

## حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایای دو بُعدی با استفاده از

### روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم

سرمد قادر<sup>۱\*</sup>، عباسعلی علی اکبری بیدختی<sup>۲</sup> و سعید فلاح<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>استادیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

<sup>۲</sup>استاد، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

<sup>۳</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۱۷/۶/۱۹، پذیرش نهایی: ۸۸/۷/۲)

#### چکیده

در این مقاله حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا که یکی از فرایندهای مهم دینامیکی در جو و اقیانوس است، در دو حالت یک بُعدی و دو بُعدی با استفاده از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم ارائه می شود. ابتدا به نحوه و چگونگی به دست آوردن روابط این روش اشاره می شود. سپس برای بررسی عملکرد این روش در مقایسه با روش های مرتبه دوم مرکزی، مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم از دو معادله مدل که دارای حل های تحلیلی هستند، استفاده می شود. نتایج، عملکرد دقیق تر روش فشرده مک کورمک را به ویژه هنگامی که میدان حل با ناپیوستگی همراه باشد، نشان می دهد. برای معادله مدل غیرخطی و برای میدان همراه با ناپیوستگی نتایج نشان می دهند که روش فشرده مرتبه چهارم مرکزی برای کنترل نوسانات اطراف ناپیوستگی، نیاز به استفاده از پالایه فشرده مکانی دارد، در صورتی که در روش فشرده مک کورمک جوابها با توجه به ماهیت دونقطه ای روش پیش گفته، با دقت بیشتر و بدون نیاز به استفاده از پالایه مکانی به دست می آیند. در ادامه نتایج مربوط به حل مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا برای شرایط اولیه همراه با ناپیوستگی و برای حالت های متفاوت آورده شده است. نتایج به دست آمده توانایی این روش را برای استفاده در مدل های پیش بینی عددی وضع هوا برای پدیده های جبهه ای نشان می دهند.

واژه های کلیدی: روش فشرده مک کورمک، دقت عددی، تنظیم راسبی غیرخطی

## Numerical solution of unsteady and non-linear Rossby adjustment problem using fourth-order compact MacCormack scheme

Ghader, S.<sup>1</sup>, Aliakbari-Bidokhti, A. A.<sup>2</sup> and Falahat, S.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup>Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>3</sup>M.Sc. Student of Geophysics, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 6 Sept 2008, Accepted: 13 Oct 2009)

#### Abstract

The compact finite difference schemes have been found to give simple ways of reaching the objectives of high accuracy and low computational cost. During the past two decades, the compact schemes have been used extensively for numerical simulation of various fluid dynamics problems. These methods have also been applied for numerical solution of some prototype geophysical fluid dynamics problems (e.g., shallow water equations). Most of the compact finite difference schemes are symmetric (usually with 3 or 5 point stencil) and finding each derivative requires a matrix inversion. However, by splitting the derivative operator of a central compact scheme into one-sided forward and backward

operators, a family of compact MacCormack-type schemes can be derived. While these classes of compact schemes are as accurate as the original central compact methods used to derive the one-sided forward and backward operators, they need less computational work per point. In addition, the one-sided nature of the method is an essential advantage of the method especially when severe gradients are present. These two features (i.e. high accuracy and low computational cost) makes the compact MacCormack-type scheme an attractive candidate for numerical models of the atmosphere and oceans.

This work focuses on the application of the fourth-order compact MacCormack-type scheme for numerical solution of the unsteady and non-linear Rossby adjustment problem (one and two dimensional cases). The second-order MacCormack method is also used for numerical solution of the equations. In the one-dimensional case, a single layer shallow water model is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem. The conservative form of the two-dimensional shallow water equations is used to study the unsteady and nonlinear Rossby adjustment problem in the two-dimensional case. For both cases, the time evolution of a fluid layer initially at rest with a discontinuity in the height field is considered for numerical simulations.

Examination of the accuracy and efficiency of the fourth-order compact MacCormack scheme for some analytical linear and nonlinear prototype problems, indicates the superiority of the fourth-order compact MacCormack scheme over the fourth-order centered compact, second-order centered and second-order MacCormack finite difference schemes especially in the presence of a discontinuity in numerical solution.

For the Rossby adjustment problem, results show a clear improvement of the numerical solution, in particular near the discontinuity generated by the fourth-order compact MacCormack scheme compared to the second-order MacCormack method. Moreover, the overhead computational cost of the fourth-order scheme over the second-order method is very low. It is also observed that to keep the numerical stability it is necessary to use a compact spatial filter with the fourth-order compact MacCormack-type scheme at each time step.

**Key words:** Compact MacCormack Scheme, Numerical Accuracy, Nonlinear Rossby Adjustment

## ۱ مقدمه

پدیده‌ای معمولاً ناپیوستگی در میدان جرم و یا تکانه در زمان شروع فرایند در نظر گرفته می‌شود و با شروع فرایند مراحل تکامل تنظیم راسبی به دو مرحله گذرا (Transient state) و پایا (Steady state) تقسیم می‌شود. با توجه به ماهیت خطی و مستقل از زمان معادلات حاکم بر مرحله پایا، در تحقیقات اولیه بیشتر بررسی‌های مربوط به مرحله پایا و یا به عبارت دیگر مرحله نهایی پدیده یاد شده، با توجه به پایستاری تاوایی پتانسیلی، بود. برای اینکه بتوان درک بهتری از پدیده تنظیم راسبی به دست آورد می‌بایست بخش گذرای فرایند پیش گفته را مورد بررسی

اغلب پدیده‌های بزرگ مقیاس جوئی و اقیانوسی بعد از یک ناپایداری و یا یک ناپیوستگی اولیه در میدان سرعت و یا تکانه که معمولاً با فرایند تبدیل انرژی پتانسیلی به جنبشی و تولید موج همراه است، تمایل دارند که در نهایت به صورت یک حالت راسبی پایا تنظیم شوند. به عبارت دیگر تنظیم راسبی (Rossby adjustment) یکی از ویژگی‌های برجسته پدیده‌های بزرگ مقیاس جوئی و اقیانوسی است (گیل ۱۹۸۲). از زمان راسبی تا کنون تحقیقات زیادی روی پدیده پیش گفته برای شناخت بهتر آن صورت گرفته است. برای بررسی نظری چنین

اصولی، از دو مسئله خطی و غیرخطی که دارای حل تحلیلی هستند برای سنجش توانایی و دقت روش در حل عددی معادلات همراه با ناپیوستگی در میدان حل، استفاده می‌شود. همچنین از روش مک کورمک مرتبه دوم برای گسسته‌سازی مکانی و ایجاد امکان مقایسه بهتر جواب‌ها استفاده می‌شود. در نهایت نیز نتایج حل عددی معادلات تنظیم راسی غیرخطی آورده می‌شوند.

## ۲ روش فشرده مک کورمک

### ۱-۲ فرمول‌بندی روش

جزئیات مربوط به نحوه به‌دست آوردن فرمول‌بندی روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم را هیکسون و ترکل (۲۰۰۰) و همچنین فلاحت (۱۳۸۷) به‌صورت مشروح ذکر کرده‌اند و در اینجا فقط فرمول‌بندی آن به‌صورت خلاصه ذکر می‌شود. شکل عمومی خانواده روش‌های فشرده برای برآورد مشتق مرتبه اول یک تابع دلخواه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$[B]\{D\} = \frac{1}{\Delta x}[C]\{f\} \quad (1)$$

که در آن  $\Delta x$  فاصله شبکه‌ای،  $D$  مشتق مکانی تابع  $f$  و  $[C]$  و  $[B]$  به‌ترتیب ماتریس‌های ضرایب برای تابع  $f$  و عملگر مشتق  $D$  هستند. حال برای رسیدن به روابط روش فشرده مک کورمک، عملگر ضمنی  $D$  به دو عملگر پیش‌رو و پس‌رو به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\{D\} = \frac{\{D^F\} + \{D^B\}}{2} \quad (2)$$

در این رابطه بالانویس‌های  $F$  و  $B$  به‌ترتیب نمایانگر عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو برای برآورد مشتق اول هستند. برای رسیدن به روش مرتبه چهارم عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو به‌صورت زیر به‌دست خواهند آمد:

$$a D_{i+1}^F + (1-a)D_i^F = \frac{1}{\Delta x}(f_{i+1} - f_i) \quad (3)$$

$$a D_{i-1}^B + (1-a)D_i^B = \frac{1}{\Delta x}(f_i - f_{i-1}) \quad (4)$$

بیشتری قرار داد. با توجه به ماهیت غیرخطی و وابسته به زمان معادلات حاکم بر مرحله گذرا و نبود حل تحلیلی برای این معادلات، برای شناخت این مرحله باید از روش‌های عددی استفاده کرد. برای حل عددی معادلات حاکم بر مرحله گذرا ابتدا می‌باید شکل اولیه ناپیوستگی در میدان جرم و یا تکانه تعیین شود و سپس با استفاده از یک روش عددی که توانایی شبیه‌سازی مناسب ناپیوستگی را دارد، جواب مناسب در زمان‌های متفاوت به‌دست آید.

در سال‌های اخیر گرایش به افزایش دقت در شبیه‌سازی‌های عددی شارش‌های جوئی و اقیانوسی با توجه به پیچیدگی ذاتی این شارش‌ها افزایش یافته است. روش‌های فشرده با توجه به کارایی مناسبی که در شبیه‌سازی عددی حرکت شاره‌ها در سایر شاخه‌های دینامیک شاره‌ها نشان داده‌اند، در تحقیقات اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند (اصفهانیان و همکاران ۲۰۰۵، محب‌الحجه و دریچل ۲۰۰۷). اغلب روش‌های فشرده از نوع مرکزی هستند و در واقع چنین روش‌هایی با توجه به ماهیت ذاتی موجود در آنها برای شبیه‌سازی میدان‌های شارش همراه با ناپیوستگی مناسب نیستند. بنابراین اگر در نظر باشد که میدان شارش همراه با ناپیوستگی، مانند مسئله تنظیم راسی انتخاب‌شده در تحقیق حاضر، با دقت و با استفاده از روش‌های تفاضل محدود فشرده شبیه‌سازی شود، می‌بایست از روشی استفاده کرد که در آن بتوان علاوه بر افزایش دقت، تعداد نقاط درگیر در فرمول‌بندی روش تفاضل محدود را به دو نقطه محدود ساخت.

در مقاله حاضر برای حل عددی مسئله تنظیم راسی غیرخطی ناپایا در دو حالت یک‌بُعدی و دو بُعدی از روش فشرده مک کورمک (Fourth order compact MacCormack scheme) مرتبه چهارم استفاده می‌شود. در ابتدا نحوه به‌دست آوردن روابط روش مورد نظر عرضه می‌شود و پس از آن پیش از اعمال روش به معادلات

$$u^* = u^n - \Delta t F(u^n) \Big| ^F, \quad (۶)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{2} (u^n + u^* - \Delta t F(u^*) \Big| ^B)$$

همان‌طور که از رابطه پیدا است، روش مک کورمک یک روش دومرحله‌ای است که در مرحله اول مقداری موقتی برای کمیت  $u$  پیش‌بینی می‌شود (یعنی  $u^*$ ) و در مرحله دوم مقدار کمیت  $u$  در زمان  $n+1$  به دست می‌آید. در رابطه (۶) بالانویس‌های  $F$  و  $B$  به ترتیب نمایانگر عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو برای برآورد مشتق مرتبه اول مکانی هستند. برخلاف روش مک کورمک مرتبه دوم که در آن عملگرهای پیش‌گفته از روش تفاضل متناهی سنتی دونقطه‌ای مرتبه اول یک‌سویه به دست می‌آیند، در روش فشرده مک کورمک عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو با استفاده از روابط (۳) و (۴) به دست می‌آیند.

### ۳ بررسی دقت

در این بخش به بررسی دقت روش فشرده مک کورمک در مقایسه با روش مک کورمک مرتبه دوم و روش مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم همراه با روش گسسته‌سازی زمانی لیب‌فراگ پرداخته می‌شود. از روش‌های یاد شده برای حل دو معادله مدل یک‌بعدی فرارفت خطی و برگرز ناوشکسان که دارای حل تحلیلی هستند، استفاده می‌شود. برای آنکه بتوان درک مناسب‌تری از میزان تفاوت دقت بین روش‌های مورد بررسی به دست آورد، در اینجا از یک نُرُم برای محاسبه میزان خطای هر یک از روش‌ها استفاده می‌شود. از بین نُرُم‌های متعددی که می‌توان تعریف کرد، در تحقیق حاضر از نُرُم زیر استفاده شده است:

که  $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$  است. در واقع جمع این دو عملگر، عبارتی با دقتی از مرتبه چهارم است. این مطلب فرق اساسی روش فشرده مک کورمک با روش مک کورمک مرتبه دوم را که در آن حاصل جمع دو عملگر پیش‌رو و پس‌رو عبارتی با دقتی از مرتبه دوم است، روشن می‌سازد. اگر دو رابطه بالا بر نقاط داخلی یک شبکه یکنواخت اعمال شوند، دستگاه معادلات جبری حاصل شامل ماتریس‌های دوقطری است که برای حل آنها می‌باید از عمل جای‌گذاری پیش‌رو برای عملگر و پس‌رو و جای‌گذاری پس‌رو برای عملگر پیش‌رو استفاده کرد. ذکر این نکته در اینجا ضروری است که برای عمل جای‌گذاری که در بالا به آن اشاره شد، دانستن مقادیر عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو در مرزها لازم است. مقادیر عملگرهای مورد نظر در مرزها با استفاده از روش صریح پنج‌نقطه‌ای یک‌سویه به دست می‌آید. در این روش مقادیر عملگرها در مرزها با دقتی از مرتبه‌ای برابر با عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو نقاط داخلی تقریب زده می‌شود (هیکسون و ترکل ۲۰۰۰، فلاحت ۱۳۸۷).

### ۲-۲ پیمایش زمانی

برای پیمایش زمانی از روش مک کورمک استفاده می‌شود (هیکسون و ترکل ۲۰۰۰). صورت کلی شکل پایستار معادلات را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u) = 0 \quad (۵)$$

در رابطه بالا  $u$  متغیر پیشیابی و  $F$  تابعی از  $u$  بوده و بسته به اینکه مسئله یک‌بعدی، دو‌بعدی و یا سه‌بعدی باشد، شامل مشتق اول تابع در راستای محورهای مختصات خواهد بود. بنابراین شکل گسسته معادله بالا در زمان با استفاده از روش مک کورمک به صورت زیر به دست می‌آید:

مرتبه دوم مرکزی و مک کورمک مرتبه دوم و همچنین روش‌های فشرده مرتبه چهارم و فشرده مک کورمک مرتبه چهارم به یکدیگر نزدیک هستند. در واقع چنین نتیجه‌ای به این دلیل است که روش‌های مرکزی و دونقطه‌ای مک کورمک هم‌مرتبه در حالتی که میدان حل، فاقد ناپیوستگی باشد، مشابه عمل می‌کنند. چراکه در واقع مجموع دو عملگر پیش‌بینی و تصحیح در روش مک کورمک یک عملگر مرکزی را نتیجه می‌دهد.

$$I_2(u) = \frac{\left\{ I(|\tilde{u}_m - u_m|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ I(|u_m|^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

$$I(u) = \sum_{m=1}^N u_m$$

که در آن  $N$  تعداد نقاط،  $u$  مقدار دقیق تابع مورد بررسی و  $\tilde{u}$  مقدار به دست آمده از روش عددی است.

### ۲-۳ معادله برگرز ناوشکسان

دومین معادله انتخاب شده معادله غیرخطی برگرز (Burgers) ناوشکسان به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

معادله بالا را در شکل پایستار خود می‌توان به صورت

زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F = \frac{u^2}{2} \quad (10)$$

در اینجا از دو شرط اولیه که برای هر کدام جواب تحلیلی وجود دارد (پینچور و روبینستین ۲۰۰۵) برای حل معادله برگرز استفاده شده است. اولین شرط اولیه به صورت یک ناپیوستگی و یا به عبارت دیگر یک شوک است. برای حل عددی از یک شبکه یکنواخت که محدوده تغییرات  $x$  در آن  $0 \leq x \leq 30$  و شرایط مرزی حاکم بر آن دیریکله است، استفاده شده است.

### ۱-۳ معادله فرارفت

اولین معادله انتخاب شده برای بررسی دقت روش‌های متفاوت، معادله فرارفت با ضریب ثابت  $C=1$  است که با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

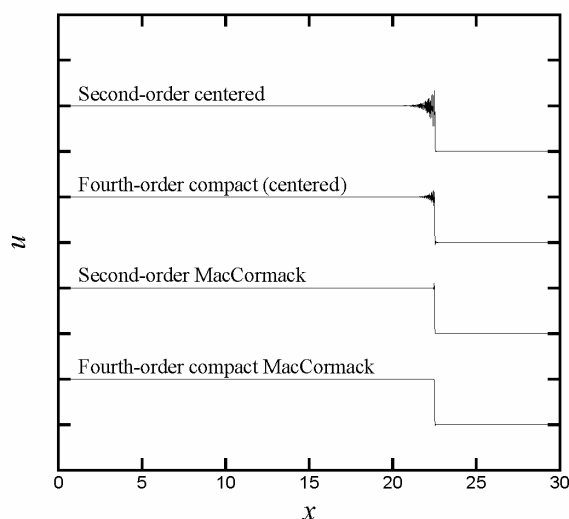
برای حل عددی معادله بالا از شرایط اولیه و مرزی که با هیکسون و ترکل بیان کرده‌اند، استفاده می‌شود. در حل عددی از یک شبکه یکنواخت که محدوده تغییرات  $x$  در آن  $-20 \leq x \leq 450$  است، با تعداد نقاط  $n_p = 471$  استفاده شده است. جدول ۱ خطای کلی به دست آمده به کمک نرم  $I_2$  را برای روش‌های متفاوت در زمان  $t = 400$  s برای روش‌های متفاوت نشان می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم نسبت به سایر روش‌ها دقیق‌تر عمل می‌کند. البته می‌توان مشاهده کرد که خطای روش

جدول ۱. مقایسه خطای کلی محاسبه شده به کمک نرم  $I_2$  برای روش‌های متفاوت برای معادله فرارفت با ضریب ثابت در زمان  $t = 400$  s.

روش	گسسته‌سازی زمانی	تفکیک ( $n_p$ )	خطای کلی
مرتبه دوم مرکزی	لیپ فراگ	471	$8.8382 \times 10^{-1}$
فشرده مرتبه چهارم	لیپ فراگ	471	$1.4474 \times 10^{-1}$
مرتبه دوم	مک کورمک	471	$8.9547 \times 10^{-1}$
فشرده مرتبه چهارم	مک کورمک	471	$9.2106 \times 10^{-2}$

برای اینکه درک بهتری از توانایی روش‌های عددی در تفکیک شوک حاصل آید، در شکل ۱ میدان تحول یافته  $u$  در زمان  $t = 15$  s نشان داده شده است در شکل نوسانات حول ناحیه ناپیوستگی در حل به دست آمده از روش‌های مرکزی کاملاً مشهود است. شکل به خوبی توانایی بسیار مناسب روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم را برای تفکیک مناسب میدان حل نشان می‌دهد. نکته قابل توجه دیگر در شکل این است که روش‌های مک کورمک به دلیل ماهیت دونقطه‌ای خود از عملکرد بسیار بهتری در تفکیک شوک برخوردارند. جدول ۲ خطا را برای این شرایط اولیه نشان می‌دهد. این جدول نیز عملکرد دقیق‌تر روش‌های مک کورمک را تایید می‌کند.

از بین تفکیک‌های مناسب برای حل عددی معادله فوق از تفکیک  $n_g = 1601$  برای همه روش‌ها استفاده شده است. در بین روش‌های عددی، روش‌های مرکزی به دلیل اینکه تعداد نقاط درگیر در این روش‌ها بیشتر از دو نقطه است، هنگام شبیه‌سازی برای تفکیک شوک ضعیف عمل می‌کنند. به همین دلیل و با توجه به ماهیت غیرخطی معادله مورد بررسی، برای جلوگیری از خطای ناشی از اندر کنش بخش غیرخطی معادله از یک پالایه مکانی فشرده مرتبه چهارم که لی لی (۱۹۹۲) معرفی کرده است، برای حذف طول موج‌های کوچک‌تر از دو برابر فاصله شبکه‌ای برای روش‌های مرتبه دوم مرکزی و فشرده مرتبه چهارم (مرکزی) استفاده شده است.



شکل ۱. جواب معادله برگرز ناوشکسان با شرط اولیه شوک در زمان  $t = 15$  s برای روش‌های متفاوت.

جدول ۲. مقایسه خطای کلی محاسبه شده به کمک نرم  $L_2$  برای روش‌های متفاوت برای معادله برگرز ناوشکسان با شرط اولیه شوک در زمان  $t = 15$  s.

روش	گسسته‌سازی زمانی	تفکیک ( $n_g$ )	خطای کلی
مرتبه دوم مرکزی	بیم و ورمینگ	1601	$1.8805 \times 10^{-2}$
فشرده مرتبه چهارم	بیم و ورمینگ	1601	$6.8833 \times 10^{-3}$
مرتبه دوم مرکزی	لکس و ندرروف	1601	$1.0427 \times 10^{-2}$
فشرده مرتبه چهارم	لکس و ندرروف	1601	$6.7052 \times 10^{-3}$
مرتبه دوم مرکزی	لیپ فراگ	1601	$3.0344 \times 10^{-2}$
فشرده مرتبه چهارم	لیپ فراگ	1601	$9.1902 \times 10^{-3}$
مرتبه دوم	مک کورمک	1601	$1.0017 \times 10^{-2}$
فشرده مرتبه چهارم	مک کورمک	1601	$2.0850 \times 10^{-3}$

غیرخطی که پیچیدگی زیادی ندارند، تا حد مناسبی اندرکنش‌های غیرخطی را کنترل کند.

جدول ۴ مقایسه زمان محاسبات برای روش‌های متفاوت در حل عددی معادله برگرز با شرایط اولیه چندجمله‌ای درجه اول برای یک تحول زمانی به مدت 30 s را نشان می‌دهد. از این جدول مشخص است که روش فشرده مک کورمک دارای زمان محاسباتی کمتری نسبت به سایر روش‌های فشرده است و این بدین علت است که در روش فشرده مک کورمک برخلاف عمل وارون کردن ماتریس‌های سه قطری در روش فشرده معمولی از عمل وارون کردن ماتریس‌های دو قطری استفاده می‌شود که این عمل در زمان محاسبات تاثیر زیادی دارد. بنابراین روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم علاوه بر دقت زیاد زمان محاسباتی کمی نیز دارد.

در ادامه دومین شرایط اولیه انتخاب شده یعنی چندجمله‌ای درجه اول و یا به عبارت دیگر معادله خط راست بررسی می‌شود. در این مورد نیز حل عددی در یک شبکه یکنواخت که محدوده تغییرات  $x$  در آن  $0 \leq x \leq 45$  است، و با تفکیک  $n_g = 1601$  صورت گرفته است. جدول ۳ خطای کلی حاصل از حل عددی روش‌های گوناگون را برای شرایط اولیه پیش گفته در زمان  $t = 30$  s نشان می‌دهد. این جدول عملکرد بهتر روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم را نشان می‌دهد و البته در این حالت به علت آنکه در میدان حل ناپیوستگی وجود ندارد، روش فشرده مرتبه چهارم نیز از دقت خوبی برخوردار است. ذکر این نکته ضروری است که از هیچ‌گونه پالایه‌ای در حل عددی معادله برگرز به کمک روش مک کورمک استفاده نشده است و میرایی ذاتی موجود در این روش می‌تواند در حل آن دسته از مسائل

جدول ۳. مقایسه خطای کلی محاسبه شده به کمک نرم  $I_2$  برای روش‌های متفاوت برای معادله برگرز ناوشکسان با شرط اولیه چندجمله‌ای درجه اول در زمان  $t = 30$  s

روش	گسسته‌سازی زمانی	تفکیک ( $n_g$ )	خطای کلی
مرتبه دوم مرکزی	بیم و ورمینگ	1601	$2.3569 \times 10^{-4}$
فشرده مرتبه چهارم	بیم و ورمینگ	1601	$5.4642 \times 10^{-5}$
مرتبه دوم مرکزی	لکس وندروف	1601	$2.0681 \times 10^{-4}$
فشرده مرتبه چهارم	لکس وندروف	1601	$1.0831 \times 10^{-4}$
مرتبه دوم مرکزی	لیپ فراگ	1601	$2.1832 \times 10^{-4}$
فشرده مرتبه چهارم	لیپ فراگ	1601	$1.1453 \times 10^{-4}$
مرتبه دوم	مک کورمک	1601	$2.0715 \times 10^{-4}$
فشرده مرتبه چهارم	مک کورمک	1601	$8.2419 \times 10^{-5}$

جدول ۴. زمان CPU برای محاسبات برحسب ثانیه برای روش‌های متفاوت و برای معادله برگرز ناوشکسان با شرط اولیه چندجمله‌ای درجه اول برای یک تحوّل زمانی به مدت  $t = 30$  s.

روش	گسسته‌سازی زمانی	تفکیک ( $n_g$ )	زمان (ثانیه)
مرتبۀ دوم مرکزی	بیم و ورمینگ	1601	8.1.09
فشرده مرتبۀ چهارم	بیم و ورمینگ	1601	102.484
مرتبۀ دوم مرکزی	لکس وندروف	1601	7.406
فشرده مرتبۀ چهارم	لکس وندروف	1601	56.172
مرتبۀ دوم مرکزی	لیپ فراگ	1601	4.531
فشرده مرتبۀ چهارم	لیپ فراگ	1601	28.281
مرتبۀ دوم	مک‌کورمک	1601	6.407
فشرده مرتبۀ چهارم	مک‌کورمک	1601	9.359

با توابع زیر بیان می‌شوند (کوو و پولوانی، ۱۹۹۷):

$$u(x, t=0) = 0, \quad v(x, t=0) = 0$$

$$h(x, t=0) = \begin{cases} H + \eta_0 & x < 0 \\ H - \eta_0 & x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن  $H$  ارتفاع میانگین لایه در زمان  $t=0$  و  $\eta_0$  انحراف از این میانگین است. به دلیل اینکه شرایط اولیه مستقل از  $y$  است، در معادلات حاکم ( $u, v, h$ ) مستقل از  $y$  برای همهٔ زمان‌ها یعنی  $t > 0$  در نظر گرفته می‌شوند. برای اینکه درک بهتری از ماهیت خطی و غیرخطی بودن معادله حاکم و گذر بین این دو حالت که وابسته به شرط اولیه است، حاصل شود، معادلات حاکم با استفاده از کمیت‌های زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\eta = \eta_0 \eta',$$

$$u = \frac{\eta_0}{H} \sqrt{gHu'} \quad (13)$$

$$v = \frac{\eta_0}{H} \sqrt{gHv'}$$

$$x = \frac{Lx'}{L}$$

$$t = \left( \frac{L}{\sqrt{gH}} \right) t'$$

با چنین کاری، معادلات (۱۱) بعد از حذف علامت

#### ۴ مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بُعد

حال با توجه به تجربه‌ای که از آزمایش‌های عددی با معادلات مدل به‌دست آمده، به حل مسئله تنظیم راسبی غیرخطی و ناپایای یک‌بعدی همراه با ناپیوستگی در میدان حل پرداخته می‌شود. معادلاتی که برای بررسی نظری پدیده تنظیم راسبی مورد استفاده قرار می‌گیرند به صورت زیر هستند (کوو و پولوانی ۱۹۹۷):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - fv = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + fu = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0$$

در معادلات بالا  $u$  و  $v$  به ترتیب نشان‌دهنده مولفه‌های سرعت در دو راستای  $x$  و  $y$  هستند.  $t$  بیان‌کننده زمان،  $h$  عمق شاره،  $f = 2\Omega$  پارامتر کوریولیس است که در آن  $\Omega$  سرعت زاویه‌ای شاره چرخان و  $g$  نیز شتاب گرانی (جاذبه) است. شرایط اولیه‌ای که برای بررسی در نظر گرفته می‌شود، یک ناپیوستگی در میدان ارتفاع شاره در حال سکون است، که



پرایم از متغیرها، تبدیل به روابط زیر می شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \varepsilon v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varepsilon u &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

در این معادلات پارامترهای بی بُعد مورد استفاده به صورت زیر هستند:

$$\alpha = \frac{\eta_0}{H}, \quad \varepsilon = \frac{fL}{\sqrt{gH}} = \frac{L}{\sqrt{gH}/f} = \frac{L}{L_D} = Bu^{-1/2} \quad (15)$$

از دو پارامتری که در بالا تعریف شد، اولی یعنی  $\alpha$  ماهیت خطی و غیرخطی بودن و دومی یعنی  $\varepsilon$  اثر چرخان بودن شاره را در مسئله کنترل می کند. در رابطه بالا عدد بی بُعد  $Bu$  نشان دهنده نسبت شعاع تغییر شکل راسبی ( $L_D$ ) به مقیاس طول افقی مشخصه شارش شاره چرخان است. محدوده تغییرات  $\alpha$  بین صفر و یک در نظر گرفته می شود و همچنین مقادیر صفر و یا یک برای  $\varepsilon$  انتخاب می شود که مقدار صفر معادل با حالت ناچرخان و مقدار یک معادل با حالت چرخان سامانه است. در معادله (۱۴) اگر  $\alpha$  به سمت صفر میل کند مسئله، ماهیت خود را به حالت کاملاً خطی تغییر می دهد و همچنین اگر مقدار یک برای  $\alpha$  انتخاب شود فیزیک مسئله به حالت غیرخطی تغییر پیدا می کند. برای حل عددی مسئله، با استفاده از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم، می باید معادلات (۱۱) را در شکل پایستار مورد استفاده قرار داد.

#### ۴-۱ نتایج حل عددی

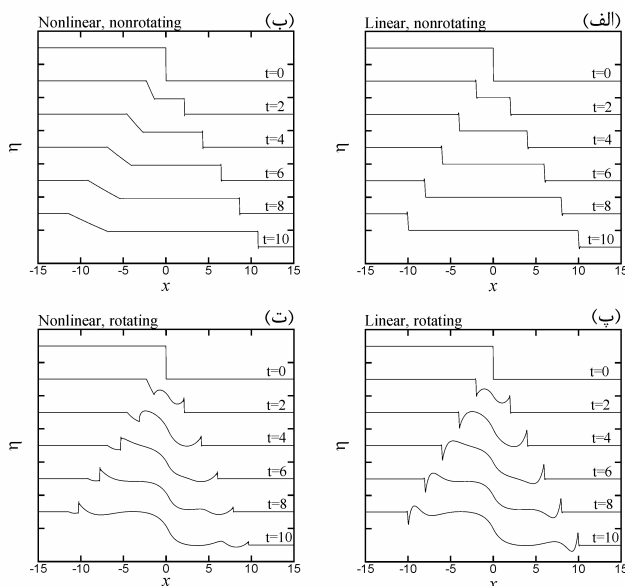
شبکه انتخاب شده برای حل عددی مسئله پیش گفته شبکه ای یکنواخت با تفکیک مناسب  $n_g = 1601$  است

که مکان بی بُعد شده آن در بازه  $-15 \leq x \leq 15$  قرار دارد. مسئله در چهار حالت خطی و غیر چرخان، غیرخطی و غیر چرخان، خطی و چرخان و در نهایت غیرخطی و چرخان مورد بررسی قرار می گیرد. در حالتی که شاره غیر چرخان است پارامتر  $\varepsilon$  برابر با صفر در نظر گرفته می شود. در این حالت با انتخاب مقدار  $\alpha$  برابر با عددی بسیار نزدیک به صفر مسئله تبدیل به حالت خطی، غیر چرخان می شود. نتایج حل عددی مربوط به این حالت در شکل ۲(الف) آورده شده است. در مرحله بعدی مقدار  $\alpha = 0.3$  قرار داده می شود و با این انتخاب مسئله به حالت غیرخطی و غیر چرخان تبدیل می شود. شکل ۲(ب) نتایج حاصل از این حالت را نشان می دهد. در مرحله بعدی  $\alpha = 1$  و  $\varepsilon = 1$  مقدار نزدیک به صفر در نظر گرفته می شود. دو انتخاب مورد نظر، مسئله را به حالت خطی و چرخان تبدیل می کند. نتایج حل عددی برای این حالت در شکل ۲(پ) آورده شده است. در آخرین انتخاب  $\alpha = 1$  و  $\varepsilon = 0.3$  در نظر گرفته می شوند که این انتخاب مسئله را به حالت غیرخطی و چرخان تبدیل می کند. شکل ۲(ت) مربوط به این حالت است. با توجه به اینکه معادلات مسئله تنظیم راسبی فاقد حل تحلیلی هستند، برای مقایسه نتایج کوو و پولوانی (۱۹۹۷) برای این حالت ها در شکل ۳ نمایش داده شده است. مقایسه کیفی صحت و دقت مناسب جواب های به دست آمده توسط روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم را نشان می دهد. مشاهده می شود که در همه حالت ها ناپیوستگی موجود در میدان حل به خوبی با روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم شبیه سازی شده است.

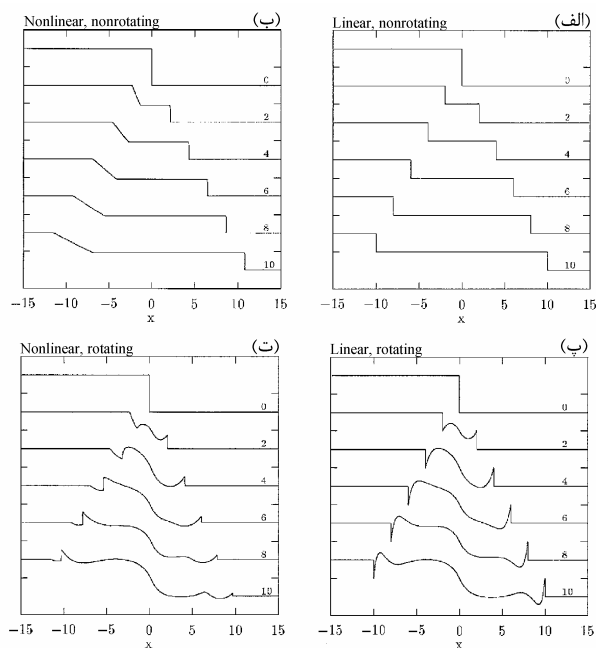
در تحقیقات بعدی اثر غیرخطی که با پارامتر  $\alpha$  کنترل می شود، مورد بررسی قرار می گیرد. در این بررسی مقدار  $\varepsilon$  در همه آزمایش های عددی برابر با یک در نظر گرفته شده است و برای بررسی اثر پارامتر کنترل کننده میزان غیرخطی بودن مسئله از مقادیر  $\alpha = 0.1$ ،  $\alpha = 0.4$  و

تحول زمانی میدان ارتفاع را برای سه مقدار متفاوت  $\alpha$  نشان می‌دهد. شکل ۵ نیز جواب کوو و پولوانی (۱۹۹۷) را نشان می‌دهد. در این حالت نیز علی‌رغم استفاده از پالایه، مقایسه کیفی، نشان از دقت مناسب جواب‌های به‌دست آمده دارد.

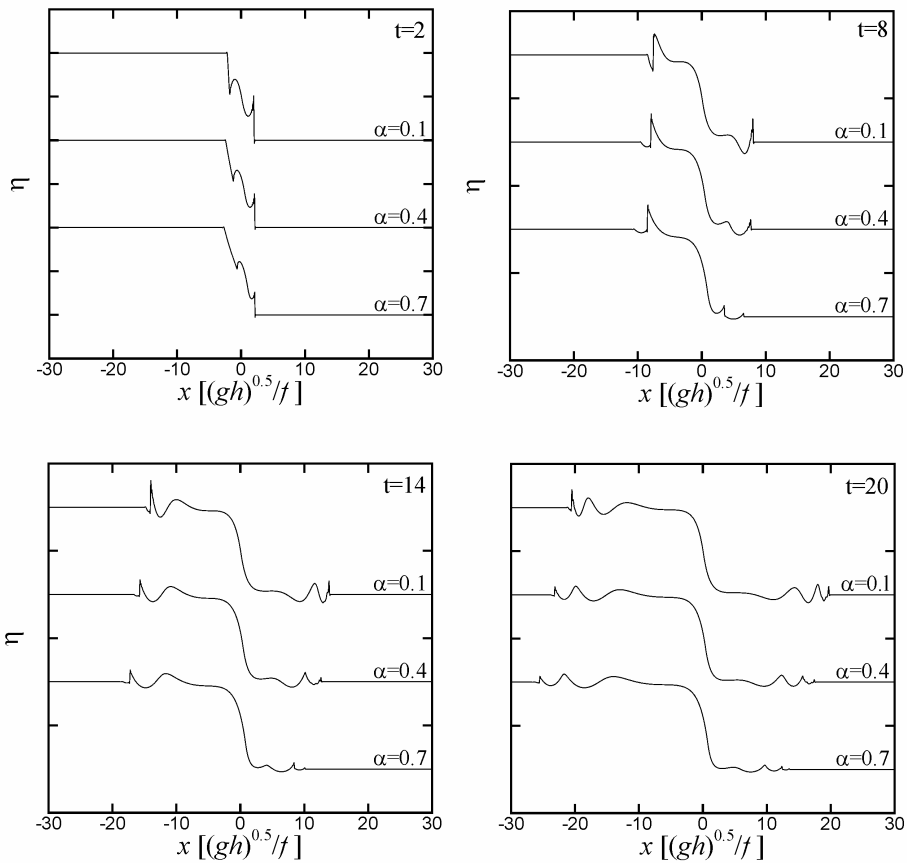
$\alpha = 0.7$  استفاده شده است. با افزایش  $\alpha$  اندرکنش‌های غیرخطی در معادلات افزایش می‌یابند. هنگام استفاده از  $\alpha = 0.7$  و یا مقادیر بزرگ‌تر برای کنترل اندرکنش‌های غیرخطی و جلوگیری از ناپایداری حل عددی از یک پالایه فشرده مکانی مرتبه ششم استفاده شده است. شکل ۴



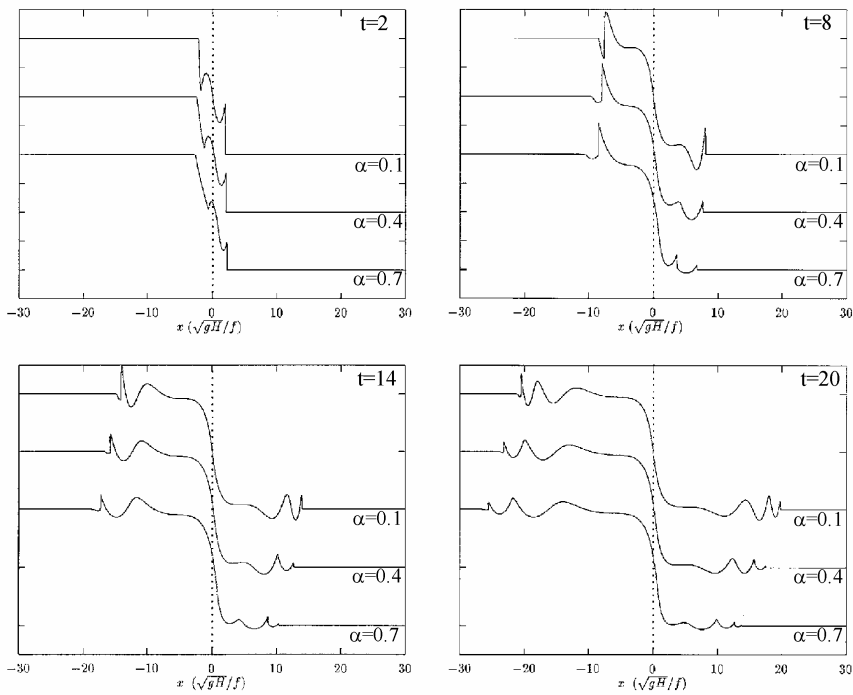
شکل ۲. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک‌بعدی حاصل از روش فشرده مک‌کورمک مرتبه چهارم برحسب مکان برای زمان‌های متفاوت (الف) حالت خطی و غیرچرخان (ب) حالت غیرخطی و غیرچرخان (پ) حالت خطی و چرخان (ت) حالت غیرخطی و چرخان.



شکل ۳. نتایج عرضه شده کوو و پولوانی (۱۹۹۷)، برای میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی حالت‌ها مشابه شکل ۲ است.



شکل ۴. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی یک بعدی حاصل از روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم در زمان های متفاوت به ازای  $\alpha$  های متفاوت.



شکل ۵: نتایج عرضه شده کوو و پولوانی (۱۹۹۷) برای  $\alpha$  های متفاوت.

میدان ارتفاع یک شاره در حال سکون در نظر گرفته

می‌شود. شرایط اولیه یاد شده، با توابع زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} u(x, y, t=0) &= 0 \\ v(x, y, t=0) &= 0 \\ h(x, y, t=0) &= \begin{cases} D & y < 0 \\ \frac{D}{2} & y > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

در این قسمت برای اینکه درک بهتری از مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان حاصل شود، رابطه (۱۶) با کمیت‌های زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\begin{aligned} d &= \frac{h}{D}, \quad x' = \frac{x}{\sqrt{gD}}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{t}{\frac{L}{\sqrt{gD}}}, \\ u' &= \frac{u}{\delta\sqrt{gD}}, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{gD}} \end{aligned} \quad (18)$$

که در رابطه بالا پارامتر بی‌بعد  $\delta$  برابر با عبارت زیر است:

$$\delta = \frac{\sqrt{gD}}{fL} = Bu^{1/2} \quad (19)$$

پارامتر  $\delta$  در واقع از دیدگاه فیزیکی نسبت شعاع تغییر شکل راسبی (Rossby radius of deformation) به مقیاس طول  $L$  در راستای محور  $y$  است. با جای گذاری کمیت‌های بی‌بعد ذکر شده در بالا در رابطه (۱۶) و بعد از حذف علامت پریم از کمیت‌های بی‌بعد، رابطه به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v &= -\frac{\partial d}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u &= -\frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial d}{\partial t} + u \frac{\partial d}{\partial x} + v \frac{\partial d}{\partial y} + d \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

در ادامه همچنین رابطه (۱۷) و یا به عبارت دیگر شرایط اولیه حاکم بر مسئله در شکل بی‌بعد خود به صورت زیر نوشته می‌شود:

۵ مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی در یک کانال

چرخان

در بخش قبل حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک بُعد مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به عملکرد خوب روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در حل عددی مسئله تنظیم راسبی یک بُعدی، در اینجا این مسئله به دو بُعد تعمیم داده می‌شود و عملکرد روش در این حالت نیز با نتایج کار سایر محققان مقایسه می‌شود. معادلات انتخاب شده برای مسئله تنظیم راسبی دو بُعدی به صورت زیر هستند (هلفریش و همکاران، ۱۹۹۹):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

روابط عرضه شده در معادله (۱۶) معادلات آب کم عمق دو بُعدی هستند که برای بررسی عددی و تحلیل فیزیکی پدیده تنظیم راسبی در دو بعد از سوی هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) در نظر گرفته شده‌اند. رابطه (۱۶) به ترتیب از معادله تکانه در راستای محور  $x$ ، معادله تکانه در راستای محور  $y$  و معادله پیوستگی تشکیل شده است. مدلی که در این تحقیق استفاده شده است عبارت از یک شاره تراکم ناپذیر، همگن و ناوشکسان است که در یک کانال چرخان با سطح مقطع مستطیلی محدود می‌شود. سطح زیرین این کانال مسطح و سطح بالایی آن آزاد است و تنها دیواره‌های این کانال چرخان در راستای محور  $x$  در مسئله تنظیم راسبی غیرخطی سخت در نظر گرفته می‌شود که باعث می‌شود که سرعت عمود بر آن دیواره‌ها یعنی  $u$  همواره صفر در نظر گرفته شود. شرایط اولیه انتخاب شده برای مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در کانال چرخان همانند شرایط اولیه انتخاب شده برای مسئله تنظیم راسبی یک بُعدی به صورت یک ناپیوستگی در

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{U}_{i,j}^n + \mathbf{U}_{i,j}^* - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial x} \right|_{i,j}^B - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial y} \right|_{i,j}^F + \Delta t \mathbf{R}_{i,j}^* \right] \quad (25)$$

همان گونه که در رابطه (۲۴) مربوط به مرحله پیش گو روش مک کورمک مشاهده می شود، برای برآورد مشتق مرتبه اول متغیرهای برداری  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{F}$  به ترتیب از عملگرهای پیش رو و پس رو استفاده شده است و در مقابل برخلاف مرحله پیش گو در مرحله مصحح برای برآورد مشتق متغیرهای برداری  $\mathbf{E}^*$  و  $\mathbf{F}^*$  به ترتیب از عملگرهای پیش رو و پس رو استفاده شده است. چنین ترکیب جایگشتی از عملگرها که بدان اشاره شد، با نماد  $\text{FB}/\text{BF}$  نام گذاری می شوند. در عمل بهتر است که در هنگام حل عددی علاوه بر جایگشت  $\text{FB}/\text{BF}$  از جایگشت های  $\text{BF}/\text{FB}$ ،  $\text{FF}/\text{BB}$  و  $\text{BB}/\text{FF}$  برای گام های زمانی متوالی استفاده شود که این نکته در هنگام حل عددی معادلات حاکم بر تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی در تحقیق حاضر رعایت شده است (فلاح ۱۳۸۷).

با توجه به اینکه در هنگام انتگرال گیری شکل اولیری معادلات حاکم بر شار ناپایداری غیرخطی به دلیل خطای دگرنامیدن ناشی از اندرکنش های غیرخطی به وجود می آید، می بایست این ناپایداری غیرخطی به وجود آمده با استفاده یک ابزار مناسب عددی کنترل شود. یکی از این ابزارها، استفاده از پالایه است که در حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی یک بُعدی به آن اشاره شد. یکی از روش های مناسب دیگر استفاده از ائتلاف مصنوعی است که در تحقیق حاضر برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی در حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی از آن استفاده شده است.

اگرچه طرحواره مک کورمک دارای یک میرایی ذاتی است و این میرایی می تواند بخشی از اندرکنش های

$$\begin{aligned} u(x, y, t=0) &= 0 \\ v(x, y, t=0) &= 0 \\ d(x, y, t=0) &= \begin{cases} 1 & y < 0 \\ \frac{1}{2} & y > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

در تحقیق حاضر مشابه با کار هلفریش و همکاران (۱۹۹۹)، برای حل عددی رابطه (۲۰) با شرایط اولیه موجود در رابطه (۲۱) پارامتر  $\delta$  برابر با مقدار ۱ در نظر گرفته شده است. برای حل عددی رابطه بالا به کمک روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم، می بایست از شکل پایستار معادله (۲۰) استفاده کرد. شکل پایستار معادلات پیش گفته را می توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \mathbf{R} \quad (22)$$

که در آن بردارهای  $\mathbf{U}$ ،  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{R}$  برابر با عبارات زیرند:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (ud, vd, d)^T, \\ \mathbf{E} &= (u^2 d + \frac{1}{2} d^2, uvd, ud)^T \\ \mathbf{F} &= (uvd, v^2 d + \frac{1}{2} d^2, vd)^T, \\ \mathbf{R} &= (vd, -ud, 0)^T \end{aligned} \quad (23)$$

که در رابطه بالا  $T$  معرف ترانهاده یک ماتریس است. اگر از روش مک کورمک برای حل عددی رابطه (۲۲) استفاده شود، شکل گسسته رابطه فوق از دو مرحله پیش گو و مصحح به صورت زیر تشکیل خواهد شد:

مرحله پیشگو:

$$\mathbf{U}_{i,j}^* = \mathbf{U}_{i,j}^n - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial x} \right|_{i,j}^F - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial y} \right|_{i,j}^B + \Delta t \mathbf{R}_{i,j}^n \quad (24)$$

مرحله مصحح:

غیرخطی را کنترل کند، با وجود این با توجه به پیچیدگی میدان شاره در تنظیم راسبی دو بُعدی استفاده از عبارات اتلافی برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی لازم و ضروری است. جمله اتلافی که در تحقیق حاضر برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی با استفاده از روش مک کورمک به کار گرفته شده است، با متغیر برداری زیر نمایش داده می شود:

غیرخطی را کنترل کند، با وجود این با توجه به پیچیدگی میدان شاره در تنظیم راسبی دو بُعدی استفاده از عبارات اتلافی برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی لازم و ضروری است. جمله اتلافی که در تحقیق حاضر برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی با استفاده از روش مک کورمک به کار گرفته شده است، با متغیر برداری زیر نمایش داده می شود:

$$\mathbf{D} = (\nu \nabla \cdot d\nabla u, \nu \nabla \cdot d\nabla v, 0)^T \quad (26)$$

$$u\left(\frac{w}{2}, y, t=0\right) = 0, \quad u\left(-\frac{w}{2}, y, t=0\right) = 0 \quad (27)$$

به دلیل اینکه در تحقیق حاضر از قید ناوشکسان در حل معادلات حاکم استفاده می شود، لازم است که شرط لغزش آزاد (Free slip) برای مولفه افقی سرعت در راستای محور  $y$  یعنی  $v$  در مرزهای سمت چپ و سمت راست محور  $x$  در نظر گرفته شود. شرط لغزش آزاد در دو مرز یاد شده با روابط زیر بیان می شود:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x=-w/2)} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x=w/2)} = 0 \quad (28)$$

در راستای محور  $y$  نیز از شرط مرزی گرادین شار صفر (Zero flux gradient) استفاده شده است که این شرط برای مرز بالا ( $j=N$ ) و مرز پایین ( $j=1$ ) در راستای محور  $y$  با روابط زیر بیان می شود:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right|_{y=L/2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right|_{y=-L/2} = 0 \quad (29)$$

در حالتی که طول کانال برابر با مقدار  $w=0.5$  است، از یک تفکیک مناسب  $51 \times 5001$  در حل عددی استفاده شده است. تفکیک متناظر با یک شبکه یکنواخت در دو راستای محور  $x$  و  $y$  است و فواصل شبکه ای در چنین حالتی در راستای محورهای مختصات، هر دو برابر با مقدار  $0.01$  است. گام زمانی انتخاب شده در این حالت با توجه شرط پایداری خطی که در بخش پیوست مطالب مربوط به آن آمده است، برابر با مقدار  $\Delta t = 0.001$  است. برای کنترل ناپایداری غیرخطی ناشی از اندرکنش های غیرخطی پارامتر  $\nu$  در رابطه (۲۶) برابر با مقدار  $0.005$  در نظر گرفته شده است.

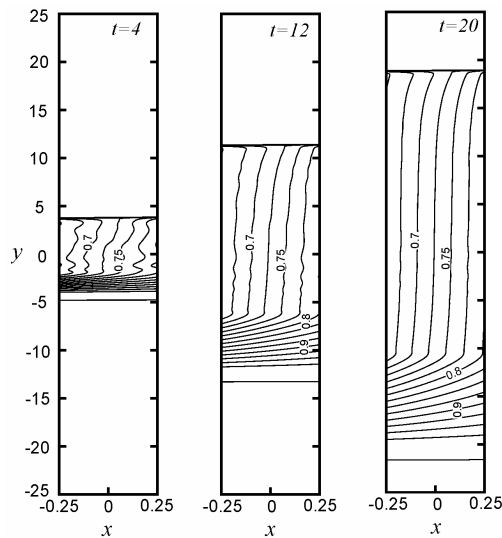
که در آن  $\nu$  پارامتری است که با آزمایش عددی به دست می آید و همچنین مقدار آن به تفکیک انتخاب شده در حل عددی نیز بستگی دارد. در حل عددی مسئله تنظیم زمین گرد غیرخطی با استفاده از روش مک کورمک، متغیر برداری  $\mathbf{D}$  به سمت راست رابطه (۲۲) اضافه می شود. برای محاسبه عملگرهای  $\nabla \cdot$  در رابطه (۲۶) می توان از عملگرهای پیش رو و پس رو استفاده کرد.

## ۱-۵ نتایج حل عددی

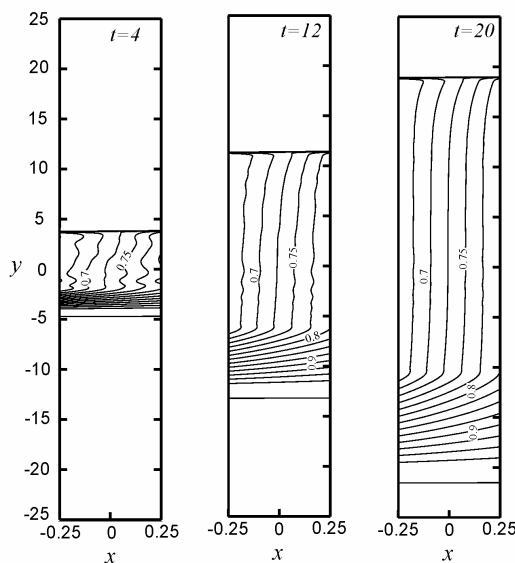
در این قسمت نتایج عددی مربوط به حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در دو بعد با استفاده از روش های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم آورده می شود. هندسه مسئله، یک ناحیه مستطیلی شکل با عرض بی بعد  $L=50$  در راستای محور  $y$  و طول بی بعد  $w$  در راستای محور  $x$  است. مکان بی بعد شده این ناحیه در راستای محور  $y$  در بازه  $-L/2 \leq y \leq L/2$  است و مکان بی بعد شده ناحیه است در راستای محور  $x$  در بازه  $-\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}$  قرار دارد. در تحقیق حاضر برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در ناحیه مستطیل شکلی که به آن اشاره شد، از سه طول متفاوت با ثابت نگه داشتن عرض ناحیه مستطیلی استفاده شده است. سه طول انتخاب شده به ترتیب دارای مقادیر از کم به زیاد

تنظیم راسبی در دو بُعد فاقد حل تحلیلی اند، برای مقایسه کیفی جواب‌ها، نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) در شکل ۸ نشان داده شده است. این مقایسه کیفی نشان از صحت جواب‌های به دست آمده با روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم دارد. نکته قابل توجه دیگر قدرت زیاد روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم در شبیه‌سازی میدان‌های شارش با ناپیوستگی است.

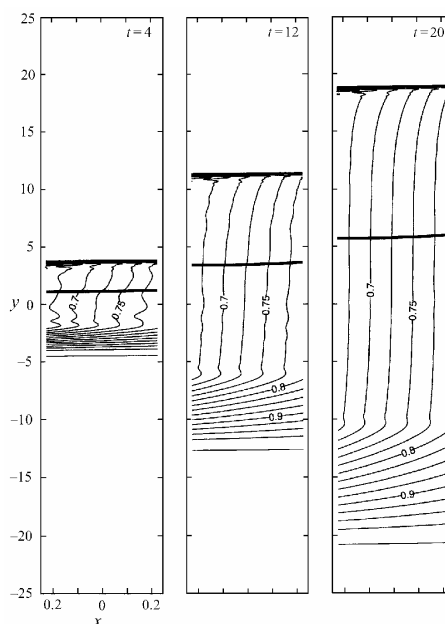
شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب مربوط به حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی با استفاده از روش مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم در یک کانال چرخان با طول  $w = 0.5$  است. در این دو شکل، میدان ارتفاع در سه زمان بی‌بعد  $t = 4$ ،  $t = 12$  و  $t = 20$  نشان داده شده است. همان‌گونه که از این دو شکل پیدا است نتایج دو روش مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم نزدیک به یکدیگر است. با توجه به اینکه معادلات مسئله



شکل ۶. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی در یک کانال چرخان با طول  $w = 0.5$  در سه زمان متفاوت که از روش مک کورمک مرتبه دوم در شبیه‌سازی آن استفاده شده است. پریندهای هم‌ارتفاع در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند و اختلاف بین دو پریند متوالی برابر با  $0.025$  است.



شکل ۷. مانند شکل ۶ با این تفاوت که از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در حل عددی استفاده شده است.



شکل ۸. نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان با طول  $w = 0.5$ .

با روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم بتوان باخبر شد، نتایج عرضه شده با هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) در شکل ۱۱ به نمایش گذاشته شده‌اند که این شکل نشان‌دهنده صحت جواب‌های به‌دست آمده با روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم است. در ادامه شکل ۱۲ یک نمای سه‌بُعدی از تکامل زمانی مسئله تنظیم زمین‌گرد غیرخطی در یک کانال با طول  $w = 1$  را نشان می‌دهد که از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در شبیه‌سازی آن استفاده شده است.

آخرین طول انتخاب شده برای کانال چرخان در مسئله تنظیم راسبی غیرخطی  $w = 4$  است. تفکیک انتخاب شده در این حالت تفکیک  $201 \times 2501$  است که این تفکیک متناظر با فاصله شبکه‌ای  $0.02$  در هر دو راستای محور مختصات است. برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در این حالت از گام زمانی  $\Delta t = 0.001$  استفاده شده و پارامتر  $\nu$  برای کنترل ناپایداری در این حالت برابر با مقدار  $\nu = 0.005$  در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۳ نتایج مربوط به میدان

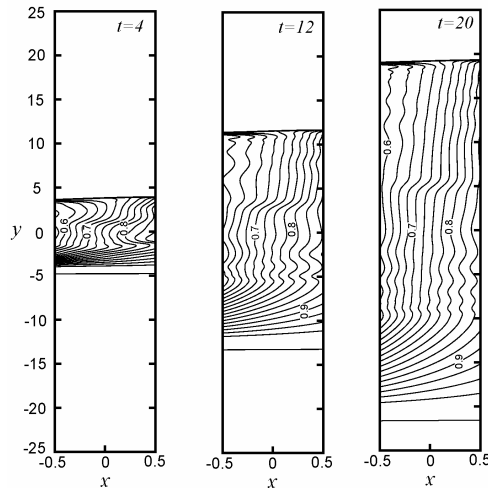
در ادامه، حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در کانالی با طول  $w = 1$  در نظر گرفته می‌شود. تفکیک انتخاب شده در این حالت برابر با  $101 \times 5001$  است که متناظر با فواصل شبکه‌ای  $0.01$  در راستای هر دو محور مختصات است. در این حالت گام زمانی انتخاب شده برابر با مقدار  $\Delta t = 0.001$  است. پارامتر  $\nu$  نیز در این حالت برای جلوگیری از ناپایداری غیرخطی برابر با مقدار  $0.005$  است. در شکل ۹ میدان ارتفاع در زمان‌های  $t = 4$ ،  $t = 12$  و  $t = 20$  نشان داده شده است که این میدان از حل عددی مسئله تنظیم راسبی با استفاده از روش مک کورمک مرتبه دوم حاصل شده است. به‌همین ترتیب در شکل ۱۰ نتایج حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم برای میدان ارتفاع در سه زمان بی‌بعد  $t = 4$ ،  $t = 12$  و  $t = 20$  نشان داده شده است. همان‌گونه که از این دو شکل پیدا است، نتایج دو روش مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم شبیه هم است. در این قسمت نیز برای اینکه از صحت جواب‌های به‌دست آمده



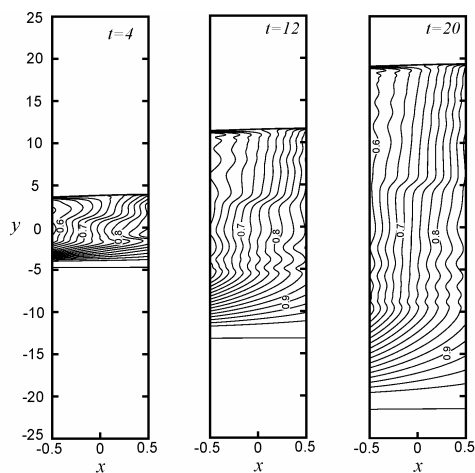
عددی روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم را تایید می‌کند.

به‌علاوه براساس نتایج به‌دست آمده با افزایش  $w$  به مقادیر بیشتر از شعاع تغییر شکل راسی مسئله (مانند  $w = 4$ ) جریان در حین تنظیم روی دیواره‌ها به‌صورت دو موج کلوین (مرزی) روی دیواره‌های چپ و راست حرکت می‌کند و در مراحل اول تنظیم نیز نشانه‌هایی از امواج گرانی و گرانی-لختی در آن مشاهده می‌شود (شکل‌های ۱۳ و ۱۴). در مراحل تنظیم نهایی نیز به‌نظر می‌رسد جریان با شیب‌دار شدن سطح شاره در مرکز کانال شکل گرفته است (زمان  $t = 20$  در شکل‌های ۱۳ و ۱۴).

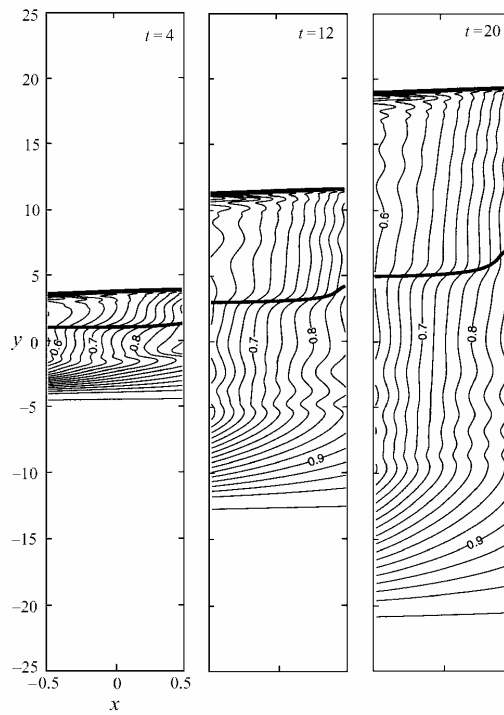
ارتفاع حاصل از حل عددی مسئله تنظیم راسی غیرخطی با روش مک کورمک مرتبه دوم و در زمان‌های متفاوت نشان داده شده است. به‌همین ترتیب در شکل ۱۴ نتایج حل عددی مسئله تنظیم راسی غیرخطی برای میدان ارتفاع در زمان‌های متفاوت با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم نشان داده شده است. در این حالت نیز نتایج عددی حاصل از دو روش مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم بسیار نزدیک به یکدیگر است. در شکل ۱۵ نتایج عددی به‌دست آمده هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای میدان ارتفاع در سه زمان متفاوت نشان داده شده است. این شکل نیز صحت و مطابقت خوب نتایج



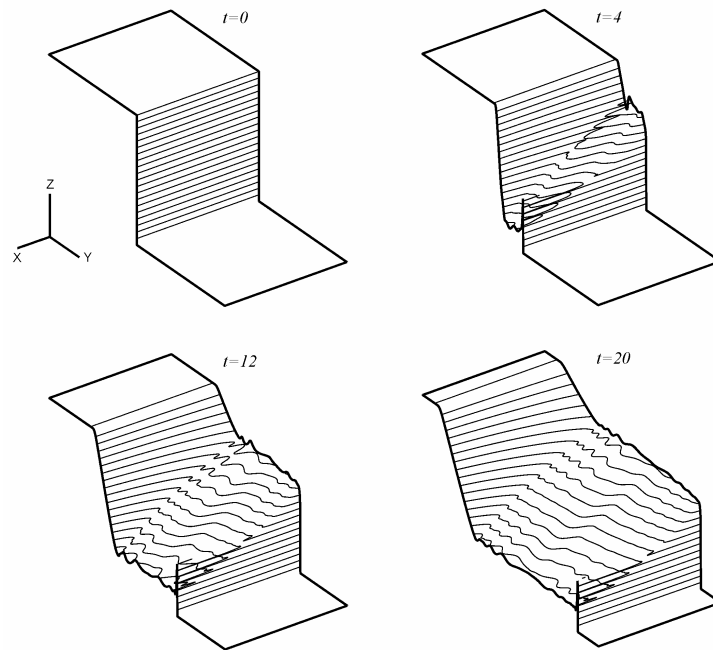
شکل ۹. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسی غیرخطی دو بعدی در یک کانال چرخان با طول  $w = 1$  در سه زمان متفاوت که از روش مک کورمک مرتبه دوم در شبیه‌سازی آن استفاده شده است. پربندهای هم‌ارتفاع در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند و اختلاف بین دو پربند متوالی برابر با  $0.025$  است.



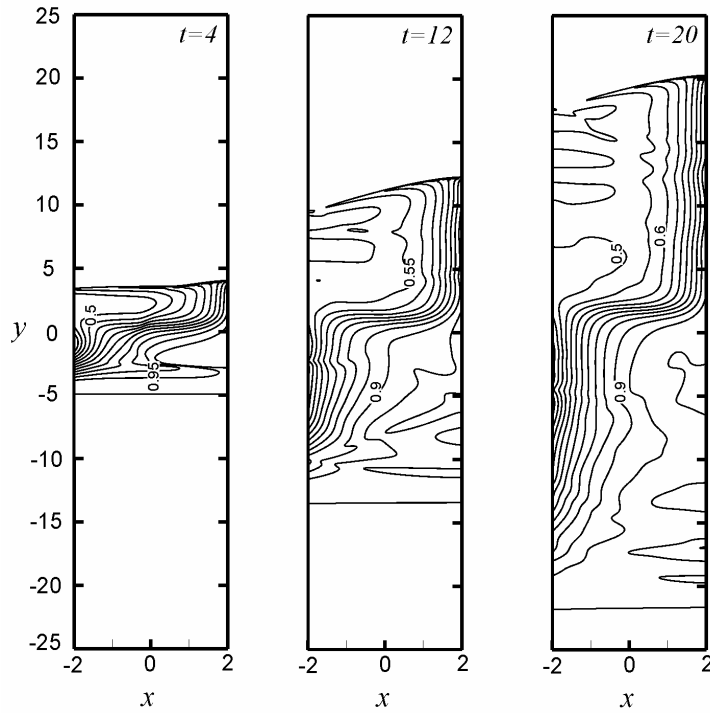
شکل ۱۰. مانند شکل ۹ با این تفاوت که از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در حل عددی استفاده شده است.



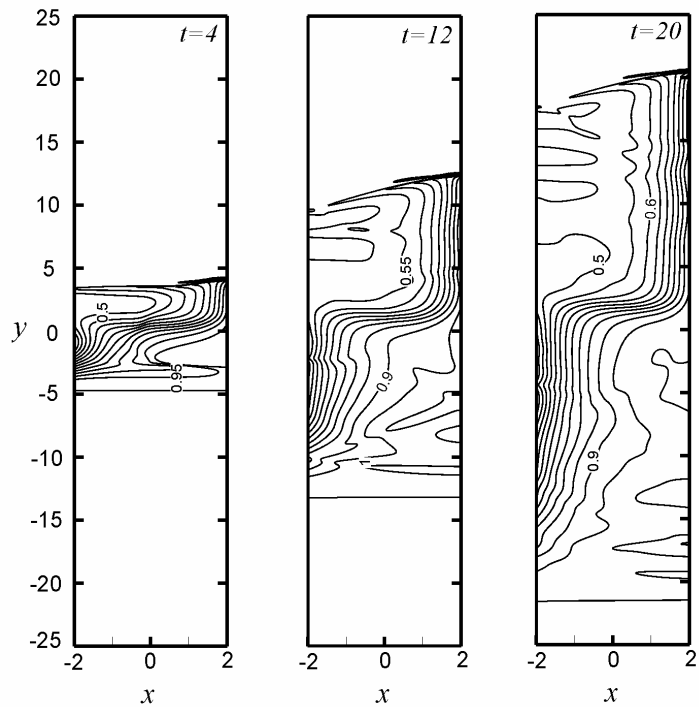
شکل ۱۱. نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی دو بُعدی در یک کانال چرخان با طول  $w = 1$ .



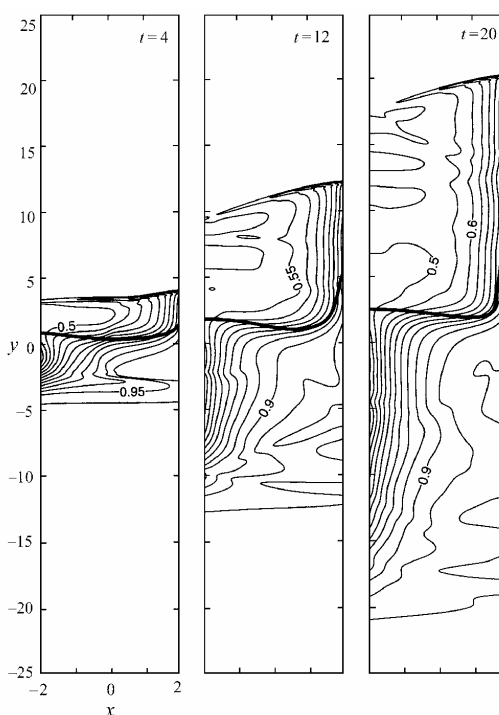
شکل ۱۲. نمای سه بُعدی از تحول زمانی میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان با طول  $w = 1$  که از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در شبیه سازی آن استفاده شده است.



شکل ۱۳. میدان ارتفاع مسئله تنظیم راسی غیرخطی در یک کانال چرخان با طول  $w = 4$  در سه زمان متفاوت که از روش مک کورمک مرتبه دوم در شبیه سازی آن استفاده شده است. پریندهای هم ارتفاع در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند و اختلاف بین دو پریند متوالی برابر با  $0.05$  است.



شکل ۱۴. مانند شکل ۱۳ با این تفاوت که از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم در حل عددی استفاده شده است.



شکل ۱۵. نتایج هلفریش و همکاران (۱۹۹۹) برای حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی در یک کانال چرخان با طول  $W = 4$ .

## ۶ نتیجه گیری

با یک مسئله مدل غیرخطی نشان می‌دهد که میرایی ذاتی این روش می‌تواند بخشی از اندرکنش‌های غیرخطی را میرا کند درحالی‌که آزمایش مشابه برای روش فشرده مرتبه چهارم بدون استفاده از پالایه عددی امکان‌پذیر نبود. جواب‌های حاصل از حل مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا در یک بُعد برای ترکیبی از حالت‌های خطی، غیرخطی، چرخشی و غیرچرخشی همراه با ناپیوستگی در میدان حل و مقایسه آنها با نتایج سایر محققان، صحت و عملکرد مطلوب روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم را نشان می‌دهد. در نهایت جواب‌های حاصل از حل عددی مسئله تنظیم زمین‌گرد غیرخطی در یک کانال چرخان با طول‌های مختلف با استفاده از روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم مطابقت بسیار خوبی از لحاظ کیفی با نتایج کار سایر محققان نشان داد و همچنین نتایج بیانگر این حقیقت است که روش مک کورمک از توانمندی زیادی در شبیه‌سازی میدان‌های شارش همراه با ناپیوستگی برخوردار است. بنابراین با توجه به نتایج

حل عددی مسئله تنظیم راسبی غیرخطی ناپایا در دو حالت یک‌بُعدی و دو بُعدی با شرایط اولیه دارای ناپیوستگی و با به کارگیری روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم مورد بررسی قرار گرفت. در واقع این روش امکان عددی را با درگیر کردن تنها دو نقطه و با دقت مرتبه چهارم فراهم می‌کند. بنابراین با توجه به این نکته روش پیش گفته توانایی مناسبی برای حل میدان‌های جریان همراه با ناپیوستگی خواهد داشت. بررسی صورت گرفته برای مسائل مدل با حل تحلیلی نشان می‌دهند که هنگام حضور ناپیوستگی در میدان حل روش فشرده مک کورمک مرتبه چهارم نسبت به روش‌های تفاضل محدود مرکزی عملکرد بهتری را از خود نشان می‌دهد. البته برای میدان‌های جریان هموار نیز این روش با توجه به ماهیت دونقطه‌ای خود، علاوه بر تامین دقت زیاد، از لحاظ حجم محاسبات نیز عملکرد بسیار مناسبی دارد. به علاوه با توجه به میرایی ذاتی موجود در این روش، آزمایش‌های عددی صورت گرفته

که در رابطه بالا  $k$  عدد موج،  $i = \sqrt{-1}$  و  $A$  یک عدد مختلط است که ضریب بزرگ‌نمایی (Amplification factor) نامیده می‌شود. اگر از رابطه بالا نسبت به مکان مشتق گرفته شود رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ikA_k^t e^{ikx} = iku \quad (4)$$

با قیاس با روابط تحلیلی بالا، برای مشتق اول تابع  $u$  در یک نقطه شبکه مانند  $x_j = j\Delta x$  که با روش تفاضل محدود تقریب زده می‌شود و همچنین مقدار تابع در این نقطه روابط زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_j^n = A_k^{(n\Delta t)} e^{ik(j\Delta x)}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = iK_M u_j^n$$

که در رابطه بالا  $K_M$  عدد موج پیراسته است که خود یک تابع مختلط از عدد موج  $k$  است. بنابراین عدد موج پیراسته  $K_M$  را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$K_M(k) = K_r(k) + iK_i(k) \quad (6)$$

در ادامه برای تحلیل پایداری روش مک کورمک مرتبه چهارم می‌بایست از جای گذاری رابطه (۵) در دو رابطه (۳) و (۴) استفاده کرد. با این کار، دو عدد موج پیراسته  $K_M^F$  و  $K_M^B$  که به ترتیب عدد موج‌های پیراسته مربوط به عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو هستند و با روابط زیر بیان می‌شوند، به دست می‌آیند.

$$K_M^B = \frac{1}{i\Delta x} \left[ \frac{e^{ikj\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}}{ae^{ik(j-1)\Delta x} + (1-a)e^{ikj\Delta x}} \right] \quad (7)$$

$$K_M^F = \frac{1}{i\Delta x} \left[ \frac{e^{ik(j+1)\Delta x} - e^{ikj\Delta x}}{ae^{ik(j+1)\Delta x} + (1-a)e^{ikj\Delta x}} \right] \quad (8)$$

در این قسمت با توجه به دو رابطه بالا و همچنین رابطه (۵) پس از مجموعه‌ای از عملیات جبری، رابطه (۲) به صورت زیر در می‌آید:

به دست آمده می‌توان امیدوار بود که به کارگیری این روش در مدل‌های عددی پیش‌بینی عددی وضع هوا و به ویژه مدل‌های میان مقیاس با اثرات جبهه‌ای شامل گسستگی در میدان شارش، نتایج خوبی به همراه داشته باشد.

### پیوست

تحلیل پایداری روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و مک کورمک فشرده مرتبه چهارم

در این پیوست به طور مختصر به تحلیل پایداری روش‌های مک کورمک مرتبه دوم و فشرده مرتبه چهارم پرداخته می‌شود. جزئیات بیشتر فلاح (۱۳۸۷) ارائه کرده است. برای تحلیل پایداری روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم معادله فرارفت خطی در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

با فرض ثابت بودن  $c$ ، شکل گسسته رابطه بالا با استفاده از روش مک کورمک به صورت زیر است:

$$u_j^* = u_j^n - c\Delta t \left. \frac{\partial u^n}{\partial x} \right|_j^F, \quad (2)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_j^n + u_j^* - c\Delta t \left. \frac{\partial u^*}{\partial x} \right|_j^B)$$

با توجه به ضمنی بودن عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو در روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم برای تحلیل پایداری رابطه (۱) می‌بایست از مفهوم عدد موج پیراسته (Modified wave number) استفاده شود (هیکسون و ترکل، ۲۰۰۰). برای جواب یک معادله دیفرانسیلی مانند معادله فرارفت یک بعدی در رابطه (۱)، در یک زمان خاص یک جواب به صورت یک مد فوریه در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x,t) = A_k^t e^{ikx} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

همان گونه که در شکل ۱۶ (ب) مشاهده می شود، نامساوی  $|A_k| \leq 1$  به ازای عدد کورانت در محدوده  $\mu \leq 0.57$  برقرار می باشد. بنابراین نتیجه گرفته می شود که شرط پایداری روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم با رابطه تقریبی زیر بیان می شود:

$$\mu \leq 0.57 \tag{۱۲}$$

با روشی مشابه، ضریب بزرگ نمایی روش مک کورمک مرتبه دوم نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$A_k = 1 - \mu^2 + \mu^2 \cos(k\Delta x) + i\mu \sin(k\Delta x) \tag{۱۳}$$

برای به دست آوردن شرط پایداری روش مک کورمک مرتبه دوم  $|A_k|$  می باید از رابطه بالا به دست آید. در شکل ۱۶ (الف) خطوط هم مقدار  $|A_k|$  برای این روش ترسیم شده است. با توجه به این شکل شرط پایداری خطی برای روش مک کورمک مرتبه دوم با رابطه زیر بیان می شود:

$$\mu \leq 1 \tag{۱۴}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2} [iK_M^F u_j^n + iK_M^B u_j^n + c\Delta t K_M^B K_M^B u_j^n] \tag{۹}$$

با در نظر گرفتن رابطه  $u_j^{n+1} = Au_j^n$ ، رابطه بالا به شکل زیر درمی آید:

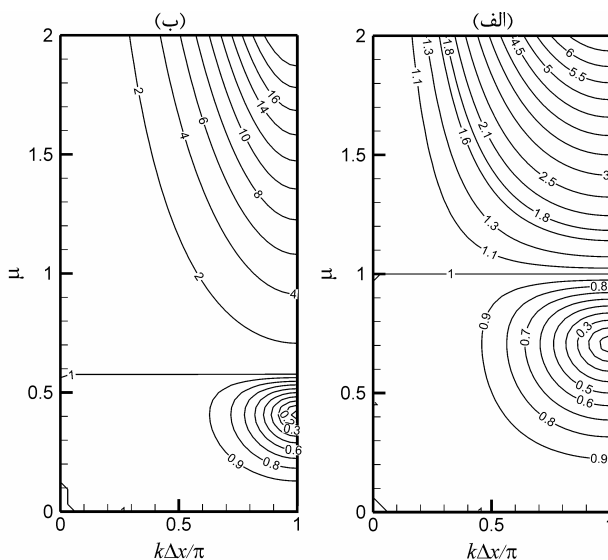
$$A_k = 1 - c \frac{\Delta t}{2} [iK_M^F + iK_M^B + c\Delta t K_M^B K_M^B] \tag{۱۰}$$

برای بررسی تحلیل پایداری روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم می باید اندازه ضریب بزرگ نمایی و یا به عبارت دیگر  $|A_k|$  به دست آید. با توجه به رابطه زیر به دست می آید:

$$|A_k| = \sqrt{A_k A_k^*} \tag{۱۱}$$

که در رابطه بالا  $A_k^*$  همیوگ مختلط (Complex conjugate)  $A_k$  است. برای به دست آوردن شرایط پایداری خطی، اندازه ضریب بزرگ نمایی یعنی  $|A_k|$  می باید در نامساوی زیر صدق کند:

$|A_k| \leq 1$   
در شکل ۱۶ خطوط هم مقدار  $|A_k|$  بر حسب عدد کورانت (Courant number)  $\mu$  و عدد موج رسم شده است. عدد کورانت با رابطه زیر تعریف می شود:



شکل ۱۶. خطوط هم مقدار  $|A_k|$  بر حسب عدد کورانت و عدد موج برای (الف) مک کورمک مرتبه دوم و (ب) روش مک کورمک فشرده مرتبه چهارم.

### قدردانی

نویسندگان مقاله از دانشگاه تهران برای حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می کنند.

### منابع

فلاح، س.، ۱۳۸۷، حل عددی شکل پایستار معادلات تراکم پذیر دو بُعدی و غیرهیدروستاتیک جو بی دررو با استفاده از روش فشرده مرتبه چهارم، پایان نامه کارشناسی ارشد، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

- Esfahanian, V., Ghader, S., and Mohebalhojeh, A. R., 2005, On the use of super compact scheme for spatial differencing in numerical models of the Atmosphere, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **131**, 2109-2130.
- Gill, A. E., 1982, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, 662 pp.
- Helfrich, K. R., Kuo, A. C. and Prat, L. J., 1999, Nonlinear Rossby adjustment in a channel, *J. Fluid. Mech.*, **390**, 187-222.
- Hixon, R. and Turkel, E., 2000, Compact implicit MacCormack type schemes with high accuracy, *J. Comput. Phys.*, **158**, 51-70.
- Kuo, A. C. and Polvani, L. M., 1997, Time-dependent fully nonlinear geostrophic adjustment, *J. Phys. Ocean.*, **27**, 1614-1634.
- Lele, S. k., 1992, Compact finite difference scheme with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, **103**, 16-42.
- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2007, Assessing the numerical accuracy of complex spherical shallow water flows. *Mon. Wea. Rev.* **135**, 3876-3894.
- Peyret, R. and Taylor, T. D., 1983, *Computational methods for fluid flow*, Springer-Verlag, 231 pp.
- Pinchover, Y. and Rubinstein, J., 2005, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 371 pp.