مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۵، شماره ۲، ۱۳۸۸، صفحهٔ ۳۷-۶۰

پیشنهادی برای محاسبهٔ مستقیم تانسور کرنش از راه تغییرات طول‌ها و زاویه‌ها بررسی موردی: محاسبهٔ تغییر شکل شبکهٔ ژئودینامیک کشور

علیرضا آزموده اردلان[۱*] و مهدی روفیان نایینی[۲]

[۱] دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابلهٔ با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران
[۲] گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب علمی مهندسی نقشه‌برداری و مقابلهٔ با سوانح طبیعی، پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۶/۶/۱۷ ، پذیرش نهایی: ۸۷/۷/۲)

چکیده

در این مقاله روشی جدید برای محاسبهٔ تانسور کرنش بدون استفاده از گرادیان زاویه‌های جابه‌جایی (روش معمول محاسبهٔ تانسور کرنش) عرضه شده است. در این روش تانسور کرنش مستقیماً براساس تغییر طول‌ها و زاویه‌های بین نقاط شبکهٔ ژئودزی (یا ژئودینامیک) در اپک‌های مشاهداتی متفاوت محاسبه و بدین ترتیب نیاز به تشکیل بردار جابه‌جایی به منظور محاسبهٔ گرادیان آن از مراحل محاسبهٔ تغییر شکل، مرتفع شده است. همچنین نشان داده شده که اگر دستگاه مختصات بر اثر تغییر شکل، دچار دوران و انتقال شود، و یا اندازهٔ تغییر شکل، مقدار قابل توجهی باشد، استفاده از روابط خطی معمول برای برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش بر مبنای بردار جابه‌جایی منجر به جواب‌های ناصحیح، در حالی که روش پیشنهادی این مقاله، از آنجا که مستقل از دستگاه مختصات است، در هر صورت برآورد صحیح مؤلفه‌های تانسور کرنش را میسر می‌سازد. از مباحث دیگر مورد بررسی در این تحقیق، امکان‌سنجی برآورد کرنش در صفحه سامانهٔ تصویر متشابهی است که اخیراً از سوی دانشگاه تهران برای کاربردهای منطقه‌ای پیشنهاد شده است. با توجه به موفقیت‌آمیز بودن روش فوق، شبکهٔ ژئودینامیک کشور به‌منزلهٔ بررسی موردی انتخاب و مؤلفه‌های تانسور کرنش صفحه‌ای برای آن به روش پیشنهادی محاسبه شد. جزئیات مربوط به این روش و نتایج حاصل به تفصیل در مقاله آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: تغییر شکل، تانسور کرنش، نگرش اویلری، نگرش لاگرانژی، تفاضل‌های محدود، المان‌های محدود

A proposal for deformation analysis via direct computation of strain tensor elements from the time-wise changes in the distances and angles in a geodetic network
Case study: Deformation computation of the geodynamic network of Iran

Ardalan, A. A[1]. and Raoofian, M[2].

[1]*Associate Professor, Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran*
[2]*Department of Surveying and Geomatics Engineering, Center of Excellence in Surveying Engineering and Disaster Prevention, University of Tehran, Iran*

(Received: 8 Sep 2007 , Accepted: 23 Sep 2008)

Abstract

A method for deformation computation based on strain tensor elements, as an alternative to the usual way of application of gradient of displacement vector, is proposed. The method computes directly the strain tensor elements from the computed/observed changes in distances and angles between the stations of a geodetic network in two epochs of

E-mail: ardalan@ut.ac.ir　　دورنگار: ۸۸۳۳۷۶۴۲-۰۲۱　　* نگارنده رابط: تلفن: ۶۱۱۱۴۳۸۳-۰۲۱

observations. Displacement vector which is determined from the coordinate differences with respect to “reference” and “current” states depends on the definition of coordinate system and as such can not be considered as suitable measure of deformation. On the contrary from strain tensor invariant parameters like “dilatation” and “maximum shear” can be computed which allow correct interpretation of deformation. The strain tensor can be derived from the difference between line elements of a massive body in the reference and current states as follows:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= \delta_{jk} dx_j dx_k - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \\ &= 2e_{jk} dx_j dx_k \end{aligned} \qquad (1)$$

Where x and X are the coordinates of points in the current and reference states of the body, respectively. For computation of strain tensor directly from changes in distances and angles between stations of a geodetic network in the two states, let us start with the presentation of strain tensor as:

$$E = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Therefore by substitution of equation (2) in equation (1) we have:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= 2e_{jk} dx_j dx_k \\ &= \begin{bmatrix} dx_{jk}^2 & 2dx_{jk}dy_{jk} & dy_{jk}^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (3)$$

In the equation (3) ds and ds are the distances between geodetic network stations in the reference and current states, respectively, and dx_{jk}, dy_{jk} are defined as follows:

$$\begin{aligned} dx_{jk} &= x_k - x_j \\ dy_{jk} &= y_k - y_j \end{aligned} \qquad (4)$$

The above relations are taken from continuum mechanics, which assumes continuity in the massive body, however, in practice for the numerical computation of strain we need to discretize the body into finite element of, for example, triangular shapes in 2-D space. The triangular elements can be generated by Delaunay triangulation. Then, for each triangle three equations of the type equation (3) can be written, and via the solution of the system of equations unknown parameters $[a, b, d]$ can be estimated.

For the angular observation from the definition of the inner product the following equation can be developed:

$$\begin{aligned} &< d\vec{x}, d\vec{y} > - < d\vec{X}, d\vec{Y} > \\ &=< d\vec{x}, d\vec{y} > - < \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} dx, \frac{\partial \vec{Y}}{\partial y} dy > \\ &=< d\vec{x}, d\vec{y} > - \frac{\partial \vec{X}}{\partial x}\frac{\partial \vec{Y}}{\partial y} < d\vec{x}, d\vec{y} > \\ &= (\delta_{ij} - \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}) < d\vec{x}, d\vec{y} > \\ &= 2e_{ij} dx_{ki} dx_{kj} \end{aligned} \qquad (5)$$

Equation (5) can equivalently be written as:

$$\cos\varphi\|dx\|\|dy\|-\cos\phi\|dX\|\|dY\| \\ =\begin{bmatrix} dx_1dy_1 & dx_1dy_2+dx_2dy_1 & dx_2dy_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \tag{6}$$

where the differential elements dx and dy are defined as below:

$$\begin{cases} dx_1 = x_j - x_k \\ dx_2 = y_{j-}y_k \end{cases}, \begin{cases} dy_1 = x_i - x_k \\ dy_2 = y_i - y_k \end{cases} \tag{7}$$

Alternatively, the finite difference method can also be used for computation of the strain tensor in a point-wise manner as below:

$$e_i = e_{11}\cos^2\theta_i + e_{12}\sin 2\theta_i + e_{22}\sin^2\theta_i \tag{8}$$

where in equation (8) e_i is the elongation in the azimuth θ_i defined as:

$$e_i = \frac{ds_i - dS_i}{dS_i} \tag{9}$$

In this paper we numerically tested the above mentioned method for strain tensor computation by simulated examples and then applied the method to the geodynamic network of Iran.

Key words: Deformation, Strain tensor, Eulerian approach, Lagrangian approach, Finite difference, Finite elements

۱ مقدمه

تحقیق و بررسی تغییر شکل سازه‌ها و قطعات صنعتی از مباحث مورد علاقهٔ مهندسی در دنیای کنونی است. شاید ساده‌ترین مفهوم تغییر شکل، جابه‌جایی اجزای سازندهٔ جسم در بازه‌ای زمانی باشد، که تحت تأثیر نیروهای خارجی و یا داخلی ایجاد می‌شود. آنچه که عملاً در مهندسی مورد توجه است، تغییر در موقعیت نسبی ذرات تشکیل‌دهندهٔ یک جسم است که اصطلاح "تغییر شکل" (deformation) نامیده می‌شود، چرا که معمولاً تغییر شکل‌های نامتقارن یا ناهمگون یک جسم بوده که می‌تواند منجر به شکستگی و یا گسیختگی شود.

بررسی تغییر شکل در ژئودزی، درحکم دانش و هنر بررسی هندسه و گرانی زمین، سابقهٔ طولانی دارد و از دیرباز در مطالعهٔ حرکت‌های تکتونیکی مورد استفاده قرار گرفته است. برای مثال می‌توان به آلتینر (۱۹۹۹)؛ برونر (۱۹۷۹)؛ برونر و همکاران (۱۹۸۱)؛ گرافارند (۱۹۸۶)؛ لنسن و همکاران (۱۹۹۸)؛ لیوراتوس و ولاخوس (۱۹۸۱)؛ پاپ (۱۹۷۲)؛ ویسکوچیل (۱۹۷۷)؛ ولش (۱۹۸۱ و ۱۹۸۳) و ونت و همکارن (۱۹۸۵)؛ اشاره کرد.

امروزه این توانمندی به بخش سازه‌ای و بررسی سازه‌های بااهمیت و راهبردی همچون نیروگاه‌ها، سدها و تأسیسات صنعتی گوناگون توسعه یافته و حتی بررسی تنش-کرنش قطعات صنعتی مورد توجه بخش مهندسی ژئودزی قرار گرفته است (رویگر، ۲۰۰۶ و اسماعیلی، ۲۰۰۲).

از دیدگاه مهندسی سازه، اهمیت بررسی تغییر شکل در تلفیق آن با اطلاعات مربوط به مقاومت مصالح است که امکان تعیین پایداری سازه‌ها را در مقابل نیروهای داخلی و خارجی، بوجود می‌آورد. برای مثال در یک سازه، اگر تغییر شکل در قالب تانسور کرنش، با پارمترهای مکانیک سازه ترکیب شود، اطلاعات مربوط به تنش سازه را به‌دست می‌دهد که از دیدگاه مقاومت سازه‌ای حائز اهمیت زیادی است. به‌علاوه بررسی تغییرات زمانی تغییر شکل می‌تواند در پیش‌بینی امکان و یا زمان تخریب سازه مؤثر باشد.

به‌طور کلی برای بررسی تغییر شکل یک جسم آگاهی از موقعیت ذرات آن در دو مقطع زمانی و مقایسهٔ آنها مورد نیاز است. موقعیت در مفهوم علمی آن تعیین مختصات است که از راه تعریف دستگاه مختصات حاصل می‌شود. مقایسهٔ موقعیت ذرات تشکیل‌دهندهٔ یک جسم مستلزم ایجاد دستگاه مختصاتی یکسان در دو موقعیت جسم است. یکی از کمیت‌هایی که می‌تواند برای تفسیر تغییر شکل مورد استفاده قرار گیرد "بردار جابه‌جایی" است که از تفاضل مختصات نقاط تشکیل‌دهندهٔ جسم در دو وضعیت زمانی حاصل می‌شود. بدون شک زمانی بردار جابه‌جایی حاوی اطلاعات صحیح از تغییر شکل خواهد بود که از تفاضل موقعیت‌های یک نقطه در دو وحلهٔ زمانی نسبت به "چارچوب مختصاتی" یکسان حاصل شده باشد. بنابر این بردار جابه‌جایی وابسته به دستگاه مختصات است و تعیین آن همواره دچار عدم قطعیت (indeterminacy) در ثبات چارچوب در دو وضعیت (دو وحلهٔ زمانی) است. لذا برای تفسیر دقیق و واقعی تغییر شکل، کمیت‌های مستقل از تغییرات دستگاه مختصات مورد نیاز است. یکی از راه‌های دستیابی به مفسرهای ناوردا (غیر وابسته به دستگاه مختصات) استفاده از "تانسور کرنش" و شاخص‌های ناوردای حاصل از آن است. بدین ترتیب از طریق بردار جابه‌جایی، که خود وابسته به دستگاه مختصات است، می‌توان به اطلاعات ناوردا در مورد تغییر شکل یک جسم دست یافت. در این مقاله روشی برای برآورد کردن "تانسور کرنش" عرضه شده است که مستقیماً از راه مشاهدات طولی و زاویه‌ای، مؤلفه‌های تانسور کرنش را به‌دست می‌دهد. همچنین برای بررسی توانمندی و کارایی این روش در مقایسه با روش‌های معمول، ابتدا مسئله‌ای شبیه‌سازی شده مطرح شده و حل آن به روش پیشنهادی و روش معمول مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج حاصل حکایت از تطابق و همخوانی نتایج به‌دست آمده از روش جدید و سنتی دارد که صحت روش پیشنهادی را تأیید می‌کند. پس از کنترل روش در مثال‌های شبیه‌سازی شده، تانسور کرنش به روش پیشنهادی برای شبکهٔ ژئودینامیک کشور برآورد شده است. یکی دیگر از تجربیات حائز اهمیت این تحقیق، برآورد کردن تانسور کرنش صفحه‌ای در سامانه تصویر متشابه منطقه‌ای (صفری و اردلان، ۲۰۰۷) است به این ترتیب علاوه بر سهولت محاسبات، نتایج حاصل از ارجحیت تفسیر مسطحاتی کمیت جابه‌جایی برخوردار است و به‌کارگیری ضریب مقیاس در محاسبهٔ طول‌ها در سامانهٔ تصویر موجب اجتناب از واپیچش‌های طولی و تفسیر آنها به‌منزلهٔ تغییر شکل شده است.

۲ نظریهٔ تغییر شکل

بررسی تغییر شکل اجسام در مبحث مکانیک محیط‌های پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این نگرش، یک جسم که آرایش پیوسته‌ای از ذرات مادی است، به المان‌های کوچک حجمی یا سطحی افراز شده، به نحوی که اولاً این المان‌ها به اندازهٔ کافی کوچک باشند که بتوان آنها را درحکم نقاط مادی در نظر گرفت و در ثانی ابعاد آنها در حدی باشد که به نوسان‌های بین مولکولی وابستگی نداشته باشند.

در تحلیل تغییر شکل، همواره ویژگی‌های جسم در

دو وضعیت مرجع (reference state) و وضعیت فعلی (current state) مورد مقایسه قرار می‌گیرد. لذا، برای توصیف ریاضی جابه‌جایی ذرات جسم بین این دو وضعیت، نیاز به تعریف یک دستگاه مختصات در فضای جسم، در موقعیت‌های زمانی متفاوت خواهیم داشت. این دستگاه مختصات در وضعیت مرجع، دستگاه مختصات "لاگرانژی" و در وضعیت فعلی، دستگاه مختصات "اویلری" نامیده می‌شود. به مختصات نقاط در سیستم مختصات لاگرانژی (که به آن مختصات مادی نیز گفته می‌شود)، با حروف بزرگ و در سیستم مختصات اویلری (که به آن مختصات فضایی نیز گفته می‌شود)، با حروف کوچک، ارجاع می‌شود (ارینگن، ۱۹۶۲). این دو وضعیت در شکل ۱ نشان داده شده است.

بر این اساس، در حالت کلی، معادلات حرکت ذرات یک جسم یا تغییر شکل آن را می‌توان به صورت زیر بیان داشت:

$$x^k = x^k\left(X^K, t\right) \qquad (۱)$$

$$X^K = X^K\left(x^k, t\right) \qquad (۲)$$

برای تحلیل تغییر شکل نیاز به کمیت‌هایی است، که به کمک آنها بتوان تغییر شکل را تفسیر کرد. به‌علاوه به منظور اجتناب از اثرهای دستگاه مختصات، لازم است این کمیت‌ها "ناوردا" (مستقل از تعریف دستگاه مختصات) باشند. "تانسور کرنش" کمیتی حاوی اطلاعات ناوردا از تغییر شکل است. برای دست‌یابی به معادلات ریاضی "تانسور کرنش" از تعریف دو المان طولی در وضعیت مرجع و وضعیت جاری به صورت زیر آغاز می‌کنیم:

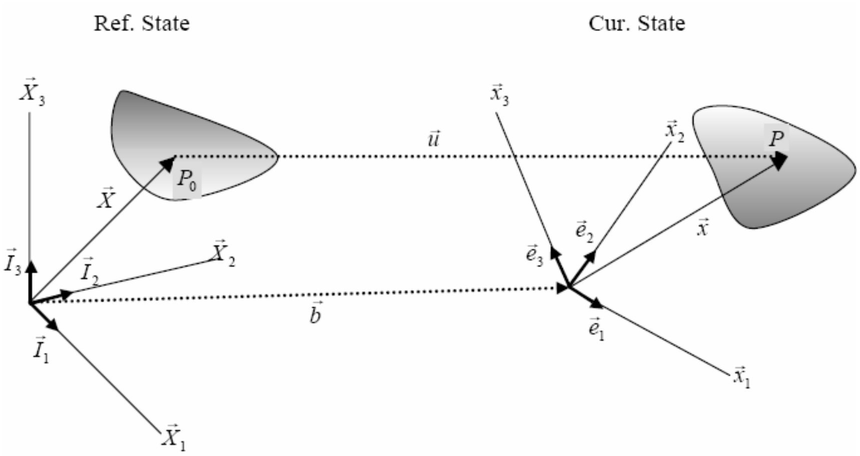
$$\begin{cases} ds^2 = dx_i dx_i, \\ dS^2 = dX_i dX_i \end{cases} \qquad (۳)$$

از تفاضل این دو المان طولی در وضعیت مرجع و وضعیت جاری داریم:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= \delta_{jk} dx_j dx_k - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \\ &= 2e_{jk} dx_j dx_k \end{aligned} \qquad (۴)$$

در معادله (۴) e_{jk} تانسور کرنش اویلری با تعریف زیر است:

$$e_{jk} = \frac{1}{2}\left(\delta_{jk} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right) \qquad (۵)$$



شکل ۱. نمایش حالت‌های مرجع و جاری.

و به طریق مشابه برای تانسورکرنش لاگرانژی خواهیم داشت (ارینگن، ۱۹۶۲):

$$E_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial x_i}{\partial X_k}-\delta_{jk}\right) \qquad (۶)$$

۳ بیان تانسورهای کرنش براساس بردار جابه‌جایی

با توجه به شکل ۱، بردار جابه‌جایی $\vec{u}$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\vec{u}=\vec{x}-\vec{X}+\vec{b} \qquad (۷)$$

لذا با توجه به رابطهٔ (۵) معادلهٔ تانسور "کرنش اویلری" به صورت زیر بیان می‌شود:

$$e^{E}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \qquad (۸)$$

و با توجه به رابطهٔ (۶) معادلهٔ تانسور "کرنش لاگرانژی" به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E^{L}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial X_k}+\frac{\partial U_k}{\partial X_j}+\frac{\partial U_i}{\partial X_j}\frac{\partial U_i}{\partial X_k}\right) \qquad (۹)$$

برای تغییر شکل‌های کوچک، مشتقات ترکیبی روابط (۸) و (۹) قابل صرف‌نظر و نگرش‌های لاگرانژی و اویلری بر هم منطبق است و بدین ترتیب تانسورهای کرنش به صورت ساده شدهٔ زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\tilde{E}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial X_k}+\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\right) \qquad (۱۰)$$

$$\tilde{e}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (۱۱)$$

$$\tilde{R}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial X_k}-\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\right) \qquad (۱۲)$$

$$\tilde{r}_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (۱۳)$$

در روابط فوق $\tilde{E}_{jk},\tilde{e}_{jk}$ تانسورهای کرنش خطی‌اند که متقارن هستند، $\tilde{R}_{jk},\tilde{r}_{jk}$ تانسورهای دوران خطی و پاد متقارن‌اند.

۴ محاسبهٔ عددی مؤلفه‌های تانسور کرنش

در این بخش در ابتدا به ارائهٔ روش معمول محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌پردازیم و در ادامه روش پیشنهادی را مورد بحث قرار خواهیم داد.

۴-۱ با استفاده از گرادیان جابه‌جایی

برای محاسبهٔ تانسور کرنش بر مبنای نگرش "مکانیک محیط‌های پیوسته" لازم است ابتدا نقاطی در روی جسم انتخاب و سپس تغییر مکان نسبی این نقاط تعیین شود. در مرحلهٔ بعد لازم است برای روند تغییر شکل، مدلی فرض شود. ساده‌ترین مدل، که در صورت چگال بودن نقاط، همواره می‌تواند صحیح باشد، "مدل خطی" است. بر این اساس بردار جابه‌جایی را می‌توان حاصل یک انتقال آفین (affine) از وضعیت مرجع به وضعیت جاری به‌صورت زیر به ترتیب برای نگرش اویلری و لاگرانژی در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\Delta x&=a_0+a_1x+a_2y\\ \Delta y&=b_0+b_1x+b_2y\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}\Delta X&=A_0+A_1X+A_2Y\\ \Delta Y&=B_0+B_1X+B_2Y\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

روابط (۱۴) و (۱۵) دربرگیرندهٔ تغییر شکل‌های حاصل از انتقال موازی محورهای مختصات، دوران، انعکاس، انتقال اسکالر، کشش ساده، و برش ساده‌اند. با در اختیار بودن بردارهای جابه‌جایی نقاط، ضرایب روابط (۱۴) و (۱۵) قابل محاسبه‌اند و با داشتن این ضرایب مؤلفه‌های تانسور کرنش با توجه به روابط (۸) و (۹) محاسبه می‌شوند.

بررسی تغییر شکل، همانند هر پدیده فیزیکی دیگر به

صورت پیوسته امکان‌پذیر نیست و بدین لحاظ در تعیین تغییر شکل ناگزیر از منفصل کردن فضا و بررسی تغییر شکل به صورت ناپیوسته هستیم. برای به‌دست آوردن ضرایب (مجهول) روابط (۱۴) و (۱۵) می‌توان از روش "المان محدود" (finite element) یا "تفاضل محدود" (finite difference) استفاده کرد. در روش المان محدود نقاط موجود در سطح جسم به صورت مثلث‌های مجزا تقسیم‌بندی می‌شوند. این عمل را می‌توان با استفاده از دستور مثلث‌بندی دلونی و یا از روش‌های دستی عملی کرد. در این حالت می‌توان دستگاه معادلاتی به صورت زیر را برای تعیین مجهول‌ها تشکیل داد.

$$\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta y_1\\ \Delta x_2\\ \Delta y_2\\ \Delta x_3\\ \Delta y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1-x_m & y_1-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1-x_m & y_1-y_m\\ 1 & x_2-x_m & y_2-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2-x_m & y_2-y_m\\ 1 & x_n-x_m & y_n-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3-x_m & y_3-y_m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$
(۱۶)

در رابطهٔ (۱۶) رأس‌های هر مثلث با اندیس‌های 1 تا 3 و نقطهٔ مرکز هندسی مثلث، که المان‌های تانسور کرنش برای آن محاسبه می‌شوند، با اندیس m نشان داده شده است. پس از محاسبهٔ بردارهای جابه‌جایی رأس‌های هر مثلث از تفاضل مختصات‌های دو وحلهٔ زمانی، به کمک دستگاه معادلات (۱۶) پارامترهای مجهول مدل جابه‌جایی برای هر مثلث به‌طور مجزا تعیین شده، و در نهایت با توجه به روابط مربوطه، مؤلفه‌های تانسور کرنش محاسبه می‌شوند.

روش دیگر برای برآورد کردن تانسور کرنش استفاده از "تفاضل‌های محدود" است. در این روش مدل جابه‌جایی برای نقاط احاطه‌کنندهٔ نقطهٔ مورد نظر نوشته و تانسور کرنش به‌صورت نقطه‌ای برآورد می‌شود. در این روش دستگاه معادلات مربوطه برای تعیین مجهول‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta y_1\\ \Delta x_2\\ \Delta y_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\\ \Delta y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1-x_m & y_1-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1-x_m & y_1-y_m\\ 1 & x_2-x_m & y_2-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2-x_m & y_2-y_m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n-x_m & y_n-y_m & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n-x_m & y_n-y_m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$
(۱۷)

که در آن x_m, y_m مختصات نقطه‌ای است که تانسور کرنش برای آن محاسبه شده است و اندیس‌های 1 تا n مشخص‌کنندهٔ نقاط در برگیرندهٔ نقطهٔ m هستند.

۲-۴ با استفاده از مشاهدات طول و زاویه (روش پیشنهادی مقاله)

در این روش تانسور کرنش بدون محاسبهٔ بردار جابه‌جایی، و به کمک طول‌ها و زوایا محاسبه می‌شود. از آنجا که "تانسور کرنش "تانسوری"متقارن" است می‌توان آن‌را با ماتریس متقارنی به‌صورت زیر نشان داد:

$$E=\begin{bmatrix}a & b\\ b & d\end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

با توجه به رابطهٔ (۴) و جایگزینی تانسور کرنش از رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned}&ds^2-dS^2=2e_{jk}dx_j dx_k\\ &=\begin{bmatrix}dx_{jk}^2 & 2dx_{jk}dy_{jk} & dy_{jk}^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a\\ b\\ d\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

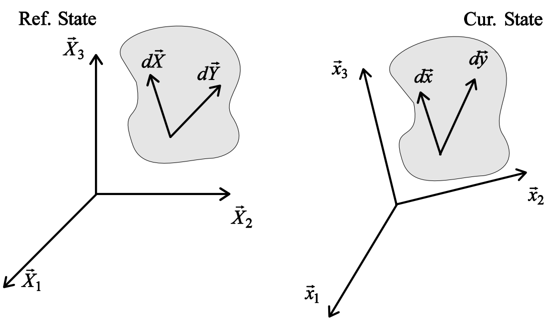
که در آن dS و ds به ترتیب المان طول بین دو نقطه در "وضعیت مرجع" و "وضعیت جاری" و dx_{jk} و dy_{jk}، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}dx_{jk}&=x_k-x_j\\ dy_{jk}&=y_k-y_j\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در رابطهٔ (۲۰) $\{x_k, y_k\}$ و $\{x_j, y_j\}$ مختصات نقاط دو سر المان طولی در "وضعیت جاری" است. با

تقسیم‌بندی شبکه به المان‌های مثلثی (روش المان محدود) برای هر المان سه معادلهٔ مستقل از نوع (۱۹) قابل تشکیل است که مقادیر مجهول‌های $[a, b, d]$ را برآورد می‌سازند. شایان ذکر است که تانسور کرنشی که با استفاده از معادلهٔ (۱۹) محاسبه می‌شود، "تانسور کرنش اویلری" خواهد بود. "تانسور کرنش لاگرانژی" به طور مشابه و با قرار دادن مختصات نقاط در "وضعیت مرجع" در معادله‌های (۲۰) قابل محاسبه است. در صورتی‌که شبکه دارای مشاهدات زاویه‌ای نیز باشد، با توجه به شکل ۲ می‌توان از تعریف ضرب داخلی، معادلاتی به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} &< d\vec{x}, d\vec{y} > - < d\vec{X}, d\vec{Y} > \\ &= < d\vec{x}, d\vec{y} > - < \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} dx, \frac{\partial \vec{Y}}{\partial y} dy > \\ &= < d\vec{x}, d\vec{y} > - \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \frac{\partial \vec{Y}}{\partial y} < d\vec{x}, d\vec{y} > \\ &= (\delta_{ij} - \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \frac{\partial X^k}{\partial x^j}) < d\vec{x}, d\vec{y} > \\ &= 2e_{ij} dx_{ki} dx_{kj} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$



شکل ۲. نمایش تغییر یک المان زاویه‌ای در گذر از "وضعیت مرجع" به "وضعیت جاری".

یا

$$\begin{aligned} &\cos\varphi \|dx\| \|dy\| - \cos\phi \|dX\| \|dY\| \\ &= \begin{bmatrix} dx_1 dy_1 & dx_1 dy_2 + dx_2 dy_1 & dx_2 dy_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

در رابطهٔ (۲۲) کمیت‌های دیفرانسیلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} dx_1 = x_j - x_k \\ dx_2 = y_j - y_k \end{cases}, \begin{cases} dy_1 = x_i - x_k \\ dy_2 = y_i - y_k \end{cases} \qquad (۲۳)$$

همچنین می‌توان با استفاده از روش تفاضل‌های محدود و به کمک معادلهٔ زیر، تانسور کرنش را برای تک تک نقاط شبکه محاسبه کرد:

$$e_i = e_{11} \cos^2 \theta_i + e_{12} \sin 2\theta_i + e_{22} \sin^2 \theta_i \qquad (۲۴)$$

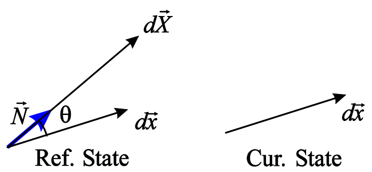
در معادله (۲۴) e_i کرنش در آزیموت θ_i است و به صورت زیر تعریف می‌شود (کاکوری و چن، ۱۹۹۲).

$$e_i = \frac{ds_i - dS_i}{dS_i} \qquad (۲۵)$$

۵ تفسیر تانسور کرنش

۵-۱ تفسیر هندسی مؤلفه‌های تانسور کرنش

اهمیت تانسور کرنش در مبحث تحلیل تغییر شکل در ارتباط مستقیم مؤلفه‌های آن با تغییر شکل و سهولت تفسیر هندسی تغییر شکل به کمک آنها است. در این بخش به مروری اجمالی بر نحوهٔ تفسیر هندسی مؤلفه‌های تانسور کرنش خواهیم پرداخت. برای این منظور از شکل ۳ و بردار دیفرانسیلی $d\vec{x}$ در دو وضعیت مرجع و جاری آغاز می‌کنیم:



شکل ۳. نمایش بردار $d\vec{x}$ در دو وضعیت مرجع و جاری.

برای تفسیر هندسی مؤلفه‌های E_{kl}، می‌توان معیار تغییر شکلی با عنوان کشیدگی (elongation) به صورت زیر تعریف کرد:

$$E(\vec{N})=\frac{\|d\vec{x}\|\cos\theta-\|d\vec{X}\|}{\|d\vec{X}\|} \tag{۲۶}$$

اگر $\vec{N}$ را بردار یکه در امتداد $d\vec{X}$ بنامیم، رابطهٔ (۲۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E(\vec{N})=\frac{dx_k N^k}{\|d\vec{X}\|}-1 \tag{۲۷}$$

از رابطهٔ (۲۷) با توجه به میز (۱۹۷۰) داریم:

$$E(\vec{N})=\tilde{E}_{kl}N^k N^l \tag{۲۸}$$

رابطهٔ اخیر بیان می‌دارد که، مقدار $E(\vec{N})$ در امتدادهای گوناگون قابل برآورد کردن برحسب مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی است، در ثانی اگر امتداد بردار N^k منطبق بر امتداد بردار پایهٔ $\vec{e}_i$ دستگاه مختصات باشد، مؤلفهٔ $\tilde{E}_{ii}$ تانسور کرنش خطی بیانگر کشیدگی در امتداد $\vec{N}$ خواهد بود.

۵-۲ معیارهای اسکالر تغییر شکل

با استفاده از مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌توان معیارهای اسکالری با تفسیر هندسی مشخص برای بیان تغییر شکل یک جسم ارائه داد. این معیارها عبارت‌اند از:

۱- "کشش" (stretch):

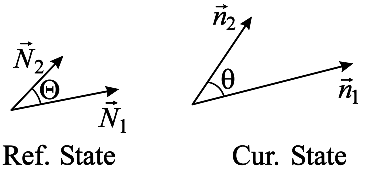
$$\Lambda(\vec{N})=\frac{ds}{dS} \tag{۲۹}$$

۲- "انبساط طولی" (extension):

$$E(\vec{N})=\frac{ds-dS}{dS}=\Lambda(\vec{N})-1 \tag{۳۰}$$

از لحاظ مقدار عددی هیچ تفاوتی بین معیارهای عددی کشش و انبساط طولی در نگرش لاگرانژی و اویلری وجود ندارد و تفاوت آنها فقط در روابط ریاضی مربوطه است.

۳- "برش" (shear): که به صورت تفاضل بین زاویهٔ دو بردار در دو وضعیت مرجع و وضعیت جاری بیان می‌شود.



شکل ٤. زاویهٔ بین دو بردار در دو وضعیت مرجع و جاری.

معیار اسکالر برش با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\vec{N}_1,\vec{N}_2)=\gamma(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=\Theta(\vec{N}_1,\vec{N}_2)-\theta(\vec{n}_1,\vec{n}_2) \tag{۳۱}$$

با استفاده از روابط مربوط به تعریف انبساط طولی می‌توان نشان داد که (ارینگن، ۱۹۶۲):

$$\underset{k\neq l}{2E_{kl}}=\left(1+E(\vec{N}_k)\right)\left(1+E(\vec{N}_l)\right)\sin\Gamma(\vec{N}_k,\vec{N}_l) \tag{۳۲}$$

در این رابطه ارتباط بین برش و مؤلفه‌های خارج از قطر اصلی تانسور کرنش نشان داده شده است. در حالت خاص، زمانی که "انبساط طولی" کوچک باشد (یعنی $E(\vec{N}_k)<<1$) می‌توان تقریب زیر را در نظر گرفت:

$$\underset{k\neq l}{E_{kl}}=\frac{1}{2}\sin\Gamma(\vec{N}_k,\vec{N}_l) \tag{۳۳}$$

اگر مقادیر برش نیز کوچک باشند، داریم:

$$\underset{k\neq l}{E_{kl}}=\frac{1}{2}\Gamma(\vec{N}_k,\vec{N}_l) \tag{۳۴}$$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که عضوهای قطر اصلی تانسور کرنش خطی بیانگر انبساط‌های طولی و عضوهای خارج از قطر اصلی نشان‌دهندهٔ نصف تغییر شکل‌های زاویه‌ای‌اند. یا اگر $\vec{N}_l$ و $\vec{N}_k$ بردارهای یکهٔ در امتداد محورهای مختصات

باشند، عضوهای قطر اصلی تانسور کرنش خطی بیانگر انبساط‌های طولی در امتدا محورهای مختصات و عضوهای خارج از قطر اصلی نشان‌دهندهٔ نصف تغییر زاویهٔ بین محورهای مختصات هستند (ارینگن، ۱۹۶۲).

۵-۳ استفاده از مقادیر ویژهٔ تانسور کرنش در نقش مفسرهای ناوردای تغییر شکل

مقادیر ویژهٔ تانسور کرنش کمیت‌های ناوردایی هستند که برای تفسیر تغییر شکل به کار می‌روند. به کمک این مقادیر معیارهای اسکالر تغییر شکل به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Delta &= \lambda_1+\lambda_2\\ \gamma &= \lambda_1-\lambda_2\end{aligned} \tag{۳۵}$$

در رابطهٔ (۳۵) λ_1 و λ_2 مقادیر ویژهٔ تانسور کرنش بوده و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(E_{11}+E_{22}\pm\sqrt{\left(E_{11}-E_{22}\right)^2+4E_{12}}\right) \tag{۳۶}$$

و Δ انبساط (dilatation) نامیده شده که تفسیر هندسی آن تغییر مساحت واحد سطح است. در واقع Δ بخش یک روند (ایزوتروپیک) تغییر شکل را بیان می‌کند. γ نیز ماکسیمم برش و بخش غیر یک روند تغییر شکل را در همسایگی کوچک یک نقطه نشان می‌دهد. در کاربردهای مهندسی γ براساس دو مؤلفهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\left(E_{11}-E_{22}\right)\\ \nu &= E_{12}\\ \gamma &= \frac{1}{2}\left(\tau^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{۳۷}$$

که در آن τ برش برای امتداد موازی محور y و ν، برش برای امتداد موازی محور x است.

۵-۴ استفاده از بیضی کرنش برای تفسیر تغییر شکل

یکی دیگر از راه حل‌های بیان اطلاعات نهفته در تانسور کرنش استفاده از بیضی کرنش است. در اینجا مقادیر ویژه تانسور کرنش برابر نیم‌قطر بزرگ و کوچک بیضی در نظر گرفته می‌شوند. شکل و ابعاد بیضی کرنش به‌صورت زیر قابل تفسیر است:

۱- اگر "برش" صورت نگرفته باشد، بیضی کرنش تبدیل به "دایره" می‌شود.

۲- در صورت وقوع "انبساط"، مقادیر ویژه "مثبت" خواهند بود.

۳- در صورت وقوع "انقباض"، مقادیر ویژه "منفی" خواهند بود.

بیضی کرنش به مرکز نقاط شبکه رسم و اگر مقادیر ویژه مثبت باشند، پیکان‌هایی رو به بیرون در امتداد قطره‌های آن رسم می‌شود. اگر مقادیر ویژه منفی باشند، شکل مقطع مخروطی مربوطه هذلولی است، اما به جای آن قدر مطلق مقادیر ویژه به منزلهٔ ابعاد بیضی در نظر گرفته می‌شود و فقط نوک پیکان‌ها برای نشان دادن منفی بودن مقادیر ویژه به سمت داخل رسم می‌شوند. جهت قطرهای بیضی نشان‌دهندهٔ جهت‌هایی است که در امتداد آنها حداکثر و حداقل برش صورت گرفته است.

۶ نتایج عددی: مثال شبیه‌سازی شده

در این بخش به ارائهٔ نتایج حاصل از دو مثال شبیه‌سازی شده: (۱) برای تغییر شکل محض (جدول ۱) و (۲) تغییر شکل به همراه انتقال و دوران (جدول ۵) خواهیم پرداخت. همان‌طور که نتایج مندرج در جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهد، محاسبهٔ مقادیر مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی (با استفاده از معادلات (۱۰) یا (۱۱)) از روش معمول (گرادیان بردار جابه‌جایی) و با در نظر گرفتن بخش غیرخطی (با استفاده از معادلات (۸) یا (۹)) منجر به نتایج تقریباً یکسان شده است، هرچند که تفاوتی جزئی

بین نتایج دو حالت وجود دارد. مقایسهٔ نتایج جدول‌های ۳ با ۴ بیانگر این موضوع است که این تفاوت بین نتایج حاصل از گرادیان بردار جابه‌جایی با در نظر گرفتن بخش غیرخطی (با استفاده از معادلات (۸) یا (۹)) و روش پیشنهادی (بر مبنای معادلهٔ (۱۹)) موجود نیست که خود موید دقت زیاد روش پیشنهادی است. حال برای بررسی اثر دوران و انتقال دستگاه مختصات به همراه تغییر شکل به مثال شبیه‌سازی شدهٔ جدول ۵ خواهیم پرداخت. همان‌گونه که نتایج جدول‌های ۶، ۷ و ۸ نشان می‌دهد، تفاوت بین برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی (با استفاده از معادلات (۱۰) یا (۱۱)) و مؤلفه‌های تانسور کرنش، با در نظر گرفتن بخش غیرخطی (با استفاده از معادلات (۸) یا (۹)) قابل توجه شده است در حالی که روش پیشنهادی (بر مبنای معادلهٔ (۱۹)) کماکان نتایج مشابه روش برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش با نظر گرفتن بخش غیرخطی را نتیجه می‌دهد. این نتیجه بسیار قابل توجه است چرا که در عمل معمولاً از تانسور کرنش خطی استفاده شده و به خطای ناشی از آن در صورت وجود دوران و انتقال بین دو دستگاه مختصات در وضعیت جاری و مرجع توجه نشده است. این در حالی است که همان‌طور که ملاحظه شد در صورت وجود انتقال و دوران بزرگ (که بروز آن در عمل امکان‌پذیر است) ممکن است نتایج نادرستی برای مؤلفه‌های تانسور کرنش و تفسیرهای بر پایهٔ آن نتیجه شود. البته این موضوع در مورد کمیت‌های ماکسیمم برش و انبساط که ناوردا هستند صادق نیست.

جدول ۱. مختصات نقاط در وضعیت مرجع و جاری در مثال شبیه‌سازی شده (با اعمال صرف تغییر شکل، بدون دوران و انتقال).

شمارهٔ نقاط	X	Y	x	y
۱	۲	۳	۲ر۰۳	۳ر۰٤
۲	۸	۱۱	۷۷ر۷	۰۷ر۱۱
۳	۶	۰	۸۶ر۵	۰۲ر۰
٤	۹	۴	۰۴۳ر۹	۹۷ر۳
٥	۱۰	۸	۸۵ر۹	۰۳۶ر۸
٦	۷	۶	۰۸۷ر۷	۹۴ر۵

جدول ۲. برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی اویلری (مثال جدول ۱) با استفاده از گردیان جابه‌جایی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
۱-۳-٦	-۰ر۰۱۲۱۶۳۳۹۹	۰ر۰۱۳۶۰۹۲۳۸	-۰ر۰۱۰۶۸۴۹۵۸
٦-۲-۱	۰ر۰۵۰۵۶۸۵۹۵	-۰ر۰۵۲۸۳۴۲۹۳	۰ر۰۳۰۲۸۶۲۳۶
٦-۲-٥	-۰ر۰۴۳۲۷۰۳۷۲	-۰ر۰۱۹۳۸۳۷۶۶	۰ر۰۲۳۰۴۲۵۱
٤-٦-٥	-۰ر۰۵۸۵۸۹۶۱۳	-۰ر۰۰۴۷۱۵۵۵۵	۰ر۰۱۰۹۹۱۰۱۵
٤-٦-۳	۰ر۰۱۳۳۳۹۵۶۳	۰ر۰۱۸۵۰۴۳۴۹	-۰ر۰۱۳۸۰۹۶۷۴

جدول ۳. برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش غیرخطی اویلری (مثال جدول ۱) با استفاده از گردیان جابه‌جایی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
۶-۳-۱	-۰٫۰۱۲۳۳۰۴۹۵	۰٫۰۱۳۷۸۴۸۶۱	-۰٫۰۱۱۵۷۷۰۴۲
۱-۲-۶	۰٫۰۴۸۶۰۰۲۱۷	۰٫۰۵۰۵۳۹۲۰۶	۰٫۰۲۷۴۷۹۷۰۲
۵-۲-۶	-۰٫۰۴۴۳۵۵۵۷۳	-۰٫۰۲۰۷۹۴۹۵۱	۰٫۰۲۱۲۰۷۲۱۵
۵-۶-۴	-۰٫۰۶۰۶۵۴۶۵۲	-۰٫۰۰۵۹۱۰۵۴۹	۰٫۰۱۰۲۸۸۴۲۵
۳-۶-۴	۰٫۰۱۳۲۴۹۵۷۱	۰٫۰۱۸۲۷۶۹۰۵	-۰٫۰۱۴۵۳۷۹۸۸

جدول ۴. برآورد مؤلفه‌های تانسور کرنش اویلری (مثال جدول ۱) با استفاده از روش پیشنهادی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
۶-۳-۱	-۰٫۰۱۲۳۳۰۴۹۵	۰٫۰۱۳۷۸۴۸۶۱	-۰٫۰۱۱۵۷۷۰۴۲
۱-۲-۶	۰٫۰۴۸۶۰۰۲۱۷	-۰٫۰۵۰۵۳۹۲۰۶	۰٫۰۲۷۴۷۹۷۰۲
۵-۲-۶	-۰٫۰۴۴۳۵۵۵۷۳	-۰٫۰۲۰۷۹۴۹۵۱	۰٫۰۲۱۲۰۷۲۱۵
۵-۶-۴	-۰٫۰۶۰۶۵۴۶۵۲	-۰٫۰۰۵۹۱۰۵۴۹	۰٫۰۱۰۲۸۸۴۲۵
۳-۶-۴	۰٫۰۱۳۲۴۹۵۷۱	۰٫۰۱۸۲۷۶۹۰۵	-۰٫۰۱۴۵۳۷۹۸۸

جدول ۵. مختصات نقاط در وضعیت مرجع و جاری در مثال شبیه‌سازی شده (با اعمال تغییر شکل، دوران و انتقال).

شمارهٔ نقاط	X	Y	x	y
۱	۲	۳	۴٫۲۷۸۰۳۱۱	۳٫۶۱۷۷۱۷۲
۲	۸	۱۱	۱۳٫۲۶۴۰۱۷	۷٫۷۰۱۹۰۱۲۱
۳	۶	۰	۶٫۰۸۴۹۰۸۸	-۰٫۹۱۲۶۷۹۴۹۱
۴	۹	۴	۱۰٫۸۱۶۴۶۷	۰٫۹۱۶۶۲۰۸۵۳
۵	۱۰	۸	۱۳٫۵۴۸۳۵۰	۴٫۰۳۴۳۸۰۱۴
۶	۷	۶	۱۰٫۱۰۷۵۲۲	۳٫۶۰۰۶۹۰۸۹

جدول ۶. مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی اویلری (مثال جدول ۵) با استفاده از گرادیان جابه‌جایی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
۶-۳-۱	۰٫۱۴۳۸۷۳۵۹۶	۰٫۰۱۲۱۵۵۵۵۶	۰٫۰۱۳۱۵۴۴۷۲۵
۱-۲-۶	۰٫۱۴۳۵۰۰۵۲۸۷	-۰٫۰۵۰۸۲۶۴۲۹	۰٫۱۷۸۷۷۴۵۴۱
۵-۲-۶	۰٫۰۶۸۴۸۵۱۴۲	-۰٫۰۰۰۲۰۸۶۱۳	۰٫۱۴۵۲۹۷۵۴۹
۵-۶-۴	۰٫۰۶۵۳۱۵۳۹۵	۰٫۰۱۳۳۱۱۳۶۷	۰٫۱۳۰۲۸۹۵۴۱
۳-۶-۴	۰٫۱۶۳۳۱۶۸۹۲	۰٫۰۰۹۲۳۷۹۲۷	۰٫۱۲۱۳۰۰۶۱۴

جدول ۷. مؤلفه‌های تانسور کرنش اویلری (مثال جدول ۵) با استفاده از گرادیان جابه‌جایی و با در نظر گرفتن عبارت‌های غیرخطی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
٦-۳-۱	-۰ر۰۰۰۲۰۴۰۹۲	۰ر۰۰۷۲۱۸٦۸٦	-۰ر۰۲۳۷۰۳۴۴۵
۱-۲-٦	-۰ر۰۰۰۴۴۸۱۴۸	-۰ر۰۳۴۴۱۵۰۵۵	۰ر۰۷٦۵۲۸۰٦۷
۵-۲-٦	-۰ر۰۴۵۹۷۳۸۳۲	۰ر۰۱۷۹۹۲۰۴۵	۰ر۰۲۲۸۲۵۴۷۴
۵-٦-٤	-۰ر۰۴۸۰۳۷۵٦۸	۰ر۰۲۷۷٦۳۹۷۹	-۰ر۰۰۲۳۲۸٦۵۹
۳-٦-٤	۰ر۰۲۲۱۳۰۹۴۵	-۰ر۰۰۲۸۹۳۹۱۳	-۰ر۰۲۳۴۱۹۳٦۳

جدول ۸. مؤلفه‌های تانسور کرنش اویلری (مثال جدول ۵) با استفاده از روش پیشنهادی.

رئوس المان	e_{11}	e_{12}	e_{22}
٦-۳-۱	-۰ر۰۰۰۲۰۴۰۹۲	۰ر۰۰۷۲۱۸٦۸٦	-۰ر۰۲۳۷۰۳۴۴۵
۱-۲-٦	-۰ر۰۰۰۴۴۸۱۴۸	-۰ر۰۳۳۴۱۵۰۵۵	۰ر۰۷٦۵۲۸۰٦۷
۵-۲-٦	-۰ر۰۴۵۹۷۳۸۳۲	۰ر۰۱۷۹۹۲۰۴۵	۰ر۰۲۲۸۲۵۴۷۴
۵-٦-٤	-۰ر۰۴۸۰۳۷۵٦۸	۰ر۰۲۷۷٦۳۹۷۹	-۰ر۰۰۲۳۲۸٦۵۹
۳-٦-٤	۰ر۰۲۲۱۳۰۹۴۵	-۰ر۰۰۲۸۹۳۹۱۳	-۰ر۰۲۳۴۱۹۳٦۳

۶-۱ استنتاج‌های آماری مقادیر ویژه تانسورهای مرتبه دو متقارن

برای عملی ساختن تحلیل‌های آماری، فرض می‌کنیم که تانسورهای تغییر شکل، (کرنش و تنش) یا به‌طور مستقیم مشاهده شده، و یا به طور غیرمستقیم از راه اندازه‌گیری کمیت‌های دیگر، محاسبه شده‌اند. لذا براساس اصل اندازه‌گیری، این تانسورها درحکم متغیرهای تصادفی (random tensor) در نظر گرفته شده و برای آزمون آماری فرض می‌شود، که از تابع توزیع نرمال تانسوری گاوس-لاپلاس (Tensor valued Gauss-Laplace) پیروی می‌کنند. در این بخش تفسیرهای آماری مربوط به مؤلفه‌های فضای ویژه بر پایه مدل خطی‌شده چندمتغیره (Gauss-Markov) صورت می‌گیرد، این مدل، امکان تعریف یک آماره ریاضی مرتبه دو از مؤلفه‌های فضای ویژه را فراهم ساخته، و به کمک آزمون‌های آماری که در قسمت‌های بعد به‌طور مفصل شرح داده می‌شوند تحلیل‌های آماری به طور کامل صورت می‌پذیرد.

۶-۲ تحلیل مقادیر ویژه تانسور مرتبه دو

تانسور کرنش مفروض T_{ij} را در نظر می‌گیریم، همان‌طور که می‌دانیم، به کمک مسئله مقادیر ویژه می‌توان این تانسور را مطابق روابط زیر به صورت قطری تبدیل کرد

$$\begin{aligned} &\vec{U}:\quad T \rightarrow \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \vec{U}^{T} T \vec{U} \\ &(T - \lambda_i I_2) u_i = 0 \quad \text{for } i \in \{1, 2\} \end{aligned} \tag{۴۶}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c|c} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right] \\ &\overline{u_1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix},\ \overline{u_2} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۴۷}$$

همان‌طور که می‌دانیم، مقادیر ویژه و جهت اصلی (جهت ماکسیمم برش)، مطابق روابط زیر بیان می‌شود

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(t_{11}+t_{22}\pm\sqrt{\left(t_{11}-t_{22}\right)^2+4t_{12}^2}\right)$$
$$\alpha=\frac{1}{2}\arctan 2t_{12}/\left(t_{11}-t_{22}\right) \quad (۴۸)$$
$$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

و با در دست بودن مقادیر ویژه و جهت‌های اصلی، به کمک معادلات زیر می‌توان مؤلفه‌های تانسور را محاسبه کرد:

$$t_{11}=\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_2\sin^2\alpha$$
$$t_{12}=t_{21}=\frac{1}{2}\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\sin 2\alpha \quad (۴۹)$$
$$t_{22}=\lambda_1\sin^2\alpha+\lambda_2\cos^2\alpha$$

۶-۳ مدل گاوس- مارکوف برای برآورد مؤلفه‌های فضای ویژه تانسور مرتبه دو

اکنون فرض می‌کنیم که n نمونه از تانسور T، یعنی $T_n,\dots,T_2,T_1$ از طریق مشاهدات یا محاسبه‌های غیرمستقیم در دست است و به کمک آن آرایه‌ای از مؤلفه‌های این تانسورها به صورت زیر طراحی می‌کنیم:

$$Y=\left[\vec{y}_1\ \ \vec{y}_2\ \ \dots\ \ \vec{y}_n\right]=\begin{bmatrix} y_{1.1} & \cdots & y_{1.n}\\ y_{2.1} & \cdots & y_{3.n}\\ y_{3.1} & \cdots & y_{3.n}\end{bmatrix},\ Y\in R^{3\times n} \quad (۵۰)$$

که در آن $\vec{y}_i$ها بردارهای 3×1 بعدی است، به‌طوری‌که

$y_1=t_{11}, y_2=t_{21}, y_3=t_{22}$ و $\vec{y}_1=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$، و لذا

$y_{2.3}$ اشاره به مؤلفه t_{21} در نمونه سوم دارد. ماتریس واریانس-کوواریانس کمیت Y با توجه به مستقل بودن نمونه‌ها، با معادله زیر بیان می‌شود:

$$D\left\{vecY\right\}=\begin{bmatrix}\sum\vec{y}_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sum\vec{y}_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \sum\vec{y}_n\end{bmatrix} \quad (۵۱)$$

و درصورتی‌که تابع توزیع متغیرهای $y_n,\dots y_2,y_1$ یکسان باشد، خواهیم داشت:

$$D\left\{vecY\right\}=I_n\otimes\sum Y\in R^{3n\times3n} \quad (۵۲)$$

۱- مدل غیرخطی

$$Y=F\left(\xi\right)l^T+\bar{E} \quad (۵۳)$$

در رابطهٔ فوق F یک تابع به تعریف زیر

$$F=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\cos^2\xi_3+\xi_2\sin^2\xi_3\\ \frac{1}{2}\left(\xi_1-\xi_2\right)\sin 2\xi_3\\ \xi_1\sin^2\xi_3+\xi_2\cos^2\xi_3\end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$\left.\begin{matrix}\xi_1=\lambda_1\\ \xi_2=\lambda_2\\ \xi_3=\alpha\end{matrix}\right\}\ \text{and}\ \left\{\begin{matrix}f_1=t_{11}\\ f_2=t_{21}\\ f_3=t_{22}\end{matrix}\right.$$

و l یک بردار $n\times1$، است که همهٔ درایه‌های آن یک است و به آن بردار مجموع‌یابی (summation vector) می‌گویند.

۶-۴ مدل خطی شده

به منظور برآورد مؤلفه‌های فضای ویژه، معادلات مشاهدات غیرخطی را با بسط به سری تیلور تا مرتبه یک خطی می‌کنیم

$$F\left(\xi\right)-F\left(\xi_0\right)=J\left(\xi_0\right)\left(\xi-\xi_0\right)+O\left[\left(\xi-\xi_0\right)\otimes\left(\xi-\xi_0\right)\right] \quad (۵۵)$$

اولین گروه مشاهدات یعنی $\begin{bmatrix}y_{1.1}\\y_{2.1}\\y_{3.1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11.1}\\t_{21.1}\\t_{22.1}\end{bmatrix}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\xi_0=\begin{bmatrix}\lambda_{1.1}\\ \lambda_{2.1}\\ \alpha_{.1}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}t_{11.1}+t_{22.1}+\sqrt{\left(t_{11.1}-t_{22.1}\right)^2+4t_{21.1}^2}\\ t_{11.1}+t_{22.1}-\sqrt{\left(t_{11.1}-t_{22.1}\right)^2+4t_{21.1}^2}\\ \arctan 2t_{21.1}/\left(t_{11.1}-t_{22.1}\right)\end{bmatrix}$$

(۵۶)

و ماتریس ژاکوبی J (ماتریس ضرایب) که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=J(\xi_0)=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha_{.1} & \sin^2\alpha_{.1} & (\lambda_{2.1}-\lambda_{1.1})\sin 2\alpha_{.1}\\ \frac{1}{2}\sin 2\alpha_{.1} & -\frac{1}{2}\sin 2\alpha_{.1} & -(\lambda_{2.1}-\lambda_{1.1})\cos 2\alpha_{.1}\\ \sin^2\alpha_{.1} & \cos^2\alpha_{.1} & -(\lambda_{2.1}-\lambda_{1.1})\sin 2\alpha_{.1}\end{bmatrix}$$

(۵۷)

به این ترتیب اکنون می‌توانیم با در دست داشتن مقادیر اولیه و استفاده از مدل سرشکنی به شکل پارامتری، مؤلفه‌های فضای ویژه و ماتریس واریانس کوواریانس آنها را برطبق روابط زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}&=\xi_0+\Delta\hat{\xi}\\ \Delta\hat{\xi}&=L\left(\mathrm{vec}Y-\mathrm{vec}Y_0\right)=\left(A^T{\sum}^{-1}A\right)^{-1}A^T{\sum}^{-1}\\ &\quad\left(\mathrm{vec}Y-\mathrm{vec}Y_0\right)\\ &=\left[l^T\otimes\left(A^T{\sum}_y^{-1}A\right)^{-1}A^T{\sum}_y^{-1}\right]\left(\mathrm{vec}Y-\mathrm{vec}Y_0\right)\\ &=A^{-1}\left(Y.l-F(\xi_0)\right)\end{aligned}$$

(۵۸)

با ماتریس واریانس-کواریانس به شکل زیر:

$$D\left(\hat{\xi}\right)=\sum\hat{\xi}=\left(A^T{\sum}_y^{-1}A\right)^{-1} \qquad (۵۹)$$

از آنجا که ماتریس واریانس-کوواریانس بردار مشاهدات در دست نیست، لذا ناچاریم آن را به کمک روش‌های تجربی برآورد، و سپس برآورد آن را مطابق رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\hat{\sum}_{\hat{y}}&=\frac{1}{n-1}\left(Y-Y_0\right)\left(I_n-\frac{1}{n}ll^T\right)\left(Y-Y_0\right)^T\\ &=\hat{\sigma}_0^2A\left(\sum\hat{\xi}\right)A^T\end{aligned}$$

(۶۰)

۶-۵ آزمون‌های آماری مربوط به مؤلفه‌های فضای ویژه تانسور اتفاقی مرتبه دو

با توجه به آنالیزهای مربوط به فضای ویژه که با کمک مدل گاوس- مارکوف صورت گرفته است و نتایج آن که حاوی $\Delta\hat{\xi}$، به عنوان بهترین برآورد بدون خطای $\Delta\xi$، و $\hat{\sum}_{\hat{y}}$، به‌منزلهٔ برآورد بدون خطای ناوردای $\sum_y$ است، اکنون قادریم، که اعتبار آماری مؤلفه‌های فضای ویژه و ماتریس واریانس-کوواریانس مربوط به آن را تعیین کنیم، مدل‌های ریاضی ساده‌ای برای اجرای آزمون آماری را کای و همکاران (۲۰۰۴) پیشنهاد کرده‌اند که به کمک آنها یک مدل تقریبی برای توزیع تانسورها در آزمون‌های آماری در نظر گرفته می‌شود. این آماره‌ها شامل معیار اندازه‌گیری ($T^2-\text{criterion}$) (لاولی، ۱۹۳۸؛ هاتلینگ، ۱۹۵۱) و نسبت احتمال (likelihood ratio) (ویلکس، ۱۹۳۲) هستند. در عمل آزمون‌های چندمتغیری که در زیر بیان می‌شوند، در مورد عضوهای فضای ویژه تانسور کرنش و ماتریس پراکندگی آن صورت خواهد پذیرفت.

آزمون اول: به منظور آزمایش برابر بودن المان‌های ویژه با مقدار ξ، در مقابل مقدار فرضی ξ_0، با استناد به معیار T^2، صورت می‌پذیرد، لذا فرض‌های آماری در این آزمون به صورت زیر بیان می‌شود

1st test

$$H_0:\ \xi=\xi_0 \quad H_a:\ \ \xi\neq\xi_0,\ \sum_y \text{unspecified}$$

(۶۱)

آماره ریاضی که در اینجا با توجه به معیار T^2، در نظر گرفته می‌شود به صورت زیر است

$$R=n\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]'$$

$$\begin{aligned}T^2&=\mathrm{tr}\left(R\Omega^{-1}\right)=\left(\frac{n}{n-1}\right)\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]'A^T\hat{\sum}_y^{-1}A\left[\hat{\xi}-\xi_0\right] \qquad (۶۲)\\ &=\frac{1}{n-1}\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]'\hat{\sum}_{\hat{\xi}}^{-1}\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]\end{aligned}$$

این آماره را می‌توان با تابع توزیع فیشر تقریب زد.

$$\text{(if } n \geq 6)$$
$$\frac{n-3}{3}T^2 \sim F(3, n-3) \quad \text{under } H_0 \tag{۶۳}$$

لذا سطح اطمینان آن (α fractile) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P\left\{T^2 \leq \frac{3}{n-3}F_{\alpha;3,n-3}\right\} = P\left\{\left[\hat{\xi}-\xi_0\right]' \sum\nolimits_{\hat{\xi}}^{\wedge -1} \left[\hat{\xi}-\xi_0\right] \leq \frac{3(n-1)}{n-3}F_{\alpha;3,n-3}\right\} = 1-\alpha = \gamma \tag{۶۴}$$

با انتخاب یک سطح اطمینان مشخص، می‌توانیم در مورد فرض مقابل تصمیم‌گیری کنیم، یعنی اگر

$$(n-1)T^2 = \left[\hat{\xi}-\xi_0\right]' \sum\nolimits_{\hat{\xi}}^{\wedge -1} \left[\hat{\xi}-\xi_0\right] > \frac{3(n-1)}{n-3}F_{\alpha;3,n-3} = (n-1)T^2_{1-\alpha} \tag{۶۵}$$

آن‌گاه فرض صفر در سطح اطمینان α، رد می‌شود.

آزمون دوم: این آزمون که برای تک تک عضوهای فضای ویژه در مقابل یک مقدار داده شده به‌کار می‌رود، می‌توان آماره‌های آن را به‌صورت زیر نشان داد:

$$t_1 = \frac{\hat{\lambda}_1 - \lambda_{1,0}}{\hat{\sigma}_1} \quad t_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_{2,0}}{\hat{\sigma}_2} \quad t_3 = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{\hat{\sigma}_3} \tag{۶۶}$$

در این رابطه کمیت‌های σ_i، عناص قطری ماتریس $D(\hat{\xi})$ و آماره‌های t_j، از تابع توزیع $t-\text{student}$ با درجه آزادی $n-1$ پیروی می‌کنند، برای مثال در یک آزمون دوطرفه داریم:

$$P\left\{t_{\alpha_1} \leq t_j \leq t_{\alpha_2}\right\} = P\left\{c_{1\alpha} = t_{\alpha_1}\hat{\sigma}_j + \xi_{0j} \leq \hat{\xi}_j \leq t_{\alpha_2}\hat{\sigma}_j + \xi_{0j} = c_{2\alpha}\right\} = 1-\alpha = \gamma \tag{۶۷}$$

احتمال خطای α با توجه به ضرایب برخال (فراکتال) $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}$ که معمولاً نسبت به ξ_0 در وضعیت متقارن انتخاب می‌شوند، به صورت $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ هستند و عبارت $c_{i\alpha}$ را مقدار بحرانی (critical value) می‌گویند. شایان ذکر است که آماره t_j^2 نیز توزیع فیشر دارد و در مورد این اماره خواهیم داشت:

$$t_j^2 \sim F(1, n-1)$$
$$P\left\{t_j^2 \leq F_{\alpha;1,n-1}\right\} = P\left\{-t_{\alpha/2} \leq t_j \leq t_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha = \gamma \tag{۶۸}$$

مثال اول:

الف) در اینجا آزمون مقادیر ویژه را در مورد تانسور $t_{ij} = \begin{bmatrix} -0.006998 & -0.008692 \\ -0.008692 & 0.001597 \end{bmatrix}$ با انحراف‌معیار $\sigma_1 = .0001321$, $\sigma_2 = .000321$, $\sigma_3 = .000023$ با نمونه مشاهداتی زیر به اجرا درمی‌آوریم:

$$Y = \begin{bmatrix} -0.006112 & -0.008692 & 0.001456 \\ -0.006532 & -0.007765 & 0.001390 \\ -0.007721 & -0.007871 & 0.001231 \\ -0.007160 & -0.007998 & 0.001331 \\ -0.007211 & -0.008021 & 0.001221 \\ -0.007312 & -0.008112 & 0.001432 \\ -0.006732 & -0.008543 & 0.001654 \\ -0.006876 & -0.008634 & 0.001662 \\ -0.006532 & -0.008423 & 0.001432 \\ -0.002134 & -0.005446 & 0.001553 \end{bmatrix} \tag{۶۹}$$

نتایج حاصل از این مثال شبیه‌سازی شده به‌صورت زیر است:

۱- مقادیر برآوردشده کمیت‌های مجهول

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01136864 \\ 0.00637264 \\ 0.55564339 \end{bmatrix} \tag{۷۰}$$

۲- ماتریس واریانس-کوواریانس برآوردشده کمیت‌های مجهول

$$\hat{\sigma}_{\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} 0.00004945 & -0.000022672 & -0.0004945 \\ -0.00002267 & 0.0000280056 & 0.0007700 \\ -0.00049457 & 0.000770056 & 0.0299522 \end{bmatrix}$$

(۷۱)

حال مقادیر ویژه برآورد شده را در مقابل مقدار ویژه تانسور t_{ij}، در سطح اطمینان ۹۵ درصد و با توجه به آزمون شماره (۱) می‌آزماییم لذا فرض صفر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_0 : \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01239 \\ 0.00699 \\ 0.55581 \end{bmatrix} \quad (۷۲)$$

با توجه به رابطه (۶۲) مقدار آماره T^2 برابر با $T^2 = 3.28$ است از جدول‌های مربوط به تابع توزیع فیشر مقدار $F_{5\%,3,7} = 4.35$، و لذا $\frac{3}{n-3}F_{5\%,3,7} = 1.305$، در نتیجه $T^2 > \frac{3}{n-3}F_{\alpha,3,7}$، و آزمون مورد نظر با توجه به رابطه (۶۴) در سطح اطمینان 95%، رد می‌شود.

مثال دوم:

ب) در نمونه شماره (۲) تانسور $t_{ij} = \begin{bmatrix} .436 & -.149 \\ -.149 & .248 \end{bmatrix}$، با انحراف‌معیار $\sigma_1 = .094$, $\sigma_2 = .054$, $\sigma_3 = .065$ و نمونه شبیه‌سازی‌شده زیر مورد تحلیل قرار خواهیم داد.

$$Y = \begin{bmatrix} 0.3513 & -0.1305 & 0.2615 \\ 0.3913 & -0.1381 & 0.2224 \\ 0.4281 & -0.1664 & 0.2526 \\ 0.3970 & -0.1523 & 0.2786 \\ 0.3418 & -0.1269 & 0.2390 \\ 0.3790 & -0.1304 & 0.2180 \\ 0.3547 & -0.1736 & 0.2501 \\ 0.4102 & -0.1336 & 0.2299 \\ 0.4416 & -0.1686 & 0.2363 \\ 0.2319 & -0.1408 & 0.2370 \\ 0.4679 & -0.1408 & 0.2428 \end{bmatrix} \quad (۷۳)$$

نتایج حاصل از این مثال شبیه‌سازی‌شده به صورت زیر است:

مقادیر مجهول‌های برآوردشده

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.473277 \\ 0.150631 \\ -0.56307 \end{bmatrix} \quad (۷۴)$$

ماتریس واریانس کوواریانس برآوردشده مجهول‌ها

$$\hat{\sigma}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.008864 & -0.00105 & 0.000805 \\ -0.00105 & 0.007753 & 0.003697 \\ 0.000805 & 0.003697 & 0.03899 \end{bmatrix}$$

(۷۵)

مانند حالت قبل، آزمون شماره یک را با در نظر گرفتن مقادیر ویژه تانسور T، درحکم فرض صفر عملی می‌سازیم

$$H_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51817 \\ 0.16582 \\ -0.50399 \end{bmatrix} \quad (۷۶)$$

$$T^2 = 0.1108$$

$$\frac{3}{n-3}F_{5\%,3,8} = \frac{3}{11-3} \times 4.07 = 1.52$$

و لذا چون $1.52 > 0.1108$، فرض صفر در سطح اطمینان 95%، پذیرفته می‌شود.

اکنون در مورد این نمونه آزمون شماره ۲ را اجرا می‌کنیم، آزمون شماره ۲ در حقیقت آزمون تک تک مقادیر ویژه نسبت به مقدار داده شده است، لذا داریم:

$$H_0 : \lambda_1 = 0.5178 \quad \lambda_2 = 0.16582 \quad \lambda_3 = -0.50399$$

با توجه به آماره‌های تعریف شده با روابط (۶۶) و جدول‌های مربوط به تابع توزیع استیودنت $(t-\text{student})$ مقادیر آماره‌های تعریف شده برای یک توزیع دو طرفه و در سطح اطمینان ۹۵٪ به صورت زیر است:

$$t_{10,\alpha/2} = -2.23$$
$$t_{10,1-\alpha/2} = 2.23 \quad (۷۷)$$

لذا مقادیر مرزی بحرانی که با در رابطه معرفی شد، به

صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$c_{\lambda_1,\alpha/2} = .008864 \times (-2.23) + .51817 = 0.4984$$
$$c_{\lambda_1,1-\alpha/2} = .008864 \times (2.23) + .51817 = 0.5379$$
$$c_{\lambda_2,\alpha/2} = .007753 \times (-2.23) + .16582 = 0.1485$$
$$c_{\lambda_2,1-\alpha/2} = .007753 \times (2.23) + .16582 = 0.1831$$
$$c_{\theta,\alpha/2} = .03899 \times (-2.23) - .50399 = -0.5909$$
$$c_{\theta,1-\alpha/2} = .03899 \times (2.23) - .50399 = -0.4170$$
(۷۸)

حال باید مقادیر برآوردشده کمیت‌های مجهول، متعلق به بازه بحرانی محاسبه شده با روابط (۶۸) باشند:

$$\begin{aligned} .4984 &< .4732 < .5379 \\ .1485 &< .15063 < .1831 \\ -.5909 &< -.5637 < -.4170 \end{aligned} \quad (۷۹)$$

و لذا این آزمون نیز در سطح اطمینان مورد نظر پذیرفته می‌شود.

۷ شبکهٔ ژئودینامیک کشور

با توجه به تجاربی که طی مثال‌های شبیه‌سازی‌شده کسب شد، شبکهٔ ژئودینامیک کشور، مورد تحلیل تغییر شکل قرار داده شد. این شبکه که دارای پوشش ملی است، از سازمان نقشه‌برداری کشور ایجاد شده است و ایستگاه‌های آن مجهز به گیرنده‌های دائمی GPS هستند. برای این منظور از سازمان نقشه‌برداری، مختصات ایستگاه‌های شبکهٔ ژئودینامیک در دو اپک زمانی در چارچوب مختصاتی ITRF-2000 اخذ شد. برای تعیین تغییر شکل‌های سطحی و برآورد تانسور کرنش صفحه‌ای، ابتدا مختصات این نقاط به مختصات ژئودزی (WGS84) تبدیل، و سپس به سامانه تصویر متشابه‌ای که به تازگی صفری و اردلان (۲۰۰۷) برای ایران طراحی کرده‌اند، منتقل شد. بدیهی است، از آنجا که خاصیت تشابه سامانه تصویر فقط موجب حفظ زوایا می‌شود، طول‌ها در این انتقال دستخوش واپیچش شده و لذا طول‌ها در سامانه تصویر با طول‌های واقعی متفاوت می‌شوند و این تفاوت برای طول‌های بلند می‌تواند بسیار قابل توجه باشد. برای رفع این مشکل در هر سامانه تصویر، کمیتی به نام "ضریب مقیاس" که تابعی از مختصات جغرافیایی و کمیتی یک روند است، تعریف می‌شود. تا به اعمال این ضریب به طول‌ها، واپیچش‌های ایجاد شده رفع شوند. از جمله بررسی‌ها تکتونیکی که در مورد شبکه ژئودینامیک کشور صورت پذیرفته است می‌توان به ورنانت و همکاران ۲۰۰۴، که در آن از مشاهدات سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱ ایستگاه‌های GPS، و بردارهای سرعت حاصل به آنالیز جابه‌جایی پلیت‌های تکتونیکی پرداخته و نتایج حاصل از آن با مدل‌های جهانی حرکت پلیت‌ها و دیت‌های لرزه‌نگاری مقایسه شده‌اند، و همچنین شهامت افشرده (۱۳۸۱) که با مشاهدات ۳۰ ایستگاه، بین دو وحله زمانی ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱ و با استفاده از نگرش ذاتی (روشی استاندارد در بررسی تغییر شکل یک رویه) و به کمک تانسورهای تغییر شکل نوع اول و تانسور دوران رویه حرکات تکتونیکی پوسته را در منطقهٔ تحقیقاتی مورد بررسی قرار دادند، اشاره کرد.

محاسبه‌هایی که در این مقاله برای بررسی تغییر شکل شبکهٔ ژئودینامیک کشور صورت گرفت به شرح زیر است:

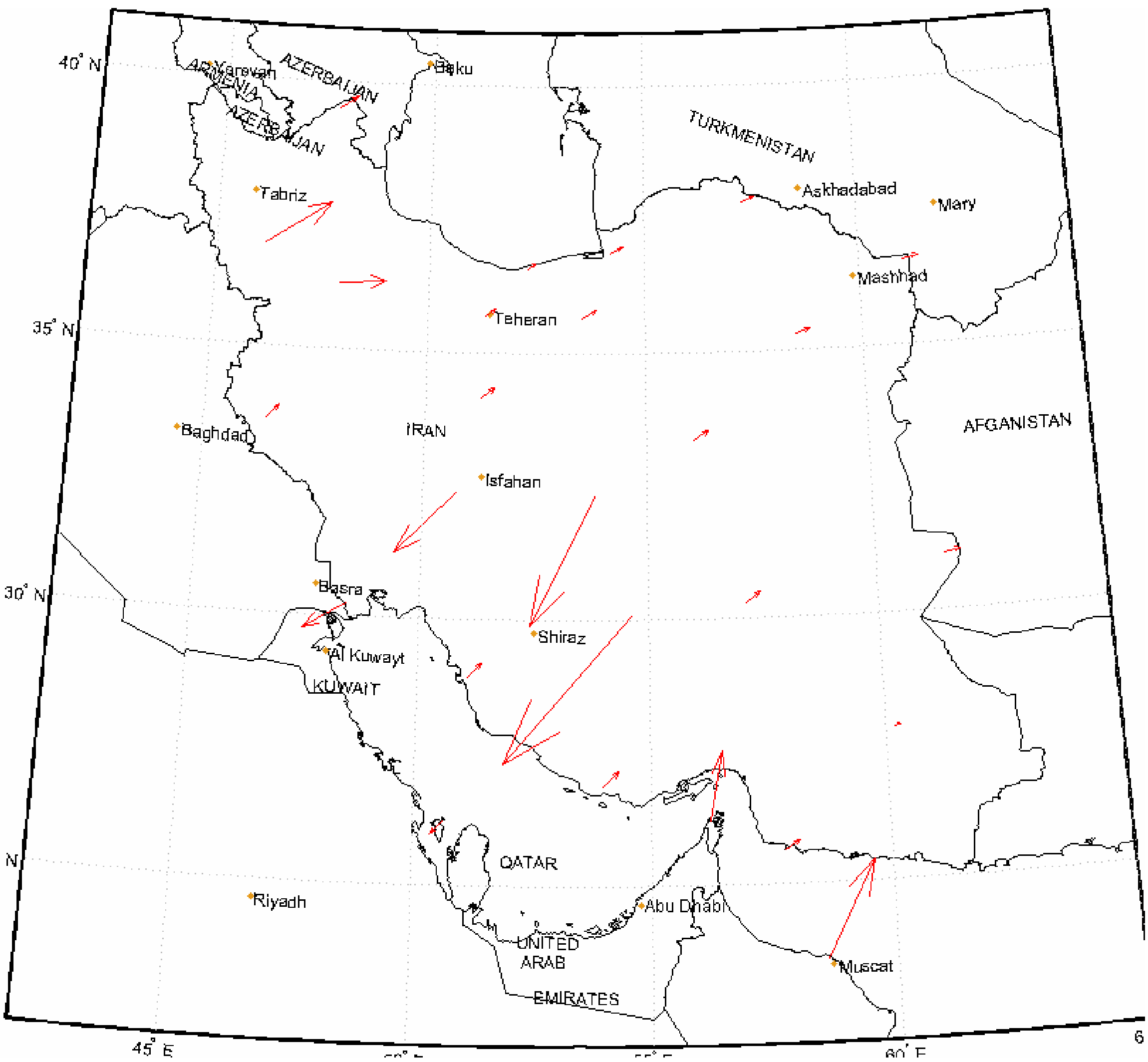
۱- محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش و مقادیر ویژهٔ آن به روش پیشنهادی با استفاده از المان‌های محدود مثلثی.

۲- محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش و مقادیر ویژهٔ آن به روش پیشنهادی با استفاده از تفاضل‌های محدود.

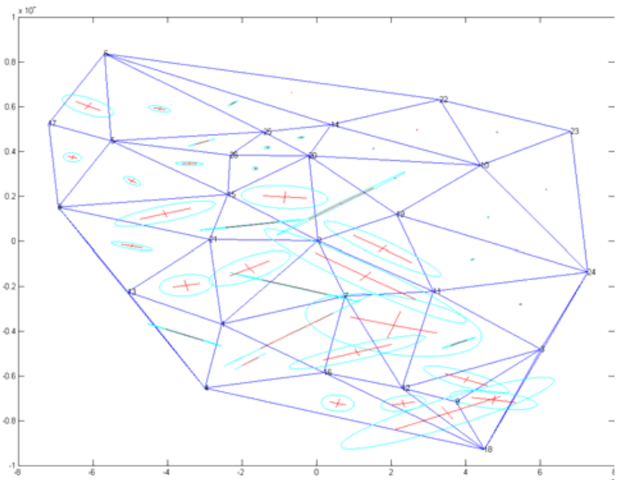
۳- محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش و مقادیر ویژهٔ آن به روش گرادیان بردار جابه‌جایی با استفاده از المان‌های محدود مثلثی.

۴- محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش و مقادیر ویژهٔ آن به روش گرادیان بردار جابه‌جایی با استفاده از تفاضل‌های محدود.

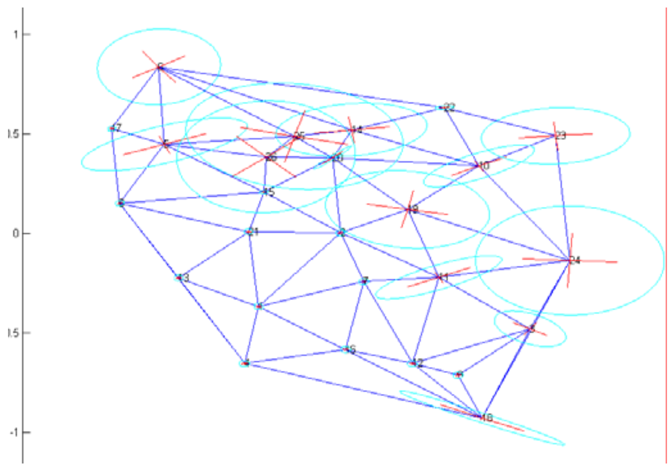
در شکل ۵ ایستگاه‌های ژئودینامیک به همراه بردارهای جابه‌جایی، در سامانه تصویر نمایش داده شده‌اند. همچنین در شکل ۶ المان‌های مثلثی ایجاد شده با استفاده از روش دلونی ملاحظه می‌شوند. مقادیر کرنش‌های اصلی (در راستای بردارهای ویژهٔ تانسور کرنش) برای هر المان به همراه بیضوی کرنش مربوطه نیز در این شکل‌ها نمایش داده شده است، که نشان‌دهنده جهت‌های ماکسیمم و مینیمم تغییر شکل هستند. تانسور کرنش در این حالت به مرکز المان مثلثی نسبت داده می‌شود. در شکل ۷ مقادیر کرنش‌های اصلی به همراه بیضوی کرنش برای تک تک نقاط شبکه با استفاده از روش تفاضل‌های محدود محاسبه شده و جهت‌های اصلی تغییر شکل در راستای بردارهای ویژهٔ تانسور کرنش برای همهٔ نقاط رسم شده است.



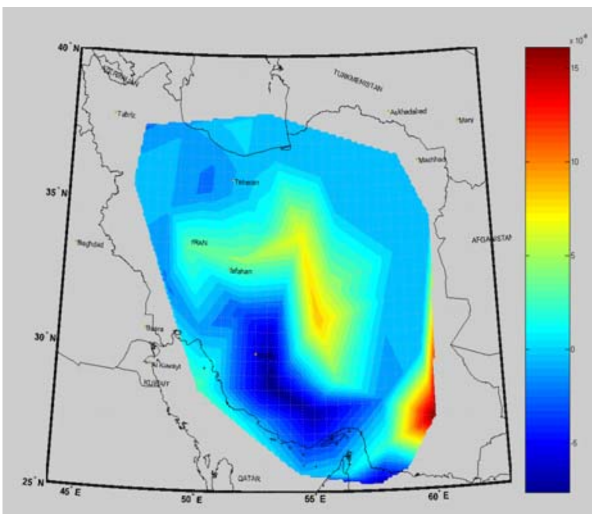
شکل ۵. نمایش بردارهای جابه‌جایی در سامانه تصویر.



شکل ٦. نمایش المان‌های مثلثی به همراه بیضی‌های کرنش و امتدادهای ماکسیمم و مینیمم تغییر شکل المان.



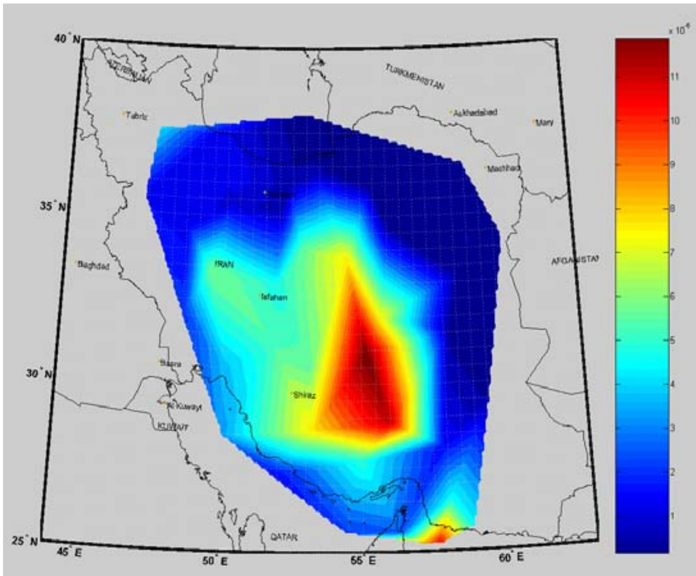
شکل ۷. نمایش بیضی‌های کرنش و جهت‌های ماکسیمم و مینیمم تغییر شکل برای تک تک نقاط شبکه (به روش تفاضل محدود).



شکل ۸. نمایش تغییرات انبساط در نقاط گوناگون شبکه.

در شکل ۸ مقادیر کمیت انبساط برحسب مختصات ژئودتیکی نقاط شبکه ترسیم شده‌اند. مقادیر مثبت نشان‌دهنده کشیدگی و مقادیر منفی نشان‌دهنده انقباض شبکه‌اند. با توجه به شکل ۸ دیده می‌شود، که مقدار ماکسیمم کمیت انبساط (Δ) که نشان‌دهنده انبساط شبکه (با علامت مثبت) است برابر $2.88\times10^{-6}\,\mathrm{unityr}^{-1}$ و در ناحیه‌ای در جنوب شرقی کشور، و مقدار ماکسیمم این کمیت که نشان‌دهنده انقباض شبکه (با علامت منفی) است برابر $1.03\times10^{-6}\,\mathrm{myr}^{-1}$، و در نواحی غرب و جنوب غربی کشور اتفاق افتاده است. علاوه بر آن دیده می‌شود، که شبکه ژئودینامیک کشور در قسمت‌های مرکزی بیشتر در حال انبساط بوده و با حرکت از قسمت مرکزی در جهت‌های شرق و شمال شبکه مقدار انبساط با نرخ ثابتی کاهش یافته، تا به مقدار صفر رسیده و از آن پس، با حرکت در جهت غربی و کمربند جنوب غربی، شبکه دچار انقباض شده است. انقباض شبکه در این قسمت‌ها می‌تواند ناشی از حرکت پلیت تکتونیک ایران به سمت پلیت عربستان باشد که بر طبق یافته‌های زمین‌شناسی و تکتونیکی موجود، این دو پلیت نسبت به همدیگر داری حرکت‌های همگرایی هستند. در قسمت‌های شمال شرقی و شمالی کشور با توجه به نتایج حاصل، مقدار انبساط یا انقباض شبکه نسبت به سایر مناطق ناچیز و اغلب مقدار تغییرات نزدیک به صفر است. در حالت کلی می‌توان گفت که شبکه در اکثر نقاط (پهنه وسیعی از نواحی مرکزی و قسمت جنوب شرقی) در حال انبساط است. شکل ۹ مقادیر کمیت برش را در نقاط گوناگون نمایش می‌دهد.

در این شکل مقادیر کمیت ماکسیمم برش برحسب مختصات ژئودتیکی نقاط ترسیم شده‌اند و همان‌طور که از رابطه ریاضی مربوط به آن انتظار می‌رود مقدار این کمیت همواره مثبت است. با توجه به شکل ۹ دیده می‌شود که مقدار ماکسیمم کمیت برش برابر $2.04\times10^{-6}\,\mathrm{unityr}^{-1}$ و در قسمت مرکزی ایران، رخ داده است. علاوه بر آن مشاهده می‌شود، که مقدار برش با حرکت از قسمت مرکزی شبکه ژئودینامیک به سمت سایر قسمت‌های شبکه با نرخ تقریباً ثابتی کاهش یافته است و در قسمت‌های



شکل ۹. نمایش تغییرات برش در نقاط گوناگون شبکه.

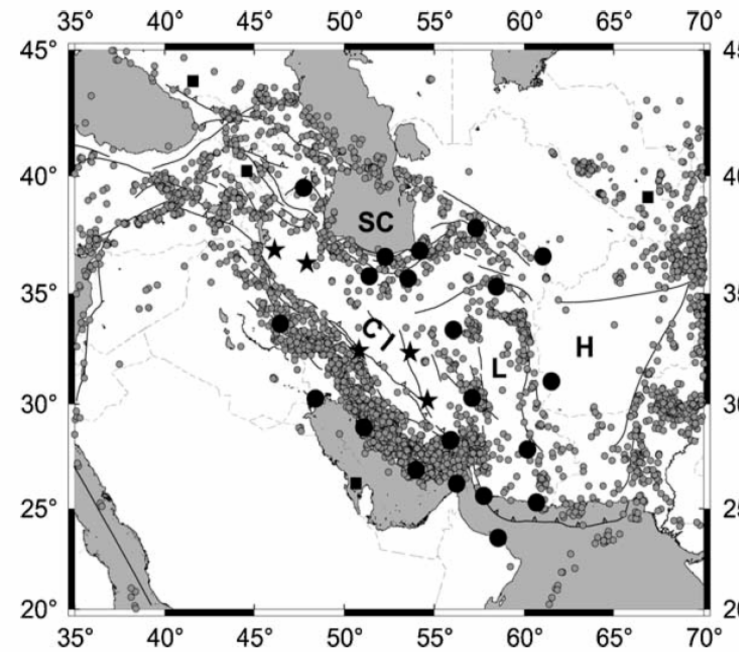
شمال شرقی و شرقی شبکه به مینیمم مقدار خود می‌رسد. علاوه بر آن مقایسه شکل‌های ۸ و ۹، نشان می‌دهند که مقادیر ماکسیمم کمیت‌های انبساط (مقدار قدر مطلق این کمیت) و برش تقریباً برابر و به ترتیب در نواحی جنوب غربی و مرکزی شبکه اتفاق افتاده است. نقشه فعالیت‌های لرزه‌ای منطقه در شکل ۱۰ نمایش داده شده است:

با توجه به شکل ۱۰، دیده می‌شود، که کشور ایران از دو کمربند تکتونیکی فعال تشکیل شده است که یکی از قسمت غربی کشور آغاز می‌شود و تا قسمت جنوب منطقه ادامه می‌یابد و دیگری رشته فعالی است که در دامنه شمالی کشور مشاهده می‌شود. با توجه به شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که، بیشتر فعالیت‌های تکتونیکی در کمربند غربی و نواحی مرکزی کشور رخ داده‌اند و در نتیجه ماکسیمم مقادیر جابه‌جایی‌های پوسته‌ای نیز در این مناطق رخ داده‌اند، که با توجه به نتایج حاصل از شکل‌های ۱۰ و ۱۲ که مقادیر ماکسیمم انبساط و برش را در این مناطق نشان می‌دهد در همخوانی کامل است. از آنجا که فاصله ایستگاهای مورد استفاده تقریباً نزدیک به ۳۰۰ کیلومتر است، لذا تحلیل تغییر شکل حاصل، الگویی از فعالیت‌های تکتونیکی بزرگ‌مقیاس را در منطقه تحقیقاتی نمایش می‌دهد.

۸ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، اهمیت تانسور کرنش در تفسیر تغییر شکل مورد بحث قرار گرفته است، روشی جدید برای محاسبهٔ آن پیشنهاد شده، و کارایی و نقاط قوت آن طی مثال‌های متعدد مشخص شده است. خصوصیات روش ارائه شده را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱- برخلاف اکثر روش‌های معمول که در آنها تغییر شکل بر مبنای تفسیر بردار جابه‌جایی صورت می‌گیرد، در اینجا از کمیت کرنش و مفسرهای ناوردای آن استفاده شده، که مزیت عمده آن نبود وابستگی به دستگاه مختصات است. به‌علاوه از این راه، نیاز به



شکل ۱۰. نقشه فعالیت‌های لرزه‌ای ایران.

اجرای آزمون‌های آماری به منظور تعیین معنی‌دار بودن بردار جابه‌جایی از مسئله حذف می‌شود.

۲- در این تحقیق، به‌جای استفاده از گرادیان جابه‌جایی که روشی معمول در محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش است، به طور مستقیم تانسور کرنش از تغییر در طول‌ها و زوایای بین نقاط، برآورد و نیاز به محاسبه بردار جابه‌جایی و تشکیل مشتق‌های نسبی آن در تعیین تانسور کرنش مرتفع شد. محاسبهٔ مسقیم مؤلفه‌های تانسور کرنش موجب می‌شود که یک مرحله از مراحل تعیین تانسور کرنش در مقایسه با روش معمول آن کاهش یابند. همچنین همانگونه که نتایج جدول‌های ۵ تا ۸ نشان می‌دهد، درصورتی‌که تغییرات دستگاه مختصات (دوران یا انتقال) در دو اپک متوالی قابل ملاحظه باشد، محاسبهٔ مؤلفه‌های تانسور کرنش خطی از راه بردار جابه‌جایی با خطا مواجه می‌شود. درحالی که روش پیشنهادی در این مقاله، کماکان عاری از مشکل باقی خواهد ماند. در ثانی با توجه به تشکیل نشدن بردار جابه‌جایی و محاسبات مشتقات جزئی، استفاده از این روش در تحلیل تغییر شکل در فضای سه‌بعدی باعث سهولت در به انجام رساندن محاسبه‌ها می‌شود.

۳- برای به انجام رساندن محاسبه‌ها در صفحه و تعیین تانسور کرنش صفحه‌ای، از سامانهٔ تصویر متشابه منطقه‌ای استفاده شده و برای حذف واپیچش طولی از ضریب مقیاس مربوط استفاده شده تا مقادیر تانسور کرنش به کمک اندازهٔ واقعی طول‌ها به‌درستی از روش پیشنهادی مقاله طی معادلهٔ ۲۷ برآورد شود.

۴- استفاده از روش المان محدود (که در آن تغییر شکل در محدودهٔ یک المان دیفرانسیلی بررسی می‌شود) و تفاضل محدود (که در آن تغییر شکل به صورت نقطه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد) در این تحقیق باعث فراهم شدن نگرشی جامع و کامل در مورد تغییر شکل شبکه شده است که این موضوع در مورد شبکهٔ ژئودینامیک کشور به نمایش گذارده شد.

۵- در اختیار بودن تانسور کرنش به همراه مقادیر ویژهٔ آن، به‌مثابهٔ نتیجهٔ نهایی این تحقیق، امکان تعیین تانسور تنش را برای ارزیابی رفتار رئولوژیکی پوستهٔ زمین، و تعیین پارامترهای مفسر تغییر شکل فراهم می‌آورد.

۶- همهٔ مراحل پیش‌گفته با استفاده از روش معمول برآورد تانسور کرنش نیز در هر دو نگرش (المان محدود و تفاضل محدود) صورت پذیرفت تا بدین ترتیب کارایی و قابلیت‌های روش پیشنهادی در مقایسه با روش معمول بهتر روشن شود.

در پایان می‌توان نتیجه گرفت که به روشی کارآمد و قابل اطمینان در تعیین تغییر شکل دست یافته‌ایم که می‌تواند در تحقیقات ژئودینامیک از راه مشاهدات ژئودزی مورد استفاده و بهره‌برداری قرار گیرد.

منابع

اسماعیلی، و.، ۱۳۸۰، کنترل و تغییر شکل دقیق سازه‌های حساس، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه مهندسی نقشه‌برداری، دانشکده فنی دانشگاه تهران.

شهامت افشرده، ا.، ۱۳۸۱، بررسی نقش تنسور دوران به عنوان معیاری برای تعیین تغییر شکل در مطالعه پدیده‌های ژئودینامیکی در ایران، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه‌نصیرالدین طوسی.

Altiner, Y., 1999, Analytical Surface Deformation Theory for Detection of the Earth’s Crust Movements, Springer.

Ardalan A. A, and Esmaeili, R., 2003, 3-D deformation analysis via invariant geodetic observations, Geophys. Res. Abstr., **5**, 09615.

Brunner, F, K., 1979, On the analysis of geodetic networks for the determination of the incremental strain tensor, Surv. Rev., **25**, 56-67.

Brunner, F. K., Coleman, R., and Hirsch, B., Smaeili, R., 2002, 3D Deformation Analysis Using Invariant Parameters, A Thesis in Geodesy M/S/, Under supervision of A. A. Ardalan, University of Tehran (In Persian).

Vernant, Ph., Nilforoushan, F., Hatzfeld, D., Abbassi M. R., Vigny, C., Masson, F., Nankali, H., Martinod, J., Ashtiani, A., Bayer, R., Tavakoli, F., Chéry, J., 2004, Present day crustal deformation and plate kinematics in the middleEast constrained by GPS measurements in Iran and northern Oman. Geophys., J. Int. **157**, 381-398.

Vyscocil, P., 1977, Global recent crustal movements as determined by geodetic measurements, Tectonophysics, **38**, 49-59.

Welsch, W., 1981, Description of homogeneous horizontal strains and some remarks on their analysis, IAG Symp Geodetic Networks and Computations (Fourth Int Symp on Geod Comps), Munich, 31 Aug to 5 Sep 1981, 19 pages.

Welsch, W. M., 1983, Finite element analysis of strain patterns from geodetic observations across a plate margin, Tectonophysics, **97**, 57-71.

Wendt, K., Moller, D., and Ritter, B., 1985, Geodetic measurement of surface deformations during the present uplifting episode in NE Iceland, J. Geophys. Res., **90**, 163-172.

Wilks, S. S., 1932, Certain generalizations in the analysis of variance.Biometrika, **24**, 471-494.

1981, A Comparison of computation methods for crustal strains from geodetic measurements, Tectonophysics, **71**, 281-298.

Cai, J., Grafarend, E. W., and Schaffrin, B., 2004, Statistical inference f the Eigenspace component of a two-dimensional symmetric rank-two random tensor, J. Geodesy., **78**, 7-8.

Eringen, A. C., 1962, Nonlinear theory of contiuous media McGraw-Hill Bookd Company, New York.

Grafarend, E. W., 1986, Three-dimensional deformation analysis: Global vector spherical harmonic and local finite element representation, Tectonophysics, **130**, 337-359.

Gurtin, M. E., 1981, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, USA.

Hotelling, H., 1951, A generalized T-test and measure of multivariate dispersion. in: Neyman J (ed) Proc 2nd Berkeley Symp Mathemtatics Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, 23-4.

Kakkuri, J., and Chen, C., 1992, On horizontal crustal strain in Finland, J. Geodesy, **66**(1).

Lawley, D. N., 1938, A generalization of Fisher's z test. Biometrika, **30**, 180-187 and 467-469.

Lesne, O., Calais, E., and Deverchère, J., 1998, Finite element modelling of crustal deformation in the Baikal rift zone: new insights into the active-passive rifting debate, Tectonophysics, **289**, 327-340.

Livieratos, E., and Vlachos, D., 1981, The influence of correlation in computing crustal strains from trigonometric measurements, Tectonophysics, **77**, 323-332.

Mase, G. E., 1970, Continuum Mechanics for engineering, Schaum's Outline. CRC Press LLC, Northwest, Florida, USA.

Pope, A. J., 1972, Strain analysis of horizontal crustal movements in Alaska based on triangulation surveys before and after the earthquake in The Great Alaska Earthquake of 1964, Geodesy and seismology, National Academy of Sciences, Washington, D. C, 435-447.

Rueger, J. M., 2006, Overview of geodetic deformation measurements of dams, ANCOLD conference on dams and annual general meeting, November 2006, Australia.

Safari, A., Ardalan, A. A., 2007, New Cylindrical Equal Area and Conformal Map Projections of the Reference Ellipsoid for Local Applications Surv. Rev., **39**, 132-144.

Sedov, L. I., 1972, A Course in Continuum Mechanics (Parts 1,2,3,4), Wolters-Noordhoff, Netherland.