

# تعیین سختی دینامیکی قائم شمع واقع در محیط همسان جانبی با کمک المان ترکیبی

کامی محمدی<sup>1</sup> و اسدا... نورزاد<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد مکانیک خاک و پی - دانشکده مهندسی عمران

پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>2</sup> استاد دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت 84/9/27، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده 89/10/1، تاریخ تصویب 89/10/28)

## چکیده

هدف از مطالعه حاضر، تعیین پاسخ دینامیکی شمع‌های مدفون در محیط همسان جانبی تحت اثر ارتعاشات قائم می‌باشد. برای این منظور از روش المان ترکیبی استفاده شده است که در آن از یک سو سازه‌ی مدفون یعنی شمع با استفاده از المان محدود میله‌ای مدل شده و از سوی دیگر المان تشعشعی برای مدل‌سازی محیط نامحدود اطراف شمع به کار گرفته شده است. با سرهم کردن ماتریس سختی دینامیکی المان‌های محدود که از حل پیوسته به دست می‌آید و ماتریس سختی خاک که با معکوس کردن ماتریس نرمی به دست آمده از حل المان‌های تشعشعی تعیین می‌شود، ماتریس سختی مجموعه‌ی خاک و شمع به دست می‌آید. در نهایت این ماتریس بر حسب درجات آزادی تعریف شده در سر شمع فشرده می‌شود تا امیدانس شمع، در محل اتصال آن با سازه‌ی فوقانی، به صورت یک عدد مختلط به دست آید. همگرایی جواب‌های به دست آمده در قالب مطالعه پارامتری روی تعداد المان‌ها، فرکانس بی‌بعد و نسبت طول به قطر شمع مورد بررسی قرار می‌گیرد و درستی آن‌ها با نتایج تحقیقات قبلی Novak و Liu کنترل می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** سختی دینامیکی شمع، ارتعاش قائم، المان ترکیبی، همسان جانبی

## مقدمه

حرکت ورودی تعدیل یافته ناشی از تفرق امواج در میدان آزاد، به صورت تابعی از امیدانس خاک قابل بیان است [1].

روش‌های مورد استفاده برای تحلیل پاسخ شمع‌ها را می‌توان در دو قالب کلی قرار داد: روش‌های تجربی و روش‌های تئوری.

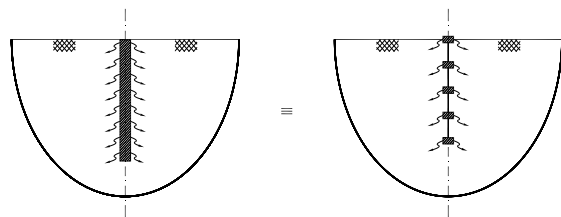
در روش‌های تجربی برای شناسایی مشخصات سیستم شمع - خاک نظیر منحنی‌های  $p-y$ ، نیاز به انجام آزمون‌های واقعی یا آزمایشگاهی می‌باشد که از یک سو موجب صرف هزینه و زمان زیاد می‌شوند و از سوی دیگر بارهای استاتیکی مورد استفاده در آن‌ها نمی‌توانند مشابه نیروی دینامیکی واقعی باشند. روش‌های تئوری برای تعیین مشخصات سیستم از مبنای تحلیلی استفاده می‌کنند و بر مبنای حل بدست آمده برای معادلات حاکم بر محیط، نظیر حل اجزای محدود و حل اجزای مرزی می‌باشند. از جمله کارهای انجام شده در چهارچوب روش‌های تجربی و تئوری می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

خرابی‌های فاجعه‌آمیز به وجود آمده در طی زلزله‌های اخیر، نگرانی‌هایی را در ارتباط با آیین‌نامه‌های موجود و روش‌های مورد استفاده برای طراحی سازه و پی از جمله پی‌های شمعی به وجود آورده است. در گذشته، برای طراحی لرزه‌ای سازه‌ها، شتاب، سرعت و تغییرمکان میدان آزاد به عنوان حرکت ورودی زمین مورد استفاده قرار می‌گرفت بدون آنکه اندرکنش دینامیکی و اثرات ساختگاهی ناشی از وضعیت لایه‌بندی خاک و وجود پی در نظر گرفته شود. در طی چند دهه‌ی گذشته پیشرفت‌های زیادی در تحلیل مساله‌ی اندرکنش خاک-سازه صورت گرفته است. تحلیل اندرکنش خاک-سازه دو پارامتر کلیدی را در اختیار مهندس طراح قرار می‌دهد: حرکت لرزه‌ای ورودی تعدیل شده در اثر حضور پی که معمولاً حرکت پی بی‌وزن بدون در نظر گرفتن روسازه می‌باشد و نیز امیدانس یا سختی دینامیکی خاک یعنی نیروی عکس‌العمل دینامیکی ناشی از تغییرمکان واحد پی که از خاک به تراز پی وارد می‌شود. تابع امیدانس خاک یک پارامتر کلیدی در بحث اندرکنش خاک-سازه است زیرا

ارضا می‌شود. عبارات به دست آمده برای مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به صورت انتگرال‌هایی با ویژگی‌های خاص می‌باشند که برای حل آن‌ها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن مفهوم نرمی و مشخص بودن عبارات تغییرمکان، ماتریس نرمی محیط پیوسته بدست می‌آید. در نهایت معکوس آن یعنی ماتریس سختی با ماتریس سختی دینامیکی شمع که از روش اجزای محدود به دست می‌آید، سرهم می‌شود تا ماتریس سختی دینامیکی مجموعه‌ی شمع- خاک با مؤلفه‌های مختلط به دست آید.

### تحلیل شمع با استفاده از المان‌های ترکیبی

در این مطالعه منظور از المان‌های ترکیبی مجموعه‌ای است از المان‌های محدود و تشعشعی که می‌توانند علاوه بر ارضای شرایط مرزی نیرو- تغییرمکان و اثر اینرسی، شرط تشعشع را نیز برآورده کنند [10]. در عملکرد المان‌های تشعشعی، نوعی مفهوم مجزاسازی نهفته است؛ بدین صورت که وقتی سازه تحت اثر تحریک نوسانی قرار می‌گیرد، موج از تمام نقاط آن به سمت محیط اطراف تابیده می‌شود درحالی‌که با در نظر گرفتن المان‌های تشعشعی این پدیده به نقاط خاصی از سازه محدود می‌شود (شکل 1). تعداد این نقاط باید به حدی باشد که مدل ساختگی به مدل واقعی همگرا شود و این موضوع در بخش همگرایی جواب‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل 1: مجزاسازی تابش موج از بدنه‌ی شمع به کمک المان‌های تشعشعی.

### تحلیل المان‌های تشعشعی

برای تحلیل دیسکی مدفون در یک محیط پیوسته‌ی ارتجاعی (شکل 2)، ابتدا معادله‌ی حرکت حاکم بر محیط به شکل عمومی زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

که در آن:

$\sigma_{ij}$ : مؤلفه‌های تانسور تنش در صفحه‌ی حاوی بردار نرمال  $i$

McClelland و Focht [2] اولین محققینی بودند که پاسخ شمع تحت اثر بار جانبی را با روش  $p-y$  به دست آوردند. Matlock و Reese [3] مفهوم مدل گسیختگی جریان خمیری را برای تحلیل پاسخ شمع ارائه دادند. Poulos [4] روش‌هایی را برای تولید منحنی‌های  $p-y$  در رس‌های نرم و سخت و ماسه‌ها ارائه داد. Berrones و Whitman [5] اندرکنش دینامیکی شمع - خاک و جرم قرار گرفته روی آن را براساس راه‌حل‌های تحلیلی در فضای فرکانسی مورد تحلیل قرار دادند. Novak [6] برای بدست آوردن ضرایب سختی و میرایی شمع از مرزهای گذرای مختلط برای خاک همگن و همسان در اطراف شمع استفاده نمود. Kaynia و Kausel [7] روش مناسبی را برای حل مسایل دینامیکی مقدار مرزی مرتبط با اندرکنش شمع و گروه شمع با خاک همگن و همسان ارائه دادند. Nogami و Konagai [8] با استفاده از فرضیه-ی وینکلر و در نظر گرفتن رفتار غیرخطی در مجاورت شمع، یک مدل برای اندرکنش دینامیکی شمع و خاک ارائه دادند. Liu و Novak [9] از جمله محققینی هستند که مساله‌ی تعیین پاسخ دینامیکی شمع‌های مدفون در محیط‌های لایه‌ای همسان عبوری و عمودی را با استفاده از توابع گرین دینامیکی ناشی از بار دایره‌ای یکنواخت، مورد بررسی قرار دادند. ایراد روش آن‌ها فرض توزیع یکنواخت زیر پی است که با توزیع واقعی تابع فرکانس متفاوت است.

در تمام روش‌های تحلیل اندرکنش، برای مدل‌سازی شمع و خاک اطراف آن از یک سری فرضیات ساده‌کننده استفاده شده است که یکی از این فرضیات در نظر گرفتن خاک به صورت یک محیط همسان است؛ درحالی‌که بیشتر نهشته‌های خاک، به دلیل نحوه قرارگیری ذرات در هنگام رسوب‌گذاری، رفتار ناهمسان جانبی از خود نشان می‌دهند، یعنی خواص ارتجاعی در صفحه‌ی همسانی و صفحه‌ی عمود بر آن متفاوت است. مورد دیگر این است که با قراردادن یک کمک فنر، انتشار امواج یک بعدی فرض می‌شود اما در واقع انتشار امواج سه بعدی است.

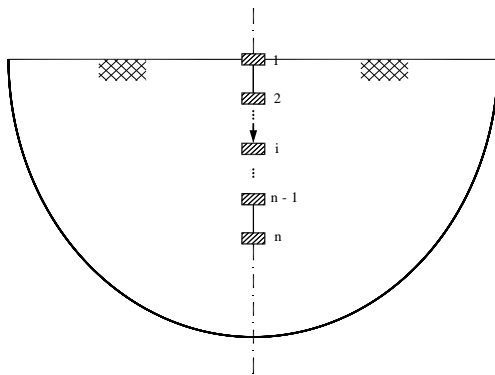
روش مورد استفاده در این مطالعه، یک روش محاسباتی بر مبنای تئوری انتشار امواج می‌باشد که در آن معادلات حرکت حاکم بر محیط پیوسته‌ی همسان جانبی بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییرمکان بیان می‌شوند. در این مرحله شرط تشعشع با به کارگیری المان‌های تشعشعی

حال با استفاده از عبارت عمومی تغییرمکان در نقطه‌ای به فاصله‌ی  $z$  از محل اعمال بار (دیسک) و به کارگیری مفهوم نرمی می‌توان جملات ماتریس نرمی مجموعه‌ی متشکل از دیسک‌های تشعشعی را به دست آورد. بدین صورت که با اعمال بار واحد  $P(t) = P e^{i\omega t}$  در نقطه‌ی  $i$  و محاسبه‌ی تغییرمکان متناظر در نقطه‌ی  $z$  مؤلفه‌ی  $f_{ij}$  ماتریس نرمی به دست می‌آید (شکل 3). در نتیجه ماتریس نرمی خاک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_s = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن:

$f_{ij}$ : مؤلفه ماتریس نرمی به ازای اعمال بار واحد در محل گره  $i$  و محاسبه تغییرمکان در محل گره  $j$ ؛  
 $F_s$ : ماتریس نرمی مجموعه‌ی المان‌های تشعشعی.



شکل 3: نمای قیاسی المان‌های تشعشعی در محاسبه‌ی ماتریس نرمی خاک.

در بخش بعدی جزئیات محاسبه به ترتیب برای المان میله و المان تشعشعی ارائه می‌گردد.

### تحلیل المان‌های محدود

ماتریس سختی دینامیکی میله‌ی محوری برابر است با [13]:

$$[K_p] = \frac{EA\gamma}{\sin(\gamma L)} \begin{bmatrix} \cos(\gamma L) & -1 \\ -1 & \cos(\gamma L) \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن:

$A$ : سطح مقطع عرضی میله؛

$$\gamma = \frac{\omega}{c_0}, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$L$ : طول میله؛  $\rho$  و  $E$ : جرم حجمی و مدول ارتجاعی.

$F_i$ : مؤلفه‌های بردار نیروی پیکره‌ای در واحد حجم؛

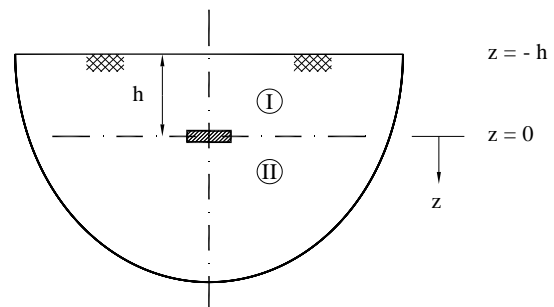
$\rho$ : جرم حجمی مصالح محیط؛

$u_i$ : مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در امتداد محورهای مختصات.

با استفاده از روابط تنش-کرنش در محیط همسان جانی و نیز رابطه‌ی کرنش- تغییرمکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مؤلفه‌های تنش بر حسب تغییرمکان به دست آمده و معادله‌ی حرکت به طور کلی بر حسب بردار مجهول یعنی مؤلفه‌های تغییرمکان بیان می‌شود. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع [11] مراجعه نمود. پس از بیان مؤلفه‌های تغییرمکان بر حسب توابع پتانسیل در حوزه‌ی فرکانسی، با اعمال معادله‌ی حرکت، شرایطی برای توابع پتانسیل ظاهر می‌شوند و در نهایت توابع پتانسیل با استفاده از تبدیل هنکل در حوزه‌ی عدد موج به دست می‌آیند. توابع پتانسیل بر حسب جملاتی به شکل کلی  $\exp(+az)$  و  $\exp(-az)$  بیان می‌شوند، یعنی:

$$U = f(\exp(+az), \exp(-az)) \quad (2)$$

با بازگشت به حوزه‌ی زمان جملاتی به فرم  $\exp(i\omega t + az)$  و  $\exp(i\omega t - az)$  ظاهر می‌شوند. بنابر شرط تشعشع، امواجی که از محل دیسک به بی‌نهایت منتشر می‌شوند انعکاس نمی‌یابند، بنابراین عبارت بیانگر حرکت موج از بی‌نهایت به محل دیسک یعنی عبارت  $\exp(i\omega t + az)$  باید حذف شود (ناحیه II، شکل 2) اما در حرکت موج به سمت محیط محدود بالای دیسک هر دو عبارت که بیانگر رفت و برگشت موج هستند وجود دارند (ناحیه I، شکل 2). فرض دیگر در به دست آوردن مؤلفه‌های تغییرمکان، انطباق توزیع تنش زیر دیسک صلب بر توزیع استاتیکی بوزینسک است که در محدوده‌ی فرکانس‌های کوچکتر از یک به صورت تحلیلی قابل دستیابی است [12].



شکل 2: نمایش محیط محدود و نیم نامحدود در بالا و پایین دیسک تشعشعی.

$$u(r, \theta, z) = u(r, \theta, z) e^{i\omega t}$$

$$v(r, \theta, z) = v(r, \theta, z) e^{i\omega t} \quad (6)$$

$w(r, \theta, z) = w(r, \theta, z) e^{i\omega t}$   
مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در فضای فرکانسی بر حسب توابع پتانسیل  $X$  و  $\Psi$  بصورت زیر بیان می‌شوند [15]:

$$u = -\alpha_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} \quad (7)$$

$$v = -\alpha_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial X}{\partial r} \quad (8)$$

$$w = (1 + \alpha_1) \left( \nabla_{r\theta}^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0}{1 + \alpha} \omega^2 \right) \Psi \quad (9)$$

که در روابط فوق پارامترهای  $\alpha_i$ ،  $\beta$  و  $\rho_0$  تابع ضرایب کرنشی هستند که در مرجع [14] به آن‌ها اشاره شده است.

با قراردادن روابط (7) و (8) و (9) در معادلات حرکت نتیجه می‌شود که توابع پتانسیل  $X$  و  $\Psi$  باید شرایط زیر را ارضا کنند:

$$\begin{cases} \nabla_0^2 X = 0 \\ \nabla_1^2 \nabla_2^2 \Psi = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_0^2 = \nabla_{r\theta}^2 + \frac{1}{S_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho_0 \omega^2 \quad (10)$$

$$\nabla_i^2 = \nabla_{r\theta}^2 + \frac{1}{S_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu_i} \rho_0 \omega^2, \quad (i=1,2)$$

$S_0 = f$  (Strain Coefficient)

$S_1^2$  و  $S_2^2$  ریشه‌های معادله‌ی زیر هستند و با توجه به مثبت بودن انرژی کرنشی این ریشه‌ها نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند (این مساله توسط Lekhnitskii ثابت شده است [14]):

$$A_{33} A_{44} S^4 + (A_{13}^2 + 2A_{13} A_{44} - A_{11} A_{33}) S^2 + A_{11} A_{44} = 0 \quad (11)$$

با حل معادلات (10) توابع پتانسیل  $X$  و  $\Psi$  در فضای تبدیل‌یافته عدد موج به دست می‌آیند. با استفاده از معادلات (7) و (8) و (9) مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در همان فضای تبدیل‌یافته نتیجه می‌شود. در نهایت می‌توان با اعمال تبدیل معکوس، مؤلفه‌های بردار تغییرمکان را در فضای واقعی به دست آورد.

## تعیین ماتریس سختی المان‌های تشعشعی از طریق حل معادلات موج در محیط نیم بینهایت همسان جانبی تحت اثر بار هارمونیک قائم

در مرجع [14] از بسط معادله‌ی (1) معادلات حرکت حاکم بر محیط پیوسته ارتجاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست آمده است. همچنین فرم کلی رابطه‌ی تنش-کرنش برای محیط همسان جانبی با 5 ثابت ساده شده است. با استفاده از این رابطه و در اختیار داشتن رابطه کرنش-تغییرمکان، مؤلفه‌های تنش بر حسب تغییرمکان به دست می‌آید. با قراردادن تنش و مشتق آن در فرم استوانه‌ای معادله‌ی حرکت، معادله‌ی حرکت حاکم بر محیط همسان جانبی بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left( \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \left( \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} A_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$A_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

## جواب عمومی

جواب عمومی معادلات (5) در حوزه‌ی فرکانسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

که در آن:

$$\alpha'_0 = S_0 \sqrt{\xi^2 - \rho_0 \omega^2} \quad (20)$$

به صورت مشابه با نوشتن بسط فوریه‌ی تابع پتانسیل  $\Psi$  و اعمال تبدیل هنکل مرتبه‌ی  $m$  نسبت به  $r$  روی آن، معادله‌ای از مرتبه چهار به دست می‌آید که از حل آن داریم:

$$\Psi_m^m(\xi, z) = C_m(\xi) e^{-\alpha'_1 z} + D_m(\xi) e^{+\alpha'_1 z} + E_m(\xi) e^{-\alpha'_2 z} + F_m(\xi) e^{+\alpha'_2 z} \quad (21)$$

که در آن:

$$\alpha'_1 = S_1 \sqrt{\xi^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_1}}, \alpha'_2 = S_2 \sqrt{\xi^2 - \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_2}} \quad (22)$$

ضرایب ظاهر شده در توابع پتانسیل یعنی  $A_m$  و  $B_m$  و ... که تابع عدد موج، تنش و مشخصات مصالح هستند، با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

## تعریف مؤلفه‌ی تغییرمکان در فضای عدد

### موج

شرایط مرزی مساله‌ی حاضر از نوع آمیخته می‌باشند. یعنی تابع (تغییرمکان) در قسمتی از مرز و گرادیان آن (کرنش یا تنش) در قسمتی دیگر از مرز تعریف شده‌اند. بدین ترتیب لازم است که ابتدا بسط به سری فوریه‌ی توابع تغییرمکان محاسبه شده و سپس تبدیل یافته‌ی ضرایب بسط آن‌ها در فضای عدد موج به دست آیند. از سوی دیگر ضرایب بسط به سری فوریه‌ی مؤلفه‌های بردار تنش که بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییرمکان تعریف شده‌اند، به فضای عدد موج منتقل می‌شوند. در نهایت کلیه‌ی مؤلفه‌های پایه شرایط مرزی در فضای مشابه با فضای تعریف توابع پتانسیل به دست آمده و می‌توان با برقراری شرایط مرزی، روابط بین توابع پتانسیل را در فضای عدد موج به دست آورد. با به دست آوردن هماهنگ فوریه‌ی مرتبه  $m$ -ام مؤلفه قائم بردار تغییرمکان و اعمال تبدیل هنکل مرتبه‌ی  $m$  نسبت به  $r$  به روی آن می‌توان نوشت:

$$w_m^m = (1 + \alpha_1) \left[ -\xi^2 + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right] \Psi_m^m \quad (23)$$

در نتیجه  $w_m$  با اعمال تبدیل معکوس هنکل روی رابطه‌ی فوق به صورت زیر به دست می‌آید:

## حل معادلات مستقل برای یافتن توابع

### پتانسیل

برای حل معادلات (10) و بدست آوردن توابع  $X$  و  $\Psi$ ، از روش تبدیلات انتگرالی استفاده می‌شود. بدین ترتیب که متغیر مساله با یک پارامتر جایگزین شده، و دیگر مشتقی نسبت به متغیر حذف شده وجود ندارد. ابتدا بسط فوریه‌ی توابع  $X$  و  $\Psi$  نسبت به مؤلفه‌ی  $\theta$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m(r, z) e^{im\theta} \quad (12)$$

$$\Psi(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Psi_m(r, z) e^{im\theta} \quad (13)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (12) در معادله‌ی (10) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} X_m(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} X_m(r, z) \\ & - \frac{m^2}{r^2} X_m(r, z) + \frac{1}{S_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} X_m(r, z) \\ & + \rho_0 \omega^2 X_m(r, z) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

از سوی دیگر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \nabla_{r\theta}^2 [X(r, z, \theta)] = \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) X_m(r, z) \end{aligned} \quad (15)$$

تبدیل هنکل مرتبه  $m$  تابع  $f(r)$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} f(r) J_m(\xi r) r dr \quad (16)$$

بنابراین تبدیل هنکل لاپلاسین فوق برابر است با:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) X_m(r, z) J_m(\xi r) r dr = -\xi^2 X_m^m(\xi, z) \quad (17)$$

با جایگزینی عبارت فوق در تبدیل هنکل رابطه‌ی (14)، معادله‌ی (10) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left[ \rho_0 \omega^2 + \frac{1}{S_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 \right] X_m^m(\xi, z) = 0 \quad (18)$$

$$X_m^{m''} + (\rho_0 \omega^2 - \xi^2) S_0^2 X_m^m = 0$$

جواب معادله‌ی مرتبه دوم فوق را می‌توان به سادگی

به دست آورد:

$$X_m^m(\xi, z) = A_m(\xi) e^{-\alpha'_0 z} + B_m(\xi) e^{+\alpha'_0 z} \quad (19)$$

یافته مشخص می‌شوند. با اعمال تبدیل معکوس انتگرالی، عبارات لازم برای بیان تغییرمکان در فضای واقعی به دست می‌آیند. حل تحلیلی انتگرال به دست آمده غیر ممکن بوده و تنها به کمک روش‌های عددی قابل حل می‌باشد که این روش‌ها باید با دارا بودن الگوریتم‌های خاص، انتگرال‌های نوسانی ناسره‌ی تکین را برآورد نمایند. جزئیات چگونگی کاربرد روش‌های عددی در حل انتگرال معرف مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در مرجع [11] ذکر شده است.

شرایط مرزی برای دو نقطه یکی روی سطح زمین ( $z = -h$ ) و دیگری در محل دیسک ( $z = 0$ ) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} 1: (\sigma_{zz})_I &= 0, & z &= -h \\ 2: (\sigma_{rz})_I &= 0, & z &= -h \\ 3: (\sigma_{\theta z})_I &= 0, & z &= -h \\ 4: u_I &= u_{II}, & z &= 0 \\ 5: v_I &= v_{II}, & z &= 0 \\ 6: w_I &= w_{II}, & z &= 0 \\ 7: (\sigma_{zz})_I - (\sigma_{zz})_{II} &= f(r), & z &= 0 \\ 8: (\sigma_{rz})_I &= (\sigma_{rz})_{II}, & z &= 0 \\ 9: (\sigma_{\theta z})_I &= (\sigma_{\theta z})_{II}, & z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

با در نظر گرفتن شرط مرز آزاد از تنش در حالت ارتعاش قائم از اصطکاک کف پی با خاک صرفنظر شده است که این مطلب در شرایط مرزی 8 و 9 مشاهده می‌شود. از سوی دیگر  $f(r)$  که در شرط 7 تعریف شده است، توزیع تنش زیر پی در اثر اعمال بار می‌باشد. در حالت کلی توزیع تنش زیر دیسک که تغییرمکان یکنواخت دیسک صلب را به دنبال داشته باشد، نامشخص و وابسته به فرکانس است. با فرض فرکانس حداکثر 30 هرتز برای زلزله و قطر شمع 1 متر و اینکه سرعت امواج برشی خاک‌های نرم حدود 100 متر بر ثانیه می‌باشد حداکثر مقدار فرکانس پی‌بعد برابر است با:

$$a_0 = \frac{\omega r}{v_s} = \frac{2\pi \times 30 \times 0.5}{100} = 0.949 < 1$$

با توجه به مقادیر پایین فرکانس پی‌بعد می‌توان توزیع تنش زیر دیسک را مشابه حالت استاتیکی و مستقل از فرکانس فرض نمود [12] و بنابراین داریم:

$$w_m = (1 + \alpha_1) \times \int_0^{\xi} \left[ -\xi^2 + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho_0 \omega^2}{1 + \alpha_1} \right] \Psi_m^m J_m(\xi r) d\xi \quad (24)$$

با داشتن مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در فضای تبدیل‌یافته و نیز روابط کرنش-تغییرمکان و تنش-کرنش برای مصالح محیط می‌توان مؤلفه‌های بردار تنش یعنی دومین عبارتی که شرایط مرزی بر حسب آن بیان می‌شود را در فضای تبدیل‌یافته‌ی عدد موج به دست آورد.

شکل (2) دیسک صلب بی‌وزنی را نشان می‌دهد که در عمق  $h$  از یک محیط همگن همسان جانی قرار گرفته است. محیط اطراف دیسک از یک سو در بالای آن به سطح زمین محدود شده و از سوی دیگر در زیر دیسک تا بی‌نهایت ادامه دارد (محیط نیم بینهایت). دو نوع معادله برای شرایط مرزی قسمت‌های محدود و نیم نامحدود به دست می‌آید. با توجه به روابط بدست آمده برای ضرایب بسط به سری فوریه‌ی توابع پتانسیل، می‌توان نوشت:

برای محیط محدود (I): ( $z \leq 0$ )

$$\Psi_m^m(\xi, z) = C_{m1} e^{-\alpha_1 z} + D_{m1} e^{+\alpha_1 z} + E_{m1} e^{-\alpha_2 z} + F_{m1} e^{+\alpha_2 z} \quad (25)$$

برای محیط نیم نامحدود (II): ( $z \geq 0$ )

$$\Psi_m^m(\xi, z) = C_{m2} e^{-\alpha_1 z} + E_{m2} e^{-\alpha_2 z} \quad (26)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود توابع پتانسیل در داخل دو محیط بر حسب 9 ضرایب مجهول بیان می‌شوند که این ضرایب توابعی از مشخصات محیط، وضعیت تنش و عدد موج می‌باشند. برای به دست آوردن این ضرایب نیاز به 9 شرط مرزی داریم که در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

### اعمال شرایط مرزی و تعیین ضرایب مجهول

در این قسمت شرایط مرزی مساله که بر حسب مؤلفه‌های تنش و تغییرمکان هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. با اعمال تبدیل هنکل بر روی این شرایط مرزی و جایگذاری مقادیر متناظر تنش و کرنش، معادلات لازم برای تعیین ضرایب مجهول توابع پتانسیل شکل می‌گیرند. با حل این معادلات و تعیین ضرایب، توابع پتانسیل و از روی آن‌ها مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در فضای تبدیل

$$G_V = 10/25 \text{ MPa} \quad , \quad E_H = 31 \text{ MPa}$$

$$G_H = 12/92 \text{ MPa} \quad , \quad E_V = 50 \text{ MPa}$$

$$v_{HH} = 0/2 \quad , \quad v_{VH} = 0/35 \quad , \quad n = \frac{E_H}{E_V} = 0/62$$

امپدانس شمع در قالب عبارت بی بعد  $\frac{k_{zz} r_o}{E_p A_p}$  بیان

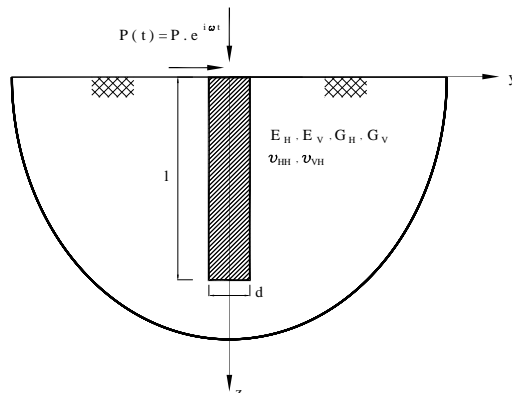
می شود:

$k_{zz}$ : امپدانس واقعی برای حالت ارتعاش قائم و افقی  
(N/m)

$r_o$ : شعاع شمع (m)

$E_p$ : مدول ارتجاعی مصالح شمع (MPa)

$A_p$ : سطح مقطع شمع (m)



شکل 4: پارامترهای هندسی و ارتجاعی مورد استفاده در تحلیل.

در شکل (5) تغییرات بخش حقیقی (ضریب سختی) و بخش موهومی (ضریب میرایی) تابع امپدانس در سطح فرکانسی  $a_o = 0/1$  رسم شده است. در این شکل نمودارها برای نسبت‌های مختلف طول به قطر شمع، یعنی  $\frac{l}{d} = 3, 10, 15, 20, 25, 30, 100$  تفکیک شده‌اند.

شکل‌های (6) و (7) نمودارهای مشابهی را برای سطوح فرکانس  $a_o = 0/5, 1$  نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که در بررسی همگرایی تابع امپدانس از اثر میرایی مادی صرف نظر شده است، یعنی  $\zeta = 0$ .

### تغییرات تابع امپدانس بر حسب تعداد المان‌ها

با افزایش تعداد المان‌ها، ضریب سختی تا رسیدن به یک مقدار بیشینه که پس از این به نام نقطه‌ی اوج امپدانس شناخته می‌شود افزایش می‌یابد. با عبور از این نقطه، افزایش تعداد المان‌ها منجر به کاهش ضریب سختی

$$f(r) = \frac{P_z}{2\pi r_o^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

که در آن:

$P_z$ : بار وارد بر روی دیسک؛

$r_o$ : شعاع دیسک؛

$r$ : شعاع نقطه‌ی مورد نظر.

با نوشتن ضرایب بسط به سری فوریه‌ی شرایط مرزی فوق و اعمال تبدیل انتگرالی هنکل بر روی آن‌ها، معادلات 9 گانه‌ای حاصل می‌شوند که با قراردادن مقادیر متناظر تنش و تغییرمکان در فضای عدد موج، ضرایب این معادلات - ضرایب مجهول توابع پتانسیل - به دست می‌آیند.

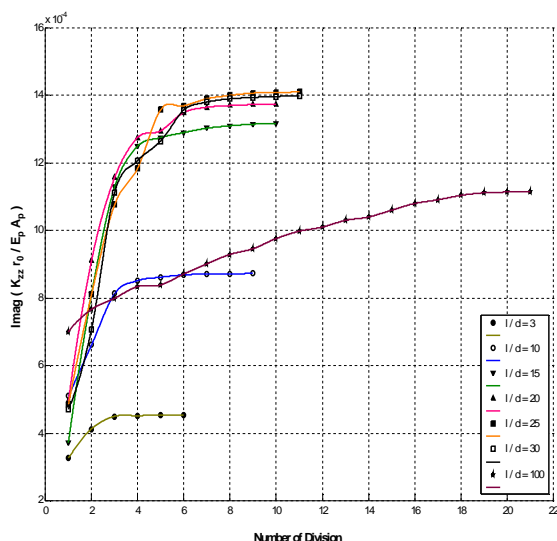
### بررسی همگرایی جواب‌ها

در روش ارائه شده در مطالعه‌ی حاضر، مجزاسازی به دو شکل کلی انجام می‌شود: یکی مجزاسازی سازه‌ی شمع به المان‌های محدود و دیگری مجزاسازی سطح تماس شمع به المان‌های تشعشعی در طول آن. به عبارت دیگر تشعشع موج در طول شمع به نقاط خاصی از آن که همان محل قرارگیری دیسک‌های تشعشعی است، محدود می‌شود. هرچه تعداد المان‌ها افزایش یابد مدل‌سازی تشعشع موج در طول شمع به حالت واقعی نزدیک‌تر بوده و انتظار می‌رود اختلاف نسبی بین جواب‌ها به سمت صفر میل کند. در این قسمت نشان داده می‌شود که با افزایش تعداد المان‌ها جواب‌های به دست آمده برای امپدانس شمع به سمت عدد مشخصی همگرا می‌شوند تا در قسمت بعدی از این اعداد همگرا شده برای کنترل درستی نتایج استفاده شود.

به منظور مطالعه‌ی روند همگرایی جواب‌ها، از یک سری مطالعات پارامتری استفاده می‌شود. بدین شکل که تغییرات تابع امپدانس با افزایش تعداد المان‌ها، برای سه سطح فرکانس بی‌بعد یعنی  $a_o = 0/1, 0/5, 1$  و نسبت

طول به قطر شمع  $\frac{l}{d} = 3, 10, 15, 20, 25, 30, 100$

رسم می‌شود. در این مطالعه‌ی پارامتری که شکل (4) پارامترهای هندسی و ارتجاعی مورد استفاده در آن را نشان می‌دهد، محیط ناهمسان در نظر گرفته شده در اطراف شمع، رس حساس است و ضرایب ارتجاعی آن برابرست با:



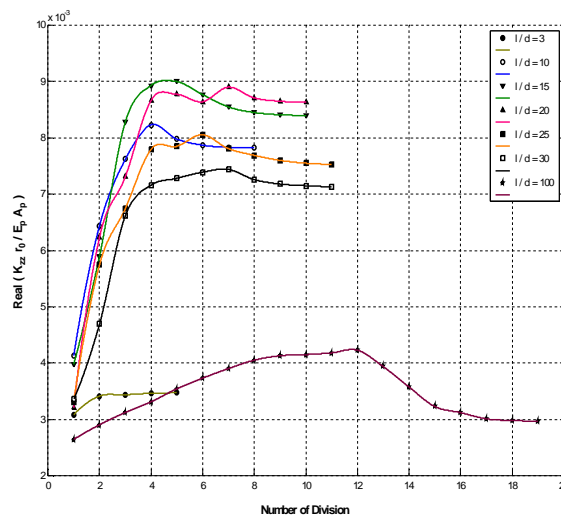
ادامه شکل 6: نمایش همگرایی بخش حقیقی و موهومی تابع امیدانس برای ارتعاش قائم و  $a_0 = 0/5$ .

سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چرا با افزایش تعداد المان‌ها ضریب سختی ابتدا افزایش می‌یابد؛ در حالی که مطابق مباحث مطرح شده در اجزای محدود، با افزایش تعداد المان‌ها ضریب سختی عضو کاهش می‌یابد تا به مقدار نهایی همگرا شود. برای پاسخ به این پرسش باید به تغییرات ضریب میرایی با افزایش تعداد المان‌ها توجه کرد. همان‌گونه که انتظار می‌رود با افزایش تعداد المان‌ها، تعداد نقاط تشعشع موج در طول شمع افزایش یافته و در نتیجه میرایی تشعشعی افزایش می‌یابد. از سوی دیگر می‌دانیم که ماتریس سختی مجموعه‌ی شمع و خاک از معکوس کردن ماتریس نرمی که خود شامل مولفه‌های مختلط است، به دست می‌آید و این خود برهم‌کنش مؤلفه‌های حقیقی و موهومی را به دنبال دارد.

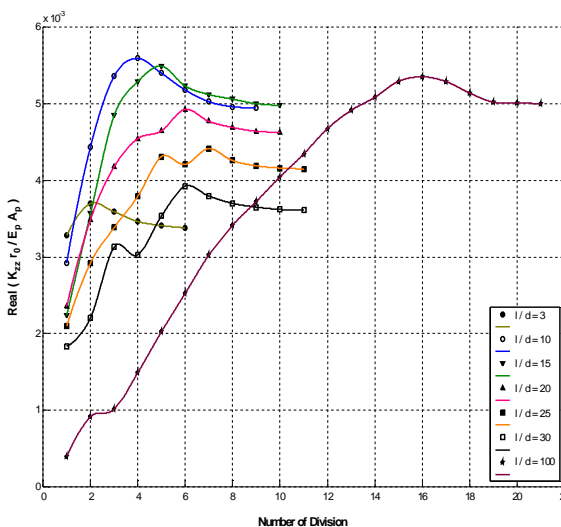
به عبارت دیگر بخش‌های حقیقی و موهومی ماتریس سختی روی یکدیگر اثر می‌گذارند. حال می‌توان به سوال مطرح شده به این صورت جواب داد که با افزایش تعداد المان‌ها، هرچند که سختی به دست آمده از حل اجزای محدود کاهش می‌یابد اما با توجه به افزایش ضریب میرایی، برآیند این دو منجر به افزایش ضریب سختی مجموعه‌ی شمع و خاک می‌شود.

با افزایش تعداد المان‌ها، میزان افزایش ضریب میرایی کاهش می‌یابد بگونه‌ای که از یک نقطه به بعد یعنی نقطه-ی اوج تابع امیدانس، میزان کاهش سختی حل اجزای محدود نسبت به افزایش میرایی ناشی از تشعشع بیشتر

خواهد شد و این کاهش ادامه پیدا می‌کند تا جایی که پاسخ به مقدار پایدار نهایی همگرا شود.



ادامه شکل 5: نمایش همگرایی بخش حقیقی و موهومی تابع امیدانس برای ارتعاش قائم و  $a_0 = 0/1$ .



شکل 6: نمایش همگرایی بخش حقیقی و موهومی تابع امیدانس برای ارتعاش قائم و  $a_0 = 0/5$ .



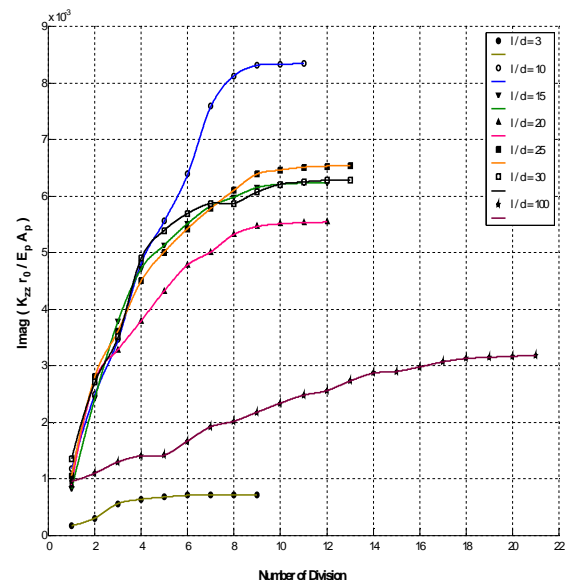
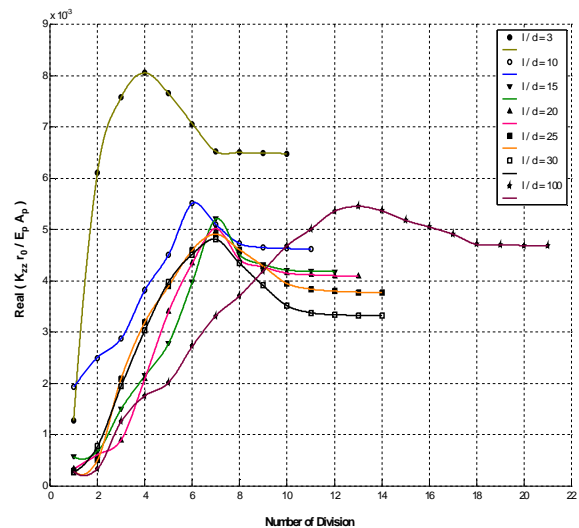
## مقایسه با نتایج تحقیقات قبلی

پس از بررسی همگرایی جواب‌های به دست آمده برای تابع امپدانس، درستی این جواب‌ها با نتایج تحقیقات قبلی کنترل می‌شود. در طی چند دهه‌ی اخیر تلاش‌های زیادی برای تعیین پاسخ دینامیکی شمع‌ها در محیط‌های ناهمگن و ناهمسان صورت گرفته است. با توجه به شرایط مسالهای حاضر و فرضیات در نظر گرفته شده، نتایج مطالعه‌ی اخیر با نتایج بدست آمده از مطالعات Novak و Liu [9] مقایسه می‌شوند. اما پیش از مقایسه، روند کلی روش پیشنهادی و فرضیات در نظر گرفته شده بررسی می‌شود.

در این روش برای مدل‌سازی سازه‌ی شمع از المان‌های تیر- ستون یا خمشی- محوری استفاده شده است. همچنین محیط خاک نامحدود اطراف شمع، با استفاده از ماتریس نرمی بدست آمده از توابع گرین دینامیکی ناشی از بار دایره‌ای یکنواخت، مدل شده است. روش کار به این صورت است که ابتدا محیط خاک در امتداد قائم به یک سری لایه‌های نازک مجزاسازی شده و سپس مسالهای مقدار ویژه برای هر لایه حل می‌شود. تغییر مکان‌های سطح مشترک شمع- خاک با اعمال بار دایره‌ای در هر نقطه از سطح مشترک و محاسبه ضرایب تغییر شکل‌پذیری خاک به دست می‌آیند. در ادامه مؤلفه- های ماتریس نرمی برای هر چهار حالت ارتعاش یعنی قائم، چرخشی، افقی و دورانی به دست آمده است. در ارتعاش قائم از تغییر شکل شعاعی شمع و عکس‌العمل شمع در امتداد شعاعی صرف‌نظر شده است چرا که اثر کوچکی روی پاسخ قائم شمع دارد (فرض مرزهای آزاد از تنش که در این مطالعه نیز مورد استفاده قرار گرفته است).

همان‌گونه که در روش پیشنهادی مطالعه‌ی حاضر اشاره شد، ماتریس نرمی بدست آمده برای محیط نامحدود اطراف شمع، تنها برای محیط خاک بدون شمع، یعنی همان میدان آزاد، برقرار است. با توجه به این موضوع، Novak و Liu جرم حجمی اصلاح شده‌ی شمع را که به صورت تفاضل جرم حجمی شمع و جرم حجمی ستون خاک تعریف می‌شود، مورد استفاده قرار داده‌اند؛ اما در مطالعه‌ی اخیر فرضی در این مورد صورت نگرفته است. همچنین با توجه به اینکه روش لایه‌ی نازک برای محیط خاک قرار گرفته روی سنگ بستر صلب ارائه شده است،

می‌شود و برآیند آن‌ها منجر به کاهش ضریب سختی تا رسیدن به منطقه‌ی پایدار نهایی می‌شود. در مورد بخش موهومی، همان‌گونه که انتظار می‌رود با افزایش تعداد المان‌ها یعنی افزایش تعداد نقاط تشعشع در طول شمع، ضریب میرایی افزایش می‌یابد تا در نهایت به یک مقدار مشخص همگرا شود. تنها نکته‌ی قابل توجه در مورد روند تغییرات ضریب میرایی برحسب تعداد المان‌ها، الگوی کاهش مشاهده شده در فرکانس  $a_0 = 0/1$  یعنی فرکانس نزدیک به حالت استاتیکی می‌باشد و می‌توان آن را به اثر متقابل کاهش سختی اجزای محدود روی ضریب میرایی نسبت داد. در فرکانس‌های بالاتر میزان میرایی تشعشعی در تعداد المان‌های پایین به حدی است که کاهش سختی روی آن اثر ندارد.



شکل 7: نمایش همگرایی بخش حقیقی و موهومی تابع

امپدانس برای ارتعاش قائم و  $a_0 = 1$ .

تا یک به دست آمده است.  
2. نسبت طول به قطر: کلیه نتایج برای دو حالت شمع-های متوسط با نسبت طول به قطر 15 و شمع‌های بلند با نسبت طول به قطر 50 ارائه شده است.

3. مدول برشی خاک: با توجه به نسبت مدول ارتجاعی شمع به مدول برشی خاک در صفحه‌ی قائم، نتایج برای دو حالت خاک‌های نرم و سخت به دست آمده است.

تعریف خاک نرم و سخت در روش مرجع بصورت زیر است:

$$\frac{E_p}{G_v} = 1000 \quad \text{خاک‌های نرم:}$$

$$\frac{E_p}{G_v} = 100 \quad \text{خاک‌های سخت:}$$

محیط ناهمسان مورد استفاده در تحقیقات انجام شده روش مرجع، رس بیش‌تحکیم‌یافته‌ی لندن می‌باشد که پارامترهای ارتجاعی آن برابر است با:

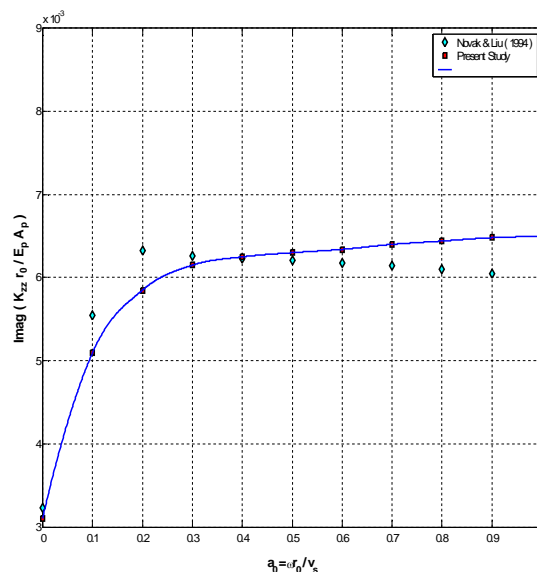
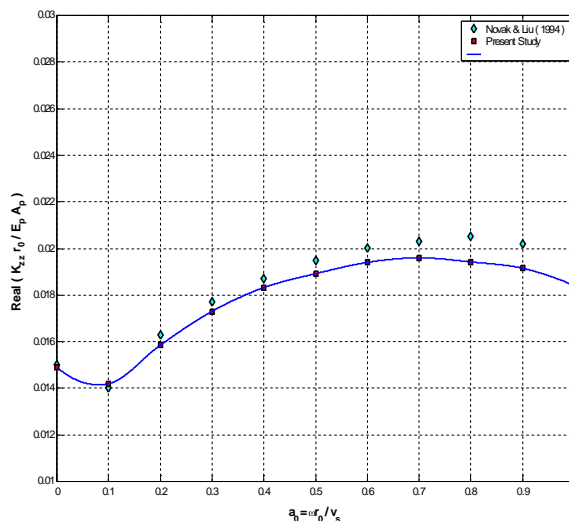
$$G_v = 26/8 \text{ MPa} \quad E_H = 100 \text{ MPa} \quad v_{HH} = 0$$

$$G_H = 50 \text{ MPa} \quad E_v = 50 \text{ MPa} \quad v_{vH} = 0/19$$

حال به کمک روش پیشنهادی مطالعه‌ی اخیر، پاسخ دینامیکی شمع متوسط با نسبت طول به قطر 15، تحت اثر ارتعاشات قائم، به دست می‌آید. مطابق با روش مرجع، مقادیر تابع امیدانس برای شمع مدفون در رس بیش‌تحکیم یافته‌ی لندن و نسبت میرایی مصالح  $\zeta = 0/05$  ارائه شده است. نتایج حاصل برای ارتعاش قائم در شکل (8) نشان داده شده است.

با بررسی نمودارها مشاهده می‌شود که در محدوده‌ی فرکانس‌های بی‌بعد کوچکتر از 0/5 نتایج مطالعه‌ی حاضر با نتایج روش مرجع بخوبی مطابقت می‌کند و تنها موردی که مخالف بیان فوق می‌باشد، پرش به وجود آمده در ضریب میرایی تابع امیدانس برای حالت ارتعاش قائم است. با افزایش فرکانس بی‌بعد، منحنی‌های مربوط به روش مطالعه‌ی حاضر و روش مرجع از یکدیگر جدا شده و حداکثر اختلاف در فرکانس بی‌بعد یک رخ می‌دهد. حداکثر خطای بوجود آمده برای ضرایب سختی و میرایی در حالت ارتعاش قائم به ترتیب 7 و 9 درصد می‌باشد. علت این اختلاف را باید در فرض مربوط به توزیع بار واحد جستجو کرد. همان‌گونه که پیش از این ذکر شد در روش

Novak و Liu برای مدل‌سازی شمع‌های شناور، بستر صلب را در فاصله‌ی دور از شمع قرار داده‌اند که مشابه با مدل‌سازی خاک اطراف شمع در مطالعه‌ی حاضر یعنی یک محیط نیم بینهایت است.



شکل 8: مقایسه‌ی مقادیر تابع امیدانس با نتایج مطالعات Novak و Liu برای ارتعاش قائم.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود فرضیات به کارگرفته شده در مطالعه‌ی اخیر بسیار شبیه به فرضیات روش مرجع می‌باشند. اختلاف اصلی در فرض توزیع تنش زیر دیسک می‌باشد که در مطالعه‌ی حاضر بر خلاف روش مرجع از توزیع تنش استاتیکی استفاده شده است. نتایج عددی روش مرجع در قالب مطالعه‌ی پارامتری روی متغیرهای زیر ارائه شده است:

1. فرکانس بی‌بعد: مقادیر تابع امیدانس برای حالات مختلف ارتعاشی، برای محدوده‌ی فرکانس بی‌بعد صفر

همگرایی افزایش می‌یابد. البته این افزایش کاملاً منطقی به نظر می‌رسد؛ چرا که با افزایش فرکانس، تشعشع در طول شمع افزایش یافته و تعداد دیسک‌های بیشتری برای مدل‌سازی واقعی این رفتار تشعشعی مورد نیاز است. افزایش ضریب میرایی با افزایش فرکانس بی‌بعد به خوبی در نمودارهای بخش موهومی تابع امپدانس نشان داده شده است و این در حالی است که بخش حقیقی تابع امپدانس نوعی رفتار نوسانی را با افزایش فرکانس از خود نشان می‌دهد. بدین شکل که برای شمع‌های کوتاه که با نسبت طول به قطر 3 نشان داده شده‌اند، با افزایش فرکانس، ضریب سختی در محدوده‌ی فرکانس مورد مطالعه، افزایش می‌یابد. برای شمع‌های متوسط با افزایش فرکانس، ضریب سختی کاهش می‌یابد و برای شمع‌های بلند که با نسبت طول به قطر 100 نشان داده شده‌اند، ضریب سختی با افزایش فرکانس، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همان‌گونه که در قسمت قبلی اشاره شد، با افزایش نسبت طول به قطر شمع، ضرایب سختی و میرایی به صورت نوسانی تغییر می‌کنند. با بررسی روند تغییرات این ضرایب در فرکانس‌های مختلف، در می‌یابیم که میزان و همچنین تعداد نوسانات با افزایش فرکانس بی‌بعد افزایش می‌یابد.

### نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر برای تعیین پاسخ دینامیکی شمع‌های مدفون در محیط همسان جانبی تحت اثر ارتعاشات قائم روش المان‌های ترکیبی تشعشعی و محدود مورد استفاده قرار گرفت؛ تا هم بتوان سازه‌ی محدود یعنی شمع را به خوبی مدل کرد و هم مشخصات محیط خاک نامحدود اطراف و پراکندگی موج‌های بازتابیده شده از شمع به داخل آن را در نظر گرفت. روش پیشنهادی یک روش نیمه تحلیلی ساده است که با معرفی المان تشعشعی، شرط تشعشع را در داخل خود معادلات ارضا نموده و تنها برای حل انتگرال‌های نهایی از محاسبات عددی کمک می‌گیرد. در ضمن توزیع تنش استاتیکی، که در محدوده فرکانسی مورد بحث نزدیک به توزیع واقعی می‌باشد، مورد استفاده قرار گرفته است.

در مدل‌سازی سیستم شمع - خاک پاراهای از مشخصات واقعی نادیده گرفته شده است بنابراین پیش از هرگونه اظهار نظر در مورد نتایج این مطالعه لازم است

مرجع مؤلفه‌های ماتریس نرمی تحت اثر بار یکنواخت به دست آمده‌اند، در حالی که در مطالعه‌ی حاضر این توزیع به صورت استاتیکی در نظر گرفته شده است که در محدوده‌ی فرکانس‌های بی‌بعد کوچکتر از یک فرض دور از واقعیتی نمی‌باشد. اما باید به این نکته توجه کرد که توزیع تنش واقعی زیر دیسک وابسته به فرکانس بوده و با افزایش فرکانس از حالت یکنواخت و استاتیکی خارج می‌شود. در ادامه، تغییرات تابع امپدانس برحسب نسبت طول به قطر و فرکانس بی‌بعد بررسی می‌شود.

### تغییرات امپدانس بر حسب نسبت طول به قطر

همان‌گونه که در شکل‌های (5) تا (7) مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت طول به قطر، بخش‌های حقیقی و موهومی تابع امپدانس نوعی رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهند. بدین صورت که با افزایش نسبت طول به قطر، ضرایب سختی و میرایی به تناوب افزایش و کاهش می‌یابند. میزان افزایش یا کاهش و همچنین تعداد نوسانات بستگی به فرکانس تحریک دارد که در بخش بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. علت این رفتار نوسانی را می‌توان در اثر متقابل بخش‌های حقیقی و موهومی تابع امپدانس روی یکدیگر جستجو کرد. بدین شکل که با افزایش نسبت طول به قطر، از یک سو سختی شمع کاهش می‌یابد و از سوی دیگر ضریب میرایی، با توجه به تعداد نقاط لازم برای رسیدن به همگرایی، افزایش می‌یابد. نکته‌ی دیگر این است که با افزایش نسبت طول به قطر، همان‌گونه که انتظار می‌رود محل قرارگیری نقطه‌ی اوج تابع امپدانس به سمت تعداد المان‌های بیشتر حرکت می‌کند؛ یعنی برای دستیابی به تعادل بین سختی و میرایی تعداد المان‌های بیشتری مورد نیاز است. این موضوع سبب می‌شود که شیب شاخه‌ی صعودی منحنی تغییرات ضریب سختی با افزایش نسبت طول به قطر کاهش یابد.

### تغییرات تابع امپدانس بر حسب فرکانس بی‌بعد

اولین نکته‌ای که با بررسی نمودارهای رسم شده برای سطوح فرکانسی مختلف مشخص می‌شود این است که با افزایش فرکانس، تعداد المان‌های لازم برای دستیابی به

محدودیت‌های به کار گرفته شده در مدل مطالعه شود تا اعتبار جواب‌های به دست آمده در محدوده‌ی فرضیات ساده‌کننده مورد سوال قرار گیرد.

با کنترل روند همگرایی تابع امیدانس نتایج زیر به دست می‌آید:

- با افزایش تعداد المان‌ها، بخش موهومی تابع امیدانس یعنی ضریب میرایی، بصورت یکنواخت افزایش می‌یابد تا در نهایت به یک مقدار ثابت همگرا شود. این افزایش یکنواخت تا نقطه همگرایی در تغییرات ضریب سختی مشاهده نمی‌شود بلکه همگرایی آن با عبور از نقطه اوج امیدانس همراه است. دلیل این رفتار را می‌توان در اندرکنش سختی دینامیکی خاک و سختی سازه‌ی شمع جستجو کرد.

- هرچه نسبت طول به قطر شمع افزایش یابد، نوسانات تابع امیدانس بیشتر می‌شود به گونه‌ای که با افزایش این نسبت، شیب تغییرات ضرایب سختی و میرایی به تناوب افزایش و کاهش می‌یابد. اثر متقابل بخش‌های حقیقی و موهومی را می‌توان عامل این رفتار نوسانی دانست؛ بدین معنی که با افزایش نسبت طول به قطر از یک سو سختی شمع کاهش می‌یابد و از سوی دیگر ضریب میرایی با توجه به زیاد شدن تعداد نقاط لازم برای رسیدن به همگرایی افزایش می‌یابد.

- با افزایش فرکانس بی‌بعد، تعداد المان‌های لازم برای رسیدن به همگرایی افزایش می‌یابد. روند تغییرات امیدانس بر حسب فرکانس بی‌بعد بستگی به نسبت طول به قطر شمع و نوع مصالح اطراف شمع دارد. همچنین در فرکانس‌های بی‌بعد بالا، میزان و تعداد نوسانات تابع

امیدانس بیشتر می‌شود.

در این مطالعه، علاوه بر بررسی همگرایی و کنترل درستی نتایج، مقایسه‌ای بین تابع امیدانس مواد همسان و همسان جانبی صورت گرفته که جزئیات آن در مرجع [11] موجود است. با توجه به حجم زیاد مطالب و منحنی‌های بدست آمده، از بیان جزئیات مساله خودداری شده و تنها به ذکر نتایج آن اکتفا می‌شود. با مقایسه ضرایب سختی و میرایی شمعی که در محیط همسان قرار دارد با حالتی که در محیط همسان جانبی قرار دارد، نتایج زیر بدست می‌آید:

- روند کلی تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی تابع امیدانس، بر حسب فرکانس بی‌بعد، برای محیط همسان و ناهمسان یکسان است.

- در حالت ارتعاش قائم، اگر محیط همسان و ناهمسان دارای نسبت‌های سختی یکسان باشند، ضریب سختی برای محیط ناهمسان با نسبت ناهمسانی بزرگتر و کوچکتر از یک، به ترتیب کوچکتر و بزرگتر از ضریب سختی محیط همسان می‌باشد در حالی که ضریب میرایی در هر دو حالت بزرگتر از ضریب میرایی محیط همسان است.

- با افزایش فرکانس بی‌بعد، اختلاف ضرایب سختی محیط همسان و ناهمسان کاهش و اختلاف ضرایب میرایی آن‌ها افزایش می‌یابد. شرط مقایسه‌ی رفتار تابع امیدانس مواد همسان و ناهمسان این است که مدول برشی آن‌ها نزدیک به هم باشد.

## مراجع

- 1 - Aubry, D. and Clouteau, D. (1992). "A subdomain approach to dynamic soil-structure interaction." *Recent Advances in Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Ouest Editions/AFPS, Nantes, PP. 251-272.
- 2 - McClelland, B. and Focht, J. (1958). "Soil modulus for laterally loaded piles." *Transactions of the ASCE*, No. 123, PP. 1049-1086.
- 3 - Matlock, H. and Reese, L. (1960). "Generalized solutions for laterally loaded piles." *J. Soil Mechanics and Foundation Div., ASCE*, Vol. 86, No. 5, PP. 63-91.
- 4 - Poulos, H. G. and Davis, E. H. (1980). *Pile Foundation Analysis and Design*, John Wiley and Sons, New York.
- 5 - Berrones, R. and Whitman, R. V. (1982). "Seismic response of end-bearing piles." *J. Geotechnical Engineering, ASCE*, No. 108(GT4), PP. 554-569.
- 6 - Novak, M. (1974). "Dynamic stiffness and damping of piles." *J. Geotech*, Vol. 11, No. 4, PP. 574-598.

- 
- 7 - Kaynia, A. M. and Kausel, E. (1982). "Dynamic stiffness and seismic response of pile groups." *Rep. R82-03, Massachusetts Inst. Of Tecnology, Cambridge.*
  - 8 - Nogami, T., Konagai, K., Otani, J. and Chen H.L. (1992). "Nonlinear soil-pile interaction model for dynamic lateral motion." *J. Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 118, No. 1, PP. 106-116.
  - 9 - Novak, M. and Liu, W. (1994). "Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media", *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 23, PP. 1239-1257.
  - 10 - Noorzad, A. and Konagai K. (1994), "Effect of degree of saturation on the impedance of a rigid circular disk on a semi-infinite porous medium." *The 9th Japan Earthquake Engineering Symposium*, 3, PP. 289-294.
  - 11 - Mohammadi, K. (In Persian). (2005). "Study of dynamic response of piles embedded in transversely isotropic media under vertical and horizontal excitation by using radiation and finite elements ". *M. SC. Dissertation, Civil Eng. Faculty, School of Technical Faculties, Tehran University.*
  - 12 - Bycroft, G. N. (1956). "Forced vibration of a rigid circular plate on a semi infinite elastic space and on an elastic stratum." *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, Vol. 248, S. A, 248, PP. 327-368.
  - 13 - Yu, C.P. and Roesset, J.M. (2001). "Dynamic stiffness matrices for linear members with distributed mass." *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 4, No. 4, PP. 253-264.
  - 14 - Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic body*, Mir, Moscow.
  - 15 - Noorzad, A. and Ghadi, M. and Konagai, K. (2003), "Fundamental steady-state solution for the transversely isotropic half-space." *Iranian Journal of Eng.*, Vol. 16, No. 2, PP. 105-122.
-