36 45	247 973.566	−0.89402	27.861	−0.00101
46	247 919.925	0.89437	27.800	0.00101
47	247 866.262	0.89473	27.740	0.00101
48	247 812.579	0.89508	27.679	0.00101
49	247 758.874	0.89543	27.619	0.00101
36 50	247 705.149	−0.89578	27.559	−0.00101
51	247 651.402	0.89613	27.498	0.00101
52	247 597.634	0.89648	27.438	0.00101
53	247 543.846	0.89683	27.377	0.00101
54	247 490.036	0.89718	27.317	0.00101
36 55	247 436.206	−0.89753	27.257	−0.00101
56	247 382.354	0.89788	27.196	0.00101
57	247 328.481	0.89823	27.136	0.00100
58	247 274.588	0.89858	27.076	0.00100
59	247 220.673	0.89893	27.016	0.00100
37 00	247 166.738		26.955	

B_5



$\Delta^2(IV)$ UNITS OF (IV)

A_6 METERS