

## طراحی طرح کنترل ترکیبی با استفاده از دو نمودار کنترل EWMA

امیر آذرشب<sup>1\*</sup>، حسن جوانشیر<sup>2</sup> و سعداله ابراهیم نژاد<sup>3</sup>

<sup>1</sup> کارشناس ارشد دانشگاه آزاد اسلامی - واحد نجف آباد - دانشکده تحصیلات تکمیلی - گروه مهندسی صنایع

<sup>2</sup> استادیار دانشگاه آزاد اسلامی - واحد تهران جنوب - دانشکده فنی و مهندسی - گروه مهندسی صنایع

<sup>3</sup> استادیار دانشگاه آزاد اسلامی - واحد کرج - دانشکده فنی و مهندسی - گروه مهندسی صنایع

(تاریخ دریافت 87/6/10، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده 89/7/21، تاریخ تصویب 90/1/30)

### چکیده

نمودار کنترل شوهارت یکی از انواع رایج نمودارهای کنترل است. با این حال، نمودار کنترل شوهارت، دارای این عیب اساسی است که تنها آخرین اطلاعات به دست آمده از فرایند را مورد توجه قرار می‌دهد، بنابراین این نمودار نسبت به کشف تغییرات کوچک، غیر حساس است. نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی و جمع تجمعی نمودارهایی هستند که با توجه به در نظر گرفتن اطلاعات گذشته فرایند می‌توانند برای کشف تغییرات کوچک مورد استفاده قرار گیرند. از این رو، استفاده از یک طرح کنترل ترکیبی که قادر به کشف همزمان تغییرات کوچک و بزرگ باشد، ضرورتی انکار ناپذیر دارد. برای این منظور از طرح‌های کنترل ترکیبی استفاده می‌شود، در این تحقیق، هدف طراحی یک طرح کنترل ترکیبی، با به کارگیری همزمان دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی برای کشف همزمان تغییرات کوچک و بزرگ است. معیار بهینه سازی در این طرح متوسط طول اجراست. بر این اساس طراحی این طرح به یک مدل بهینه سازی چند هدفه تبدیل می‌گردد که با حل آن پارامترهای طرح به دست می‌آید. برای محاسبه متوسط طول اجرا از رویکرد زنجیره‌های مارکوف استفاده شده و با استفاده از یک مثال عددی کارایی طرح پیشنهادی نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، متوسط طول اجرا، رویکرد زنجیره‌های مارکوف،

بهینه سازی چند هدفه، نمودار کنترل ترکیبی

### مقدمه

[2] و رابرتس در سال 1959 نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی<sup>3</sup> (Exponentially Weighted Moving Average) [3] را معرفی کردند که این دو نمودار در کشف تغییرات کوچک موثر می‌باشند. در این تحقیق هدف ارائه طرحی است که تغییرات کوچک و بزرگ را به صورت همزمان کشف کند.

### مروری بر ادبیات موضوع

#### نمودارهای کنترل

نمودار کنترل شوهارت که در سال 1931 بوسیله والتر شوهارت ارائه گردید [1]، تنها آخرین اطلاعات مربوط به فرایند را برای تصمیم‌گیری در خصوص فرایند مد نظر قرار می‌دهد و از اطلاعات موجود در آخرین نقطه رسم شده استفاده می‌کند به عبارت دیگر اطلاعاتی که نقاط مشترکاً با هم می‌توانند منعکس کنند نادیده گرفته می‌شود. همین مساله این نمودار را نسبت به کشف تغییرات کوچکتر از  $2\sigma$  ناتوان نموده است.

نمودارهای کنترل از مهم‌ترین ابزارهای کنترل کیفیت آماری هستند که هدف از به کارگیری آنها رسیدن به سطح مطلوب اطمینان، سهولت در قضاوت و توسعه مطالعات کیفی است. نمودارهای کنترل در ابتدا به وسیله والتر شوهارت معرفی گردیدند [1]. وی استفاده از نمودارهای کنترل را در سه مورد زیر مفید می‌داند.

- تعیین حدود یا پارامترهای رسیدن به هدف
- ابزارهای مفید برای رسیدن به هدف
- روشی برای ارزیابی فرآیند

بنابراین، نمودارهای کنترل ابزارهایی هستند که در زمینه‌های مشخصات، تولید و بازرسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و زمانی که نمودارهای کنترل به کار گرفته می‌شوند، این سه مرحله از زنجیره تولید را برای تحلیل فرآیند، فراهم می‌آورند.

نمودارهای کنترل که به وسیله والتر شوهارت معرفی گردید در کشف تغییرات بزرگ موثر هستند و به نمودارهای کنترل شوهارت<sup>1</sup> معروفند. سپس پیچ در سال 1954 نمودار کنترل جمع تجمعی<sup>2</sup> (Cumulative Sum)

2- در پیش بینی سری های زمانی [11، 10].  
 اخیراً این آماره به طور گسترده ای برای اهداف تنظیم و کنترل فرایند مهندسی<sup>4</sup> مورد استفاده قرار می گیرد [17، 16، 15، 14، 13، 12].

لوکاس و ساکوچی در سال 1990 خصوصیات نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی را بیان نمودند و آنرا با نمودار کنترل جمع تجمعی مقایسه کردند. نتایج تحقیقات آنها نشان داد که خصوصیات نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، بسیار به خصوصیات نمودار کنترل جمع تجمعی نزدیک است. آنها نشان دادند که، نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، متوسط طول اجرای کمتری نسبت به نمودار کنترل جمع تجمعی نشان می دهد [18].

### طرح های کنترل ترکیبی

طرح های کنترل ترکیبی از محاسبات موازی برای هر کدام از اجزاء تشکیل می گردد و زمانی یک حالت خارج از کنترل اعلام می گردد که هر یک از اجزاء طرح ترکیبی، به نشانه ای مبنی بر حالت خارج از کنترل برسند.

طرح های ترکیبی متشکل از نمودارهای کنترل شوهارت و جمع تجمعی را می توان از اولین موارد طرح های کنترل دانست. وستگارد و همکاران در سال 1977 برای اولین بار طرح کنترل ترکیبی شوهارت - جمع تجمعی را بر اساس شبیه سازی ارائه نمودند [19]. آنها احتمال یک سیگنال خارج از کنترل را برای یک سری با  $N$  نمونه ( $1 \leq N \leq 30$ ) شبیه سازی کردند.

لوکاس در سال 1982 طرح کنترل ترکیبی شوهارت - جمع تجمعی را بر پایه متوسط طول اجرا ارائه نمود [20]. او برای این منظور از رویکرد زنجیره های مارکوف استفاده کرد. لوکاس نشان داد که طرح کنترل ترکیبی شوهارت - جمع تجمعی، تغییرات بزرگ را بهتر از نمودار کنترل جمع تجمعی استاندارد کشف می کند و حدوداً عملکردی به خوبی رویکرد جمع تجمعی سهمی وار<sup>5</sup> دارد. رویکرد جمع تجمعی سهمی وار در سال 1973 توسط لوکاس ارائه شد [21]. این طرح همچنین تغییرات کوچک را بهتر از نمودار کنترل شوهارت استاندارد کشف می کند. لوکاس نشان داد که می توان از ویژگی واکنش اولیه سریع<sup>6</sup> در این طرح کنترل ترکیبی استفاده کرد. ویژگی واکنش اولیه سریع یا آغاز سریع<sup>7</sup> در سال 1982 توسط

اگر پی بردن به وجود تغییرات کوچک مورد نظر باشد نمودار کنترل جمع تجمعی و میانگین متحرک موزون نمایی می توانند جایگزین خوبی برای نمودار کنترل شوهارت باشند. نمودار کنترل جمع تجمعی برای اولین بار در سال 1954 در انگلستان توسط پیچ ارائه گردید [2] و پس از آن توسط مؤلفان و محققان زیادی تحت مطالعه و بررسی قرار گرفت. این نمودار میانگین بدون وزنی از داده های گذشته را بکار می برد و دارای یک حافظه بلند مدت است. عملکرد نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی حدوداً با عملکرد نمودار کنترل جمع تجمعی یکسان است و از بعضی جهات نیز تهیه و استفاده از آن ساده می باشد. این نمودار در ابتدا بوسیله رابرتس در سال 1959 معرفی گردید [3] و پس از آن تعداد بسیاری از محققان در مورد این نوع از نمودار به تحقیق و مطالعه پرداختند.

### نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی

آماره میانگین متحرک موزون نمایی در سال 1959 به وسیله رابرتس به صورت زیر تعریف شده است [3]:

$$Z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \quad (1)$$

در این رابطه  $\lambda$  دارای مقدار ثابتی بین  $0 < \lambda \leq 1$  است. مقدار اولیه برای  $Z_t$  که در زمان نمونه اول از آن استفاده می شود برابر است با:  $Z_0 = \mu_0$

از رابطه فوق مشخص است که چرا میانگین متحرک موزون نمایی را به عنوان میانگین متحرک موزون نمایی نامگذاری می کنند که این مساله به خاطر کاهش وزن ها در قالب یک سری هندسی است.

اگر  $1 \rightarrow \lambda$ ، آنگاه آماره میانگین متحرک موزون نمایی تمام وزن را به مشاهدات آخر اختصاص می دهد در این حالت نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی همانند یک نمودار کنترل شوهارت عمل می کند. در صورتیکه  $0 \rightarrow \lambda$ ، آنگاه مشاهدات اخیر وزن کمی دریافت می کنند، درحالیکه وزن مشاهدات قبلی تنها با گذشت عمر آنها کاهش می یابد در این حالت نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی نظیر یک نمودار کنترل جمع تجمعی عمل می کند.

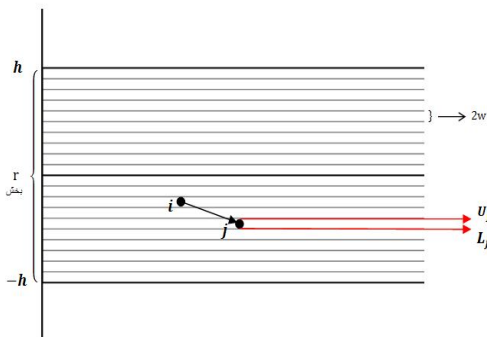
از آماره EWMA به دو منظور استفاده می شود [4]:

1- در جداول کنترل [5، 6، 7، 8، 9].

مبتنی بر معادلات انتگرالی مرتبه دوم فردهولم به دست آورد و نتایج را در قالب جداولی برای مقادیر مختلف  $L$  و  $\lambda$  ارائه نمود [24].

لوکاس و ساکوچی در سال 1990 مقادیر متوسط طول اجرا را برای نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، با استفاده از رویکرد زنجیره های مارکوف<sup>13</sup> و با فرض نرمال بودن توزیع آن به دست آوردند [18] و نتایجی مشابه رابرتس و کرودر به دست آوردند. روش استفاده از زنجیره های مارکوف که لوکاس و ساکوچی از آن استفاده کردند مشابه روش بروک و ایوانز بود که در سال 1972 برای به دست آوردن مقادیر متوسط طول اجرای نمودار کنترل جمع تجمعی به کار بردند [25]، این روش ساده تر و کاملتر از روشهای قبلی می باشد. آنها برای این منظور به صورت زیر عمل کردند:

### رویکرد زنجیره های مارکوف



شکل 1: نمایی از نحوه محاسبه ARL نمودار های کنترل با استفاده از رویکرد زنجیره های مارکوف.

$$Z_{1t} = \lambda_1 \bar{x}_t + (1 - \lambda_1) Z_{1(t-1)} \quad (2)$$

در این روش همانطور که در شکل 1 نشان داده شده است ناحیه بین حدود کنترل بالا و پایین به  $r$  قسمت فرضی تقسیم می شود ( $r = 2m + 1$ ) که عرض هر قسمت  $2w$  فرض می شود.

$$\frac{h - (-h)}{2r} = \frac{h}{r} w = \quad (3)$$

آماره  $Z_t$  (در زمان  $t$  در موقعیت موقت زاست اگر:

$$c_j - w < Z_t < c_j + w \quad (4)$$

$$j = -m, -m+1, \dots, +m$$

که در آن  $c_j$  مرکز نقطه ای از بازه فرضی زام است و خط بالا و پائین آن عبارتست از:

$$L_j = c_j - w \quad (5)$$

لوکاس و کروزر ارائه شد [22]. ویژگی واکنش اولیه سریع به طرز محسوسی حساسیت طرح را بهبود می دهد. علاوه بر طرح کنترل شوهارت - جمع تجمعی، می توان از ترکیب نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با نمودار کنترل شوهارت به طرح های ترکیبی دیگری نیز دست یافت. این طرح ترکیبی به وسیله لوکاس و ساکوچی در سال 1990 ارائه شد [18]. آنها طرح کنترل ترکیبی شوهارت - میانگین متحرک موزون نمایی را بر پایه متوسط طول اجرا ارائه کردند، و برای محاسبه متوسط طول اجرا از رویکرد زنجیره های مارکوف استفاده کردند. آنها نشان دادند که این طرح ترکیبی تغییرات کوچک و بزرگ را به طور همزمان کشف می کند.

### متوسط طول اجرا<sup>8</sup> (Average Run Length)

به منظور مقایسه یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با یک طرح دیگر، یا به منظور طراحی یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی، نیازمند به داشتن اطلاعات مربوط به توزیع طول اجرا<sup>9</sup> مربوط به آن هستیم.

رابرتس در سال 1959 متوسط طول اجرا را که جزئی از خواص آزمایشهای نمودارهای کنترل مبتنی بر مقادیر متوسط به دست آمده از مقادیر متوسط متحرک معمولی<sup>10</sup> و آزمایشهای نمودارهای کنترل استاندارد بود با فرض یک فرآیند نرمال و طبیعی مورد مقایسه قرار داد. او نتایج حاصله را با منحنی های متوسط طول اجرا<sup>11</sup> مبتنی بر نتایج شبیه سازی ارائه نمود و با مقایسه آن با نمودار کنترل شوهارت به این نتیجه رسید که نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی بهبودی در نمودارهای کنترل استاندارد  $\bar{x}$  شوهارت در تشخیص تغییرات نسبتاً بزرگ در مقدار متوسط فرآیند ایجاد نمی کند، اما برای تغییرات نسبتاً کوچک، نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی از حساسیت بسیار بالاتری نسبت به نمودار کنترل  $\bar{x}$  شوهارت برخوردار است [3].

رابینسون و هو در سال 1978 یک روش عددی<sup>12</sup> برای تقریب زدن متوسط طول اجرا متعلق به یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی ارائه نمودند [23].

کرودر در سال 1987 مقادیر متوسط طول اجرا را برای نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی یک طرفه و دو طرفه، با استفاده از یک روش عددی

برای به کارگیری همزمان دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی نیاز به تعیین پارامترهای طرح داریم و به منظور اینکه طرح عملکرد بهتری داشته باشد نیاز به به دست آوردن پارامترهای بهینه طرح داریم، بنابراین طرح به یک مدل بهینه سازی تبدیل می گردد.

### توابع هدف و محدودیت ها

توابع هدف: توابع هدف این طرح شامل توابع هدفی است که متوسط طول اجرای طرح ترکیبی را در حالت خارج از کنترل به ازای تغییرات مختلف در میانگین فرایند حداقل کند، که در نتیجه باعث حداقل شدن خطای نوع دوم طرح می شود، و طرح به یک مدل بهینه سازی چند هدفه تبدیل می گردد که برای حل آن از روش های L-P متریک و توابع سازگار استفاده شده است و شرح آن در پیوست آمده است.

محدودیت اول: برای رسیدن به حد مورد نظر خطای نوع اول به طور معمول متوسط طول اجرای طرح ترکیبی را روی یک مقدار معین فیکس می کنند. که این مقدار توسط تصمیم گیرنده<sup>14</sup> (Decision Maker) تعیین می شود.

محدودیت های دوم و سوم: برای رسیدن به متوسط طول اجرای مورد نظر برای طرح ترکیبی و همچنین برای عملکرد مناسب هر نمودار و توازن بین آنها نیاز داریم تا خطای نوع اول هر یک از نمودارها بیشتر از یک مقدار تعیین شده نباشد و هر یک از نمودارها دارای حداقل مقدار متوسط طول اجرای قابل قبول در حالت تحت کنترل باشند، که این مقدار حداقل توسط DM تعیین می شود.

محدودیت های چهارم و پنجم: محدودیت های چهارم و پنجم مربوط به ضرایب هموارسازی دو نمودار ( $\lambda_1$  و  $\lambda_2$ ) می شود و همانطور که قبلاً ذکر شد مقداری بین صفر و یک دارند.

### مدل ریاضی

$$\text{Min } Z_m = \text{ARL}_{\delta_m, \text{overall}} \quad (15) \quad , m = 1, \dots, k$$

Subject to:

$$\text{ARL}_{\text{overall}} = \text{ARL}_{\text{target}}$$

$$\text{ARL}_{o_1} \geq \text{ARL}_{\text{min}}$$

$$\text{ARL}_{o_2} \geq \text{ARL}_{\text{min}} \quad (16)$$

$$0 < \lambda_1 \leq 1$$

$$U_j = c_j + w \quad (6)$$

$$c_j = -h + (2j - 1)w \quad (7)$$

بردار احتمال اولیه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Pi = P^T_{\text{int}} = (P_{-m}, \dots, P_{-1}, P_0, P_1, \dots, P_m | 0) \\ = (P^T | 0) \quad (8)$$

که در آن  $P_j$  بیانگر احتمال آن است که  $Z$  در وضعیت  $j$  باشد.

حالت خارج از کنترل  $a =$

لازم به ذکر است که  $P_a$  برابر با صفر است زیرا آماره کنترل در آغاز تحت کنترل فرض شده است.

$$P = \begin{pmatrix} Q & (I - Q)J \\ 0^T & J \end{pmatrix} \quad (9)$$

که در آن  $Q$  زیر ماتریس شامل احتمالات رفتن از یک وضعیت به وضعیت دیگر (در حالت تحت کنترل) است،  $I$  ماتریس یکه است و  $J$  یک بردار ستونی با درایه های 1 است.

$P_{ij}$  بیانگر احتمال این است که آماره کنترل از وضعیت  $i$  بلافاصله به وضعیت  $j$  برود و به صورت زیر محاسبه میشود:

$$P_{ij} = P \{ L_j \leq Z_t \leq U_j \} \\ = P \{ L_j \leq \lambda \bar{x}_t + (1 - \lambda)Z_{t-1} \leq U_j \} \\ = P \left\{ \frac{c_j - w - (1 - \lambda)c_i}{\lambda} \leq \bar{x}_t \leq \frac{c_j + w - (1 - \lambda)c_i}{\lambda} \right\} \quad (10)$$

$$\bar{x}_t \sim N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

$$P_{ij} = \Phi \left( \frac{c_j + w - (1 - \lambda)c_i}{\lambda} \right) \\ - \Phi \left( \frac{c_j - w - (1 - \lambda)c_i}{\lambda} \right) \quad (11)$$

$$Q_{r \times r} = [P_{ij}] \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi J = 1 \\ \Pi (I - Q') = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

$$\text{احتمال قرار گرفتن } x_t \text{ در یکی از حدود } \Pi \\ \text{ARL} = \Pi \left( (I - Q)^{-1} J \right) \quad (14)$$

مدلسازی طرح EWMA-EWMA:

مهمترین معیار کارایی نمودارهای کنترل و همچنین مهمترین معیار برای مقایسه آنها با یکدیگر متوسط طول اجرا (ARL) می باشد.

متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل عبارت از تعداد نمونه های گرفته شده از فرایند تا مشاهده اولین حالت خارج از کنترل است. به همین دلیل مقادیر بزرگ ARL برای حالت تحت کنترل مطلوب می باشد، و بالعکس برای حالت خارج از کنترل مقادیر کوچک ARL مطلوب است تا حالت های خارج از کنترل به سرعت کشف و اعلام گردد.

در حالت کلی متوسط طول اجرا به این صورت محاسبه می گردد:

$$ARL = \frac{1}{p(\text{رسم یک نقطه خارج از کنترل})} \quad (17)$$

در صورتیکه فرایند تحت کنترل باشد داریم:

$$ARL = \frac{1}{\alpha} \quad (18)$$

و اگر فرآیند خارج از کنترل باشد آنگاه:

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} \quad (19)$$

$\alpha$ : خطای نوع اول

$\beta$ : خطای نوع دوم

خطای نوع اول ( $\alpha$ ): خطای نوع اول عبارتست از: احتمال رسم اشتباهی یک نقطه خارج از حدود کنترل (زنگ خطر اشتباه) یا به عبارت دیگر خطای نوع اول ریسک رسم یک نقطه در پشت حدود کنترل می باشد، در حالیکه هیچگونه انحراف با دلیلی وجود ندارد.

خطای نوع دوم ( $\beta$ ): خطای نوع دوم عبارتست از: احتمال پی نبردن به وجود یک تغییر در میانگین یا به عبارت دیگر خطای نوع دوم ریسک رسم یک نقطه بین حدود کنترل می باشد زمانیکه فرآیند در حالت خارج از کنترل به سر می برد.

همانطور که ذکر شد برای محاسبه متوسط طول اجرای نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی روشهای مختلفی وجود دارد که در این تحقیق از ساده ترین و بهترین روش یعنی رویکرد زنجیره های مارکوف استفاده شده است.

$$0 < \lambda_2 \leq 1$$

$$ARL_{\delta_m, \text{overall}}, ARL_{o_{\text{overall}}}, ARL_{o_1}, ARL_{o_2} \geq 0$$

ARL: متوسط طول اجرا.

$ARL_o$ : متوسط طول اجرا در حالت تحت کنترل است.

$ARL_{\delta_m, \text{overall}}$ : متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت خارج از کنترل به ازای تغییر  $\delta_m$  در میانگین فرایند.

$ARL_{o_{\text{overall}}}$ : متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل.

$ARL_{o_1}$ : متوسط طول اجرای نمودار اول در حالت تحت کنترل.

$ARL_{o_2}$ : متوسط طول اجرای نمودار دوم در حالت تحت کنترل.

$ARL_{t_{\text{arget}}}$ : متوسط طول اجرای مورد نظر برای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل.

$ARL_{\text{min}}$ : حداقل متوسط طول اجرای مورد نظر در حالت تحت کنترل برای هر نمودار.

k: تعداد شیفت مورد نظر.

$\delta$ : فاصله شیفت های مورد نظر.

$\delta_m$ : مجموعه شیفت های مورد نظر که اعضای آن ضرابی از  $\delta$  هستند.

$\lambda_1$ : ضریب هموار سازی نمودار کنترل اول (متغیر تصمیم اول).

$\lambda_2$ : ضریب هموار سازی نمودار کنترل دوم (متغیر تصمیم دوم).

$L_1$ : ضریب حدود انحراف معیار نمودار کنترل اول (متغیر تصمیم سوم).

$L_2$ : ضریب حدود انحراف معیار نمودار کنترل دوم (متغیر تصمیم چهارم).

روش محاسبه

$$\frac{L_k - (1 - \lambda_1)c_i}{\lambda_1} = A_1 \quad (23)$$

$$\frac{U_k - (1 - \lambda_1)c_i}{\lambda_1} = A_2 \quad (24)$$

$$\frac{L_l - (1 - \lambda_2)c_j}{\lambda_2} = A_3 \quad (25)$$

$$\frac{U_l - (1 - \lambda_2)c_j}{\lambda_2} = A_4 \quad (26)$$

آنگاه:

$$P_{(ij),(kl)} = P \left\{ A_1 \leq \bar{x}_t \leq A_2 \right\} \cap \left\{ A_3 \leq \bar{x}_t \leq A_4 \right\} \quad (27)$$

$$= P \left\{ \left( \min \{ A_4, \max(A_1, A_3) \} \leq \bar{x}_t \leq \max \{ A_3, \min(A_2, A_4) \} \right) \right\} \quad (28)$$

$$\bar{x}_t \sim N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

$$Q_{r^2 \times r^2} = [P_{(ij),(kl)}] \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod J = 1 \\ \prod (I - Q') = 0 \end{array} \right\}$$

$$ARL = \prod_{ij} (1 - Q)^{-1} J \quad (30)$$

$\Pi_{ij}$ : احتمال قرار گرفتن  $\bar{x}_t$  در وضعیت  $i$  از نمودار اول و  $j$  از نمودار دوم است، به عبارت دیگر احتمال قرار گرفتن  $\bar{x}_t$  در هر یک از مربع های فرضی در شکل (2) است.

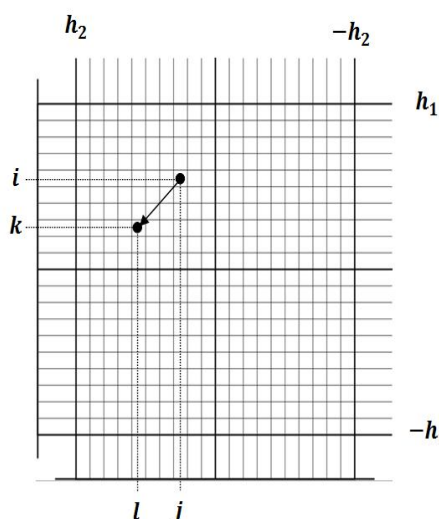
در حالت تحت کنترل و خارج از کنترل  $\bar{x}_t$  به ترتیب دارای توزیع نرمال به ترتیب با میانگین های صفر و  $\delta_m$  است. در این صورت مولفه های  $P_{(ij),(kl)}$  از ماتریس  $Q$  بیانگر به ترتیب ARL تحت کنترل و خارج از کنترل است.

### مثال عددی

پس از محاسبه مدل به روش زنجیره های مارکوف، حل آن با استفاده از نرم افزار MATLAB 7.4 و بهینه سازی به وسیله ابزار بهینه سازی Pattern Search مقادیر  $L_1 = 2.7825$ ،  $\lambda_2 = 0.685$ ،  $\lambda_1 = 0.225$  و  $L_2 = 3.0163$  برای طرح ترکیبی به دست آمد. (برای  $ARL_{\min} = 200$  و  $ARL_{\text{target}} = 200$   $\alpha = 0.005$ )

جداول ۲، ۱ و ۳ مقایسه مقادیر متوسط طول اجرای (ARL) طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA را با

### تعمیم رویکرد زنجیره های مارکوف



شکل 2: نمایی از نحوه محاسبه ARL نمودار کنترل ترکیبی با استفاده از رویکرد زنجیره های مارکوف دو بعدی.

$$Z_{1t} = \lambda_1 \bar{x}_t + (1 - \lambda_1) Z_{1(t-1)} \quad (20)$$

$$Z_{2t} = \lambda_2 \bar{x}_t + (1 - \lambda_2) Z_{2(t-1)}$$

برای محاسبه متوسط طول اجرای طرح ترکیبی نیاز به تعمیم رویکرد زنجیره های مارکوف از حالت تک بعدی به حالت دو بعدی داریم، در این روش همانطور که در شکل 2 مشاهده می شود فرض بر این است که دو نمودار کنترل روی هم قرار گیرند. بنابراین  $P_{(ij),(kl)}$  احتمال این است که آماره کنترل از وضعیت  $i$  در نمودار اول و  $j$  در نمودار دوم بلافاصله به وضعیت  $k$  در نمودار اول و  $l$  در نمودار دوم برود و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P_{(ij),(kl)} = P \left\{ (L_k \leq Z_{1t} \leq U_k) \cap (L_l \leq Z_{2t} \leq U_l) \right\} \quad (21)$$

$$= P \left\{ \left( L_k \leq \lambda_1 \bar{x}_t + (1 - \lambda_1)c_i \leq U_k \right) \cap \left( L_l \leq \lambda_2 \bar{x}_t + (1 - \lambda_2)c_j \leq U_l \right) \right\}$$

$$= P \left\{ \left( \frac{L_k - (1 - \lambda_1)c_i}{\lambda_1} \leq \bar{x}_t \leq \frac{U_k - (1 - \lambda_1)c_i}{\lambda_1} \right) \cap \left( \frac{L_l - (1 - \lambda_2)c_j}{\lambda_2} \leq \bar{x}_t \leq \frac{U_l - (1 - \lambda_2)c_j}{\lambda_2} \right) \right\} \quad (22)$$

اگر:

کنترل را نشان می دهد که برای این مثال 200 در نظر گرفته شده و طرح ارائه شده با طرح های مشابه که متوسط طول اجرای آنها در حالت تحت کنترل حدود 200 است مقایسه شده است.

نمودارهای تکی EWMA ، شوهارت و طرح کنترل ترکیبی Shewhart-CUSUM نشان می دهد. در این جداول مقایسه متوسط طول اجرا به ازای تغییرات مختلف در میانگین فرایند (از  $0.25\sigma$  تا  $4\sigma$ ) برای هر یک از نمودارها نشان داده شده است، Shift=0 حالت تحت

جدول 1: مقایسه متوسط طول اجرای طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA و نمودارهای کنترل تکی EWMA.

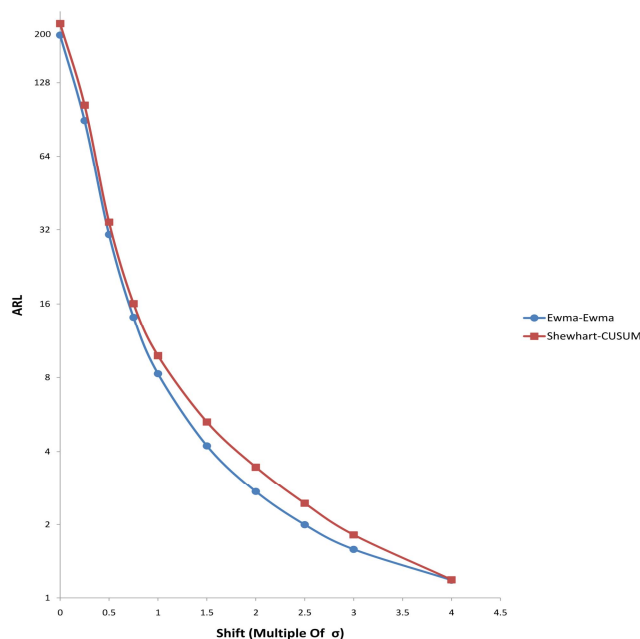
Shift	Ewma-Ewma	
	$\lambda_1 = 0.225, L_1 = 2.7825$	Shewhart $L = 2.8095$
	$\lambda_2 = 0.685, L_2 = 3.0163$	
0	200	200
0.25	89.5980*	157.8623
0.5	30.6070*	91.9084
0.75	14.1120*	50.6119
1	8.2855*	28.7560
1.25	5.6542*	17.2211
1.5	4.2227*	10.9220
1.75	3.3363*	7.3385
2	2.7382*	5.2129
2.25	2.3123*	3.8967
2.5	1.9985*	3.0433
2.75	1.7626*	2.4609
3	1.5825*	2.0419
3.25	1.4433*	1.7270
3.5	1.3347*	1.4868
3.75	1.2494*	1.3080
4	1.1824*	1.1827

جدول 2: مقایسه متوسط طول اجرای طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA و نمودار کنترل شوهارت استاندارد.

Shift	Ewma-Ewma	Ewma(1)	Ewma(2)
	$\lambda_1 = 0.225, L_1 = 2.7825$ $\lambda_2 = 0.685, L_2 = 3.0163$	$\lambda = 0.01$ $L = 1.5631$	$\lambda = 0.5$ $L = 2.7803$
0	200	200	200
0.25	89.5980	43.9463*	114.9793
0.5	30.6070	20.1780*	45.8615
0.75	14.1120	13.1432*	20.6285
1	8.2855*	9.8165	10.9483
1.25	5.6542*	7.8810	6.7342
1.5	4.2227*	6.6162	4.6615
1.75	3.3363*	5.7258	3.5244
2	2.7382*	5.0657	2.8395
2.25	2.3123*	4.5574	2.3942
2.5	1.9985*	4.1542	2.0869
2.75	1.7626*	3.8269	1.8655
3	1.5825*	3.5560	1.7008
3.25	1.4433*	3.3282	1.5754
3.5	1.3347*	3.1340	1.4771
3.75	1.2494*	2.9665	1.3969
4	1.1824*	2.8206	1.3280

جدول 3: مقایسه متوسط طول اجرای طرح های کنترل ترکیبی EWMA-EWMA و Shewhart-CUSUM.

Shift	Ewma-Ewma	Shewhart-CUSUM
	$\lambda_1 = 0.225, L_1 = 2.7825$ $\lambda_2 = 0.685, L_2 = 3.0163$	SCL = 3 H = 5, K = 0.5
0	200	223
0.25	89.5980*	103.6
0.5	30.6070*	34.35
0.75	14.1120*	16.06
1	8.2855*	9.810
1.5	4.2227*	5.277
2	2.7382*	3.458
2.5	1.9985*	2.448
3	1.5825*	1.815
4	1.1824*	1.187



شکل 3: نمودار ARL طرح های کنترل ترکیبی Shewhart-CUSUM و EWMA-EWMA

کند. این مقایسات در جداول (1) و (2) نشان داده شده است.

جدول (3) مقایسه بین متوسط طول اجرای طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA ارائه شده در این تحقیق با یکی از طرح های کنترل ترکیبی شوهارت- جمع تجمعی ارائه شده توسط لوکاس در سال 1982 [14] که دارای متوسط طول اجرای تقریباً مشابهی در حالت تحت کنترل هستند می باشد. همانطور که در جدول (3) مشاهده می شود طرح EWMA-EWMA، ARL کمتری در ناحیه

در این جداول علامت \* نشان دهنده کمتر بودن متوسط طول اجرا در ناحیه خارج از کنترل به ازای تغییر مورد نظر است که هرچه این مقدار کمتر باشد خطای نوع دوم کمتر و نمودار برای میزان تغییر مورد نظر مطلوب تر است. این مقایسات نشانگر این است که طرح ترکیبی تغییرات کوچک ( $0.25\sigma$  تا  $2\sigma$ ) را بهتر از نمودار کنترل شوهارت استاندارد و تغییرات بزرگ ( $2\sigma$  تا  $4\sigma$ ) را بهتر از یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی کشف می



تا  $k$  نمودار میانگین متحرک موزون نمایی به طور همزمان استفاده شود.

### نتیجه گیری

با استفاده از طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA می توان تغییرات کوچک و بزرگ در میانگین فرایند را سریع و به طور همزمان کشف کرد ، همچنین می توان پارامترهای طرح را برای مقادیر مختلف خطای نوع اول مورد نظر و با توجه به اندازه متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل به دست آورد . آماره نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی به علت وجود ضریب هموارسازی ( $\lambda$ ) ، انعطاف پذیری بالایی برای کشف تغییرات کوچک و بزرگ دارد ، بنابراین برای کشف بازه ای از تغییرات که مهم است کشف شود می توان با تعیین صحیح  $\lambda$  و ضریب حدود انحراف معیار نمودار ( $L$ ) به نتایج خوبی رسید. با استفاده همزمان از دو نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی می توان باعث کشف سریع تغییرات کوچک و بزرگ در میانگین فرایند شد. همچنین به علت اینکه پارامترهای این طرح از طریق بهینه سازی به دست آمده اند، متوسط طول اجرا در حالت خارج از کنترل و در نتیجه خطای نوع دوم طرح حداقل می شود و موجب می شود که این طرح از طرح های ترکیبی مشابه ، که متوسط طول اجرای یکسانی در حالت تحت کنترل دارند ، بهتر عمل کند.

خارج از کنترل دارد نمودار (1) این مقایسه را به صورت شماتیک نشان می دهد و این مسئله نشانگر این است که طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA عملکرد بهتری از طرح کنترل ترکیبی شوهارت - جمع تجمعی دارد، و علت آن این است که در طرح شوهارت - جمع تجمعی لوکاس برای به دست آوردن پارامترهای طرح بهینه سازی صورت نگرفته است.

### بحث

با استفاده از طرح کنترل ترکیبی EWMA-EWMA می توان تغییرات کوچک و بزرگ در میانگین فرایند را سریع و به طور همزمان کشف کرد ، همچنین می توان پارامترهای طرح را برای مقادیر مختلف خطای نوع اول مورد نظر و با توجه به اندازه متوسط طول اجرای طرح ترکیبی در حالت تحت کنترل به دست آورد. لازم به ذکر است که طرح های کنترل ترکیبی زمانی مفید واقع می شوند که نمی دانیم تغییرات فرایند کوچک هستند یا بزرگ و یا زمانیکه هر دو نوع تغییرات وجود داشته باشند، اما زمانیکه اندازه تغییرات در میانگین فرایند مشخص باشد که کوچک است یا بزرگ آنگاه استفاده از نمودارهای تکی ساده تر و کاراتر می باشد . همچنین برای تحقیقات آتی پیشنهاد می شود یکی از نمودارهای کنترل میانگین متحرک موزون نمایی با یک واکنش اولیه سریع (FIR-EWMA) در نظر گرفته شود، همچنین پیشنهاد می شود برای کشف همزمان تغییرات کوچک، بزرگ و متوسط از 3

### مراجع

- 1- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. van Nostrand Company, Inc., Toronto.
- 2- Page, E. S. (1954). "Continous inspection scheme." *Biometrika*, Vol 41, 100-115.
- 3- Roberts, S. W. (1959). "Control chart tests based on geometric moving averages." *Technometrics*, Vol 1, 239-250.
- 4- Fatin, WF., Hahn, GJ. and Tucker, WT. (1990). "Discussion". *Technometrics*, Vol 32, 1-29.
- 5- Albin, SL., Kang, L. and Shea, G. (1997). "An X and EWMA chart for individual observations." *Journal of Quality Technology*, Vol 29, 41-48.
- 6- Box, GEP. and Kramer, T. (1992). "Statistical process monitoring and feedback adjustment—a discussion." *Technometrics*, Vol 34:251-285.
- 7- Box, GEP. and Luceño, A. (1997). *Statistical control—by monitoring and feedback adjustment*, New York: Wiley.

- 8- Chen, G., Cheng, SW. and Xie, H. (2001). "Monitoring process mean and variability with one EWMA chart." *Journal of Quality Technology*, Vol 33, 223–233.
- 9- Montgomery, DC. (1996). *Introduction to statistical quality control*. 3<sup>th</sup>. Ed. New York: Wiley.
- 10- Box, GEP. and Jenkins, GM. (1976). *Time series analysis, forecasting and control*. 2<sup>th</sup>. Ed. San Francisco: Holden-Day.
- 11- Brockwell, PJ. and Davis, RA. (1996). *Introduction to time series and forecasting*, New York: Springer.
- 12- Del Castillo, E. (2002). *Statistical process adjustment for quality control*. New York: Wiley.
- 13- Del Castillo, E. (2001). "Some properties of EWMA feedback quality adjustment schemes for drifting disturbance." *Journal of quality technology*, Vol 33, 153-166.
- 14- Del Castillo, E. and Hurwitz, A. (1997). "Run-to-run process control: literature review and extensions." *Journal of Quality Technology*, Vol 29, 184–196.
- 15- Del Castillo, E. and Rajagopal, R. (2002). "A multivariate double EWMA process adjustment scheme for drifting processes." *IIE Transactions*, Vol 34, 1055–1068.
- 16- Pan, R. and Del Castillo, E. (2001). "Identification and fine tuning of closed-loop processes under discrete EWMA and PI adjustments." *Quality and Reliability Engineering International*, Vol 17, 419–427.
- 17- Su, C.T., and Hsu, C.C. (2004). "A time-varying weights tuning method of the double EWMA controller." *Omega*, Vol 32, 473 – 480.
- 18- Lucas, J. M., and Saccucci, M. S. (1990). "Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements." *Technometrics*, Vol 32, 1-29.
- 19- Westgard, J.O., Groth, T., Aronsson, T. and De Verdier, C. (1977). "Combined Shewhart-CUSUM control chart for improved quality control in clinical chemistry." *Clinical Chemistry*, Vol 23(10), 1881-1887.
- 20- Lucas, J.M. (1982). "Combined Shewhart-CUSUM quality control schemes." *Journal of Quality Technology*, Vol 14(2), 51-59.
- 21- Lucas, J. M. (1973). "A modified V mask control scheme." *Technometrics*, Vol 15, 833-847.
- 22- Lucas, J. M., and Croiser, R. B. (1982). "Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start." *Technometrics*, Vol 24, 199-205.
- 23- Robinson, P. B., and Ho, T. Y. (1978). "Average Run Length of Geometric Moving Average charts by Numerical Methods." *Technometrics*, Vol 20, 85-93.
- 24- Crowder, S. V. (1987). "A simple method for studying run-length distribution of exponentially weighted moving average charts." *Technometrics*, Vol 29, 401-407.
- 25- Brook, D., and Evans, D. A. (1972). "An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length." *Biometrika*, Vol 59, 539-549.

## واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1- Shewhart Control Chart
- 2- Cumulative - Sum (CUSUM) Control Chart
- 3- Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) Control Chart
- 4- Engineering Process Control (EPC)
- 5- Parabolic CUSUM
- 6- Fast Initial Response (FIR)
- 7- Headstart Feature
- 8- Average Run Length (ARL)
- 9- Run Length Distribution

- 10- Ordinary Moving Average
- 11- Average Run Length Curves
- 12- Numerical Procedure
- 13- Markov-Chain Approach
- 14- Decision Maker (DM)

### پیوست (Appendix)

#### الف: بهینه سازی چند هدفه

#### روش های L-P متریک (بدون نیاز به کسب اطلاعات از تصمیم گیرنده)

فاصله متریک در روش های L-P به منظور سنجش نزدیکی یک راه حل موجود نسبت به راه حل ایده آل مورد استفاده واقع می شوند. این سنجش از انحراف به صورت یک تابع سازگار به صورت ذیل خواهد بود:

$$L-P = \left\{ \sum_{j=1}^k \gamma_j [f_j(x^{*j}) - f_j(x)]^p \right\}^{1/p} \quad (1)$$

اهداف به صورت پیشینه مد نظر است،  $x^{*j}$  نشان دهنده راه حل ایده آل در بهینه سازی هدف  $j$ ام است،  $x$  بیانگر یک راه حل مفروض بوده و  $\gamma_j$  نشان دهنده درجه اهمیت (وزن) برای هدف  $j$ ام با  $\gamma_j > 0$  می باشد. تابع سازگار L-P به منظور حداقل کردن انحرافات از ایده آل باید کمینه شود.

$1 \leq p \leq \infty$  بیانگر پارامتر مشخص کننده خانواده L-P است. ارزش  $p$  مشخص کننده درجه تأکید به انحرافات موجود می باشد به گونه ای که هر چه این ارزش بزرگ تر باشد تأکید بیشتری بر بزرگترین انحرافات خواهد بود. و اگر  $p = \infty$  شود بدان مفهوم خواهد بود که بزرگترین انحراف از انحرافات موجود برای بهینه سازی مد نظر واقع می گردد. معمولاً ارزش های  $p = 2$ ،  $p = 1$  و  $p = \infty$  در محاسبات به کار گرفته می شوند. ارزش  $p$  در هر صورت می تواند بستگی به معیارهای ذهنی تصمیم گیرنده داشته باشد. که در این تحقیق با بررسی نتایج حاصله، در نهایت از  $p = 2$  برای حل مدل استفاده شده است. چون ارزش متریک L-P می تواند تحت تأثیر مقیاس اندازه گیری از اهداف موجود واقع شود (در صورت متفاوت بودن این مقیاس ها) به منظور برطرف کردن این مشکل می توان از یکی از دو فرمول ذیل استفاده نمود:

$$L-P = \left\{ \sum_{j=1}^k \gamma_j \left[ \frac{f_j(x^{*j}) - f_j(x)}{f_j(x^{*j})} \right]^p \right\}^{1/p} \quad (2)$$

$$L-P = \left\{ \sum_{j=1}^k \gamma_j \left[ \frac{f_j(x^{*j}) - f_j(x)}{f_j(x^{*j}) - f_j(\bar{x}^j)} \right]^p \right\}^{1/p} \quad (3)$$

( $\bar{x}^j$  راه حلی است که  $f_j$  را کمینه می کند)

فاصله متریک حاصل از فرمول دوم بین صفر و یک متغیر خواهد بود و از این رو میتواند در محاسبات از نوع فازی به کار گرفته شود. در این تحقیق از فرمول اول استفاده شده است.