کاربرد تئوری گرافها بعنوان مدل سیستمهای فیزیکی

نوشتهٔ :

پرویز جبه‌دار مارالانی Ph. D.

استادیار دانشکده فنی

۱ ـ مقدمه

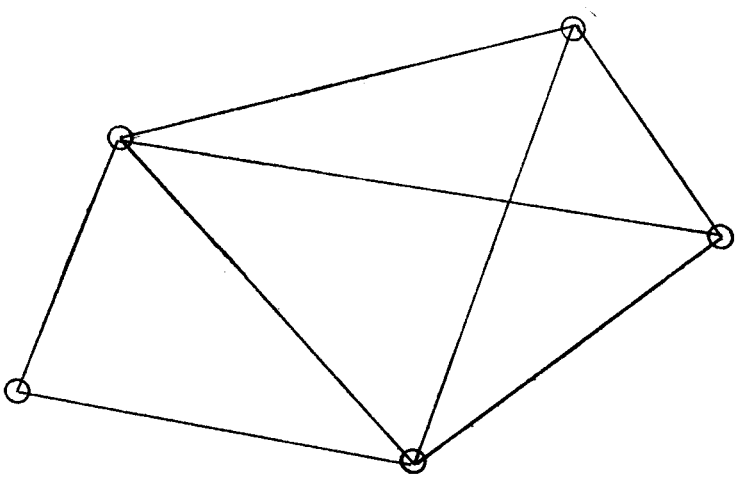
دربیشتر موارد تحلیل مساله‌های فیزیکی هنگامیکه بصورت یک مدل ریاضی در می‌آیند امکان پذیر و ساده میگرددوعمل طرح و سازندگی نسبتاً آسان میشود ولی برخی سیستمهای فیزیکی وجود دارند که شاید نتوان بسادگی برای آنها مدل ریاضی مناسبی بدست‌آورد که با چند معادلهٔ ریاضی که با آنها کم‌وبیش آشنا هستیم بیان شود. چه‌بسا پارامترهائی درسیستم موجودند که احیاناً نمیتوان آنها را بصورتی مناسب در مدل ریاضی مربوط دخالت داد ویا اگر این‌عمل ممکن باشد مسأله بصورت مدل ریاضی بسیار پیچیده‌ای در میآید که حل آن خود خالی از اشکال نخواهد بود ازسوی دیگر شاید گاه نیازی نباشد که برای تحلیل یک سیستم فیزیکی آنرا بصورت مدل ریاضی خاصی که با چند معادله معینی بیان میشود درآوردیم وگاه میتوان مدل ریاضی ازنوع دیگرساخت که‌درآن‌مجموعهٔ اطلاعات و پارامترهای داده شده سیستم بصورتی مناسب‌تر و فشرده‌تری دخالت کند. البته انتخاب مناسبترین نوع مدل ریاضی به ماهیت مسأله فیزیکی مورد مطالعه و پارامترهای مشخص کنندهٔ آن بستگی دارد. چنین بنظرمیرسد که تئوری گراف (Graph Theory) برای نمایش بعضی از سیستمهای فیزیکی بسیار مناسب است. منظور ما دراین‌مقاله آنست که با نحوهٔبیان‌پاره‌ای سیستمهای‌فیزیکی بصورت‌مدل تئوری گرافهاآشنا شده و بگفتهٔ‌دیگر روش جدیدی‌برای ساختن مدل‌سیستمهای فیزیکی عرضه کنیم‌البته همچنانکه گفته شداین روش‌تنها راههای‌ساده‌تری‌برای‌تحلیل برخی‌ازسیستمهای‌فیزیکی معین بدست میدهد و شایدبرای یک سیستم کلی دیگر نتوان این روش را بآسانی بکاربرد. ناگفته نماند که گاه میتوان برخی مسایل سیستمهای فیزیکی را که‌با روش تئوری گراف حل میشوند با روشهای ریاضی‌معلوم دیگر نیز حل نمود. با این وجود ، سادگی و ظرافت و قدرت مدل تئوری گراف برای حل اینگونه مسائل اهمیت آنرا در مقام مقایسه با روشهای دیگر روشن ساخته و ما را در بکاربردن هرچه بیشتر این روش

برای حل اینگونه مسائل ترغیب مینماید. دراین مقاله مثالهای متعددی خواهیم آورد که چگونگی تشکیل مدل تئوری گراف را برای برخی سیستمها تشریح کرده و تا اندازه‌ای مارا بابکار بردن این نوع مدل ریاضی که بیشتر جنبهٔ عملی دارد آشنا میسازد.

۲ ـ گراف ـ مدل سیستمهای فیزیکی

بسیاری سیستمها شامل ارتباط یا حمل و نقل یا انتقال شار (Flow) و یا تغییر مکان کالا بمعنی اعم (Commodity) میباشند. دربرخی موارد کالای مزبور قابل لمس است مانند واگنهای راه‌آهن، اتومبیلها، بشکهٔ نفت یا آب. درموارد دیگر کالای مورد نظر قابل لمس نیست مانند اطلاعات، بیماری، توارث. بنابراین سیستم شاهراهها (Highways)، شبکه‌های تلفنی، بهم پیوستن انبارها شبکه‌های برق یا هواپیمائی همگی شامل شارش کالا در یک شبکه می‌باشند در بیشتر موارد میتوان برای مطالعه در این نوع شبکه‌ها با یک روش ریاضی بنام گراف مدل لازم را تهیه نمود. یک گراف عبارتست از نقاطی که رأس (Vertex) نامیده میشوند و خطوطی که این نقاط را بیکدیگر میپیوندند و آنها را شاخه‌ها (Branch) مینامیم و در روی یک صفحه رسم شده‌اند.

نمایش تصویری یک گراف درشکل (۱) داده شده‌است. این گرافها را میتوان برای ساختن مدلهای انواع سیستمهای فیزیکی بکاربرد. مدلهای بعضی سیستمها کاملاً طبیعی هستند ولی برای برخی دیگر ارتباط میان مدلی که از تئوری گراف بدست میآید با سیستم اصلی بآسانی آشکار نیست. درگروه اول سیستمهائی



شکل ۱ ـ نمایش تصویری یک گراف

هستند که بصورت شبکه‌های ارتباطات و انتقالات مشخص میشوند، خطوط یا شاخه‌های گراف میتواند نمایش جاده‌ها، سیمهای تلگراف، راههای آهن، راههای هوائی، لوله‌های آب یا در حالت کلی کانالهائی باشند که از داخل آنها شار انتقال داده میشود. رأسها یا نقاط گراف میتوانند نمایش اجتماعات، تقاطع شاهراهها، ایستگاههای تلگراف، ایستگاههای راه آهن، فرودگاهها، مخازن آب و مراکز خروجی یا در حالت کلی

نقاطی باشد که از آنها شار سرچشمه میگیرد یا رله (Relayed) میشود یا ختم (Terminated) میگردد. لازمست میان گرافهای مدلهای سیستمهای فیزیکی مختلف تمایز قائل شد. دو شبکه ممکن است از لحاظ ساختمانی کاملاً شبیه یکدیگر بوده ولی از لحاظ دیگر بطور فاحشی متفاوت باشند. برای مثال بهم پیوستن (Interconnection) شبکه های الکتریکی وسیستم تلفنی رامیتوان با گراف مشخص کرد اما درحالیکه شاخه های مدل شبکهٔ الکتریکی با پارامترهائی مانند مقاومت، خود القاء و ظرفیت مشخص میشود و شاخه های مدل شبکهٔ تلفنی با پارامترهائی مانند تعداد سیمها در یک ترانک (Trunk)، یا حداکثر شدت انتقال و هزینهٔ واحد طول مشخص میشود. برای اینکه این پاراسترها را بصورت جزئی از مدل درنظر گیریم لازم است مفهومهای دیگری راهم درنظر گیریم.

با هر رأس وهرشاخهٔ یک گراف میتوان تعدادی پارامتر ارتباط داد. این پارامترها محدودیت های طبیعی و توانائی شاخه ها و رأسها را نشان میدهند. مثلاً میتوان مدل یک سیستم شبکهٔ برق را بوسیلهٔ یک گراف ساخت که در آن شاخه ها نمایش خطوط انتقال نیرو و رأسها نمایش مراکز تولید نیرو، ایستگاههای واسطه ویا مراکز مصرف باشند. مهمترین پارامترهای سیستم را بصورت سنگهای (Weights) رأسها و شاخه ها که میتواند ثابت یا تصادفی (Random) باشد به مدل ضمیمه میکنیم بنابراین در شبکه برق یک رأس معمولی که نمایش یک مرکز تولید است میتواند دارای این سنگها باشد: حداکثر قدرت خروجی، تعداد ژنراتورها دراین مرکز، قابلیت اطمینان (Reliability) هرژنراتور و هزینهٔ تولید یک کیلووات ساعت. یک شاخهٔ معمولی میتواند دارای سه مشخهٔ زیرباشد:

حداکثر ظرفیت انتقال قدرت، قابلیت اطمینان، و هزینهٔ برقراری و نگهداری این شاخه.

هدف از درنظر گرفتن سنگها برای رأسها و شاخه ها ضمیمه کردن اطلاعات غیر ساختمانی (Nonstructural) به مدل تئوری گراف سیستم مورد مطالعه میباشد. برای توضیح بیشتر این موضوع چند مثال میآوریم.

مثال ۱ : یک شبکهٔ شاهراه یا ترافیک (Traffic Network)

فرض کنید هررأس گراف نمایش یک شهرباشد. اگر شاهراهی بین دوشهر وجود داشته باشد دو رأس متناظر باشاخه‌ای بهم وصل میشوند. میتوان عددیکه نشان دهندهٔ طول شاهراه است باین شاخه متناظر کرد. همچنین میتوان سنگ دومی که نشان دهندهٔ حداکثر شمارهٔ اتومبیلهائی که میتوانند در واحد طول و واحد زمان از این شاهراه عبورکنند با این شاخه توأم نمود. سنگ سوم شاخه میتواند حداکثر سرعت مجاز باشد.

مثال ۲ : یک سیستم خط هوایی (An Airline system)

فرض کنند هرأس گراف نشان دهندهٔ یک ترمینال (Terminal) خط هوایی است. اگر خط هوایی

مستقیمی میان دوترمینال وجود داشته باشد ایندو رأس با یک شاخه بهمدیگر وصل میشوند. میتوان با هر رأس گراف سنگی متناظر ساخت که نمایش شمارهٔ هواپیماهائی باشد که آن ترمینال میتواند درفاصلهٔ زمانی معین آنها را کنترل کند. اگرقدرت کنترل ترافیک ترمینال ثابت فرض شود این سنگ رأس میتواند عددی ثابت باشد امااگر قدرت کنترل ترافیک ترمینال تغییر کنداین سنگ بازمان تغییر پذیر است و بگفته دیگرمتغیری است تصادفی. تصادفی بودن این متغیر ممکن است معلول عوامل پیش بینی ناپذیر مانند هوا که خوددرتعیین حداکثر ترافیک ممکن سهم بسزائی داردباشد.

مثال ۳ : یک سیستم تلگراف (A Telegraph system)

فرض کنید هررأس گراف نشان دهندهٔ یک مرکز تلگراف باشد اگر یک سیم بین دو مرکز تلگرافی وجودداشته باشد یعنی اگر ایندو مرکز بتوانند بطور مستقیم و بدون ایستگاه رله (Relay station) بایکدیگر ارتباط حاصل کنند گویند ایندو مرکز بیکدیگر متصل میباشنددراینصورت شاخه‌ای میان آندورأس وجود خواهدداشت. معمولا درهرمرکزشمارهٔ تلگرافچی ها (Operators) محدوداست پس حداکثر پیامهائی را که بتوان بطور همزمان فرستاد یا دریافت نمود نیزمحدود میباشد میتوان این واقعیت را در مدل ریاضی با سنگی متناسب با هررأس دخالت داد. با درنظرگرفتن شمارهٔ کل سیمهای بین هردو ایستگاه حداکثر تعداد پیامها بازهم محدودمیشودبنابراین سنگ هرشاخه حداکرشماره پیامهائی خواهد بود که بطور همزمان هرترانک قادر به ادارهٔ آنست. نکتهٔ موردتوجه دیگر تأخیر زمانی لازم برای فرستادن یک پیام خاص دراین شبکه است. در هرمرکز تلگراف یک تأخیر زمانی (Time Delay) ناشی از مدت انتظار برای آماده شدن تلگرافچی یا خط تلگراف و زمان لازم برای انتقال پیام موجود میباشد عموماً زمان تأخیر کل دریک ایستگاه معین متغیری است تصادفی که میتواند نمایش سنگی دیگر برای آن رأس باشد.

مثال ٤ ـ یک مدل اقتصادی (An Economic Model)

فرض کنید یک سیستم کارخانه ها و انبارهاوسراکز فروش داریم که با یکدسته شاهراهها ، راههای آهن ، و راههای آبی بیکدیگر متصل شده‌اند مدل این سیستم را میتوان از لحاظ ساختمانی با یک گراف بدست آورد که در آن روابط معین میان راسها و شاخه‌ها و میان رأسها و کارخانه‌ها و انبارها و مراکز فروش وجود دارد درمدل گراف کارخانه‌ها بعنوان رأسهای منبع (Source Vertex) و مراکز فروش بعنوان رأسهای مقصد (Termial Vertex) و انبارها بعنوان رأسهای میانی دخالت مییابند و بعلاوه میتوان میان رأسها وجه تمایز بیشتری قائل شد مثلاً بعضی رأسهای منبع میتوانند تنها یک نوع خاص کالا تولیدنمایند درصورتیکه رأسهای منبع دیگر کالائی از نوع دیگر تولید میکنند. درمیان سنگهای ممکن یک رأس میتوان شدت تولید کالای نوع i ام وزمان لازم برای تولید یک واحد ازکالای نوع i ام را نام‌برد. برای رأسهای میانی ممکن است تنها یک سنگ که نمایش فضای ذخیرهٔ موجود میباشد کفایت کند. رأسهای مقصد را میتوان باعددهای نمایش نوع کالاهائی که درآن رأس بفروش میرسد ، بهای هرنوع کالا ، مقدار ذخیرهٔ

محلی آن رأس ومیزان تقاضا (که معمولاً برای هر کالا متغیری است تصادفی) نشان‌داد ، سنگهای متناظر شاخه‌ها ممکن است چنین باشند : حداکثر شدت شار در واحد زمان ، هزینهٔ انتقال یک واحد ازکالای‌نوع i ام و زمان انتقال برای یک واحد ازکالای نوع i ام .

مثال ۵ ـ مرکزیک‌گراف (Center of a Graph)

فرض کنید میخواهیم‌در شهر G بیمارستانی بسازیم و میدانیم عامل بسیار مهم که درمیزان تلفات یک حادثه مؤثراست مدت زمان رسانیدن بیمار از محل حادثه به بیمارستان میباشد . هیئت مدیرهٔ بیمارستان این موضوع را موردتوجه‌قرار داده و میخواهند فاصلهٔ‌زمانی از بیمارستان‌تا محل حادثه و از آنجاتابیمارستان‌را برای هرناحیهٔ‌شهر G می‌نیمم باشد (ناحیه‌های شهر G را میتوان با رئوس یک‌گراف وخیابانهائی که این ناحیه‌ها را بهم ارتباط میدهند باشاخه‌های آن‌گراف نمایش داد) واضح است که برقرارکردن چنین معیاری میسر نیست مگر آنکه G تنهادارای یک رأس باشد . ازاین رو هیئت مدیرهٔ بیمارستان جوابی راکه‌نامساعد ترین حالت ممکن را می‌نیمم کند خواهد پذیرفت یعنی جوابیکه فاصلهٔ بیمارستان را تا دورترین‌نقطه‌می‌نیمم مایند چنین جوابی مرکزگراف G نامیده میشود .

اگر $d(V_i$ و $V_j)$نشان دهندهٔ فاصلهٔ رأس V_i از رأس V_j باشد دراینصورت مرکزگراف بصورت ریاضی زیر تعریف میشود :

$$\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}\ [\underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Max}}\ d(V_i , V_j)]$$

n تعداد رأسهای گراف میباشد .

از آنچه که دربالا گفتیم ظاهراً چنین برمیآید که همهٔ رأسها ازلحاظ زمان دارای اهمیت یکسان میباشند ولی در واقع ممکن است چنین نباشد مثلاً برخی رأسهای G ناحیه‌هائی باشند که درآنها متوسط حدوث تصادف از نواحی دیگر بطور محسوس بزرگتر یا عواقب‌حوادث حاصل شدیدتر باشد .

مسألهٔ بالا را میتوان بآسانی تعمیم داد تا حالت گفته شده فوق را در برگیرد . گیریم که :

$h(1)$ و $h(2)$ و ... و $h(n)$ عددهای ثابت نامنفی باشند که بترتیب به رأسهای V_1 و V_2 و ... V_n نسبت‌داده‌میشوندعدد $h(i)$ نمایش متوسط شمارهٔ‌ترافیکی‌است که از V_i آغاز میشوددراینصورت مرکزگراف طبق تعریف بصورت ریاضی زیرنشان داده میشود :

$$\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}\ [\underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Max}}[h(j)d\,(V_i , V_j)]\,]$$

توجه : عددهای $h(1)$ و $h(2)$ و ... و $h(n)$ که ثابت فرض شدند نمایش متوسط شمارهٔ تصادفهائی (ترافیکی) هستند که از این رأسها صادر میشوند ولی در حقیقت ترافیک‌صادره از یک رأس‌ثابت

نبوده بلکه متغیری است تصادفی که شاید تابع بخش (Distribution Function) آن معلوم باشد در نتیجه بهترین محلی که با توجه به مدل قطعی (Deterministic Model) بدست آمده با تحققهای (Realization) مختلف از این پیشامدهای تصادفی تغییر خواهد کرد و درچنین مواردی باید مسئله را از نظر احتمالی (Probabilistic) مطالعه کرد و مرکز گراف را براین اساس تعریف نمود.

مثال ٦ ـ میانهٔ یک گراف (Median of a Graph)

فرض کنید گراف G نمایش یک سیستم ارتباطی و شاخه های G نمایش کابلهائی باشند که ترمینالهای مختلف را بهم وصل میکنند. سنگ هرشاخه متناسب با طول یا هزینهٔ آن میباشد فرض کنید دراین سیستم ارتباطی همهٔ پیامها پیش از آنکه به مقصد اصلی فرستاده شوند در یک ایستگاه مرکزی V_m متمرکز شده و ازآنجا به مقصدها فرستاده میشوند در انتخاب این مرکز میخواهیم هزینهٔ تعبیهٔ سیم های ارتباطی که هرایستگاه را بمرکز اتصال میدهند می‌نیمم گردد. هررأس G را که طول کلی سیمها را دراین سیستم می‌نیمم کند میانه گراف نامیده شده و بصووت زیر بیان میشود :

$$\underset{1\leqslant m\leqslant n}{\text{Min}} \sum_{k=1}^{n} d\,(V_m\,,\,V_k)$$

از آنچه که گفته شد ظاهراً چنین برمیآید که همهٔ رأسها دارای اهمیت یکسان هستند ولی در واقع ممکن است چنین نبوده و مثلاً ترافیک یک رأس از ترافیک متوسط همهٔ رأسها بزرگتر باشد و بنابراین لازم میشود که سیمهائی بیشتر از رأسهای دیگر باین رأس وصل شود.

میتوان بآسانی این مسئله را تعمیم داد. گیریم $h(1)$ و $h(2)$ و ... و $h(n)$ عددهای ثابت نا منفی باشند که بترتیب برأسهای V_1 و V_2 و ... V_n نسبت داده شوند عدد $h(i)$ نمایش شمارهٔ متوسط ترافیکی است که از رأس V_i آغاز میشود یعنی شمارهٔ سیمهای میان رأس V_i و میانهٔ گراف. بیان ریاضی میانهٔ گراف در این حالت بصورت زیرمیباشد :

$$\underset{1\leqslant m\leqslant n}{\text{Min}} \sum_{k=1}^{n} h(k)\, d(V_m \text{ و } V_k)$$

احتمالی بودن سنگهای $h(k)$ نیز مورد توجه است و مسأله از جنبهٔ احتمالی نیز بایدمطالعه‌شود.

۳ ـ مسائل معمولی (Typical Problems)

کاربرد گرافها بعنوان مدلها به ماهیت مسئله فیزیکی مورد بحث بستگی دارد ، نوع مسئله‌ای که گرافها برای مطالعه آن مسلماً بسیار مفید هستند مسأله همبندی (Connectivity) است وقتی یک سیستم معین و گراف متناظر آن در دست است ممکن است بخواهیم بدانیم آیا میتوان کالای خاصی را از نقطهٔ به نقطه دیگر

انتقال داد یانه . بگفته دیگر میخواهیم میان دو رأس یک مسیر (Path) برای فرستادن کالا تعیین کنیم . مسألهٔ کلی‌تر ولی مشابه آنست که‌ببنیم آیا میتوان کالای‌معینی را از هرنقطه بهرنقطهٔ دیگر فرستاد . دراینجا باید تعیین کرد که‌آیا حداقل یک مسیر از هررأس برأس دیگر وجود داردیانه .

مسائل همبندی که بآنها اشاره کردیم مسائل ساختمانی (Structural Problems) میباشند وجود مسیری میان دو رأس مبین آنست که میتوان مقداری شار را از یکی از این دو رأس بدیگری انتقال داد ، البته فعلاً هیچگونه آگاهی دربارهٔ کمیت شار انتقالی در دست نیست. برای دخالت دادن اینگونه آگاهیها باید گرافهای سنگین (Weighted Graphs) در نظر گرفت. فرض کنید که سنگ هررأس یا شاخه نمایش حداکثر مقدار شاری باشد که آن رأس یا شاخه میتواند تحمل کند. این سنگها نمایش گنجایش کانالها ، منابع ، ترمینالها ، یا نقاط رله‌در سیستم اصلی میباشند. حال سؤال زیر را مطرح میکنیم : حداکثر مقدار شاری که بتوان میان‌یک جفت رأس خاص فرستاد چیست . دریک سیستم تولیدنیرو این عدد ممکن است نشان دهندهٔ حداکثر قدرتی باشد که یک مرکز تولیدی معین بتواند بمصرف کنندهٔ خاصی برساند ، دریک‌سیستم تلگراف‌این عددمیتواند حداکثر میزان انتقال اطلاعات میان دو مرکزتلگرافی باشد . مسألهٔ تعیین‌حداکثر مقدار یک کمیت که میتوان میان دو نقطه انتقال داد مسألهٔ شار حداکثر گویند (Maximum Flow Problem) تعمیم این مسئله تعیین حداکثر مقدار چند نوع کالا است که میتوان بطور همزمان میان چندجفت رأس فرستاد . این مسألهٔ‌بنام‌شار حداکثر چندکالائی معروف‌است (Multicommodity Maximum Flow Problem) . هریک ازمسائل بالا مسأله‌ای است تحلیلی (Analysis) ، یعنی هنگامیکه یک سیستم و مدل تئوری گراف آن در دست است میتوان به تحلیل این گراف پرداخته و حداکثر میزان‌شارها را بدست آورد . همچنین میتوان یک مسالهٔ ترکیبی (synthesis) مشابه نیز طرح نمود . فرض کنید که چند ایستگاه داشته و شدت شار حداکثر مورد نیاز نیز معلوم است (Maximum Flow requirements) و میخواهیم سیستمی طرح کنیم که این احتیاجات را بطور کامل تأمین نماید و بعلاوه چون ممکن‌است‌بیش از یک سیستم وجود داشته باشد میخواهیم سیستمی انتخاب‌شود که از پاره‌ای‌لحاظ آپتیمال باشد (Optimal in Some Sense) ممکن است یک‌معیار آپتیمال بودن‌حداقل هزینه باشد برای مثال میتوان فرض کرد که عمل شبکه‌ای که طرح میشود بدقت پیش‌بینی پذیر است در - اینصورت نیازمندی شدت شار را میتوان بدرستی برقرار کرد . درحالتهای دیگر ممکن است عناصر تصادفی‌در طرح یا رفتارسیستم موجود باشند و بنابراین جملهٔ « برقرارکردن شدت شار مورد نیاز » بصورت احتمالی تعبیرشود .

معمولاً میتوان کالای معینی‌را از مسیرهای مختلف فرستاد و ممکن است یک مسیر از مسیرهای دیگربهترباشد. اگر مسیری نا مناسب اختیار شود شاید آن شار اضافی را که ممکن بود از راه دیگردرسیستم برقرار نمود مانع شود. بنابراین در بین مسائلی که میتوان درنظر گرفت مسئلهٔ تعیین کوتاهترین یا کم خرج ترین مسیر و یا تعیین مطمئن‌ترین مسیر برای یک کالای معین درشبکهٔ داده شده را نام برد .

مسائل همبندی وشار حداکثر به دسته‌ای از مسائل که میتوان آنها را مسائل آسیب پذیری (Vulnerability) وقابلیت اطمینان (Reliability) نامید ارتباط‌داد. دراینجا ما سیستمی داریم که در محیط ناسازگاری کار میکند این ناسازگاری ممکن است معلول آشفتگی‌های طبیعی ، نقص لوازم ، یا مثلاً حملهٔ دشمن باشد. تأثیر ناسازگاری بهم خوردن ارتباط موجود است. وقتی یک سیستم در دست است باید برای تعیین میزان ویرانی (degradation) که ممکن است پیش بیاید آنرا تحلیل کنیم وهنگامیکه مجموعه‌ای از معیارهای رفتار داریم (Performance Criteria) باید سیستمی طرح کنیم که ویرانی احتمالی آن می‌نیمم باشد. میتوان دوباره صورتهای تحلیلی و ترکیبی این مسئله را بفرم عبارتهای قطعی و عبارتهای احتمالی سطرح کرد.

در بیشتر سیستمهای فیزیکی تراقیک شبکه تابعی از زمان است. ممکن است همهٔ مسیرهای موجود میان یک جفت ایستگاه اشغال‌شده باشد و بنابراین فرستادن شار اضافی میان این ایستگاهها مسیر نخواهد بود. پس لازم است یکی از مشترکان دریکی از ایستگاهها منتظر بماند تا یک کانالی آماده شود. امید ریاضی (Expected Value) زمان انتظار این مشترک یکی از پارامتری‌های مهم سیستم میباشد. مسألهٔ تحلیل شامل تعیین زمان متوسط انتظار و بررسی تأثیر ساختمانی شبکه و انواع روشهای تعیین مسیر در این زمان انتظار می‌باشد.

چنین بنظر میرسد مثالهائی که دربالا گفته شد برای نشان دادن وسعت میدان کاربرد گرافها وماهیت بعضی مساله های فیزیکی که میتوان مطرح کرد کافی باشند.

منابع

۱ - H. Frank I. V. Frisch Communication ' Transmission and Transportation Networks 1971 Adison Wesley

2 - C. Berge , The Theory of Graphs and Its Application

3 - L. R. Ford and D. R. Fulkerson, Flows in Networks 1963