مجلهٔ فیزیک زمین و فضا، دوره ۳۳، شماره ۲، ۱۳۸۶، صفحهٔ ۲۱- ۳۰

یادداشت تحقیقاتی

# قطع بهینهٔ تجزیه مقادیر تکین در حل مسئله‌های معکوس خطی

علی غلامی[1*] و عبدالرحیم جواهریان[2]

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران
[2] دانشیار گروه فیزیک زمین، مؤسسهٔ ژئوفیزیک، دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۸۴/۵/۲۲ ، پذیرش نهایی: ۸۵/۱۱/۱۸)

## چکیده

به‌دست آوردن مدل سرعتی زمین با استفاده از معکوس‌سازی داده‌های لرزه‌ای از اهمیت زیادی برخوردار است. در نظریهٔ معکوس با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده حاوی نوفه به استنباط اطلاعات در مورد دستگاه‌های فیزیکی پرداخته می‌شود. اطلاعات در مورد نوفهٔ موجود در داده‌ها برای حل هر مسئله معکوسی ضروری است، زیرا در نبود چنین اطلاعاتی، نمی‌توان گفت کدام مدل به مدل واقعی نزدیک‌تر است. پس بدون تکرار عملیات برداشت داده، توانایی برآورد مؤلفهٔ نوفه در داده‌ها بسیار با اهمیّت است. اما، در عمل به‌ندرت برآورد مستقیمی از نوفهٔ موجود در داده‌ها امکان‌پذیر است. در این مقاله، ابتدا با استفاده از روش تنظیم تیخونف با منحنی L یک مدل پایه از دستگاه حاصل می‌شود. آن‌گاه اختلاف داده‌های پیش‌بینی شده با این مدل و داده‌های مشاهده شده، برآورد اولیهٔ نوفه خواهد بود. سپس از واریانس نوفهٔ برآورد شده برای تعیین قطع بهینهٔ تجزیه مقادیر تکین OTSVD (optimally truncated singular value decomposition) و حل مسئله معکوس استفاده می‌شود. این روش روی داده‌های مصنوعی لرزه پایین‌چاهی (downhole) نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** منحنی L، تنظیم تیخونف، OTSVD، لرزه پایین‌چاهی

## ۱ مقدمه

هدف از معکوس‌سازی داده‌های ژئوفیزیکی این است که از تعداد محدودی مشاهدهٔ غیر مستقیم و حاوی نوفه، اطلاعات کمّی در مورد ساختارهای زیر سطحی حاصل شود. اما در این میان، برای اینکه بتوان گفت کدام مدل مربوط به داده‌هاست، اطلاعات در مورد نوفهٔ موجود در داده‌ها ضروری است. نوفهٔ موجود در داده‌ها شامل مؤلفه‌های متفاوتی است که می‌توان آنها را به دو دستهٔ مؤلفه‌های تصادفی و غیر تصادفی تقسیم کرد. به‌طور کلی در ژئوفیزیک، هر مسئله خطی حالت خاصی از رابطه (۱) است. سئوال اینجا است که چگونه می‌توان در حضور نوفهٔ $n$ پارامترهای مدل $x_{true}$ را با استفاده از داده‌های $d$ به‌دست آورد؟

$$d = Ax_{true} + n \qquad (۱)$$

که $d \in R^n$ داده‌ها، $A \in R^{n\times m}$ عملگر مستقیم گسسته شده و $x_{true} \in R^m$ پارامترهای مدل واقعی‌اند ($n$ و $m$ به ترتیب تعداد داده‌ها و پارامترهای مدل هستند). $n$ مؤلفهٔ نوفهٔ موجود در داده‌ها، وخود شامل دو مؤلفه است. یکی مؤلفه مربوط به نوفه‌های تصادفی و دیگری مؤلفه مربوط به نوفه‌های غیر تصادفی است. طبق تعریف، نوفه‌های تصادفی آن تغییرات ایجاد شده در داده‌ها هستند که مجدداً قابل تولید نباشند و نوفه‌های غیر تصادفی شامل قوانین وارد نشده در مدل‌سازی و اثر گسسته کردن عملگر مستقیم‌اند. در اینجا فرض بر این است که همهٔ قوانین فیزیکی مسئله در مدل‌سازی وارد شده‌اند و سطح گسستگی به اندازهٔ کافی کوچک هست تا خطای ناشی از گسستگی به طور قابل ملاحظه‌ای کوچک باشد. بنابراین از مؤلفه غیر تصادفی نوفه صرف‌نظر می‌شود.

در نبود نوفه، حل رابطه (۱) آسان است. مشکل،

*نویسنده رابط: تلفن: ۸۲۰۹۵۸۲۳-۰۲۱ دورنگار: ۸۸۰۰۹۵۶۰-۰۲۱ E-mail: agholami@ut.ac.ir

زمانی ظاهر می‌شود که داده‌ها حاوی نوفه باشند. می‌توان مدلی را به‌دست آورد که داده‌های نوفه‌دار را به‌خوبی پیش‌بینی کند، اما مدل مطلوب نخواهد بود. بنابراین باید به طریقی اثر نوفه را از بین برد.

برای این کار دو دیدگاه کاملاً متفاوت وجود دارد. دیدگاه اول که قدیمی‌تر نیز هست بر این فرض استوار است که مدل مورد نظر، هم داده‌ها را به‌خوبی پیش‌بینی می‌کند و هم منحنی پارامترهای آن هموار است یا مدلی با کمترین اندازه (norm) است. دیدگاه دیگر (دونوهو، ۱۹۹۵) که بر تُنُکی (sparseness) مدل تأکید دارد فرض می‌کند که می‌توان با یک تبدیل خطی، مدل را با تعداد خیلی کمی از ضرایب تبدیل نشان داد، به‌طوری که بقیه ضرایب صفر باشند. بنابراین اگر نوفه‌ای در کار باشد اثر آن روی کلیه ضرایب خواهد بود، با صفر کردن ضرایبی که اندازه آنها از یک حد آستانه کمتر است و گرفتن عکس تبدیل مدل مورد نظر به‌دست می‌آید. در این مقاله از دیدگاه اول برای حل مسئله استفاده شده است. بدین صورت که ابتدا با استفاده از روش منحنی L برای به‌دست آوردن پارامتر تنظیم در روش تیخونف، یک مدل مرجع به‌دست می‌آید، آنگاه با استفاده از داده‌های پیش‌بینی شده با این مدل یک برآورد اولیه از نوفه حاصل می‌شود. سپس نوفهٔ برآوردشده برای به‌دست آوردن مقدار قطع بهینه از مقادیر تکین برای حل مسئله معکوس، مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل حاصل از قطع مقادیر تکین با این مقدار، مدلی خواهد بود که به مدل واقعی نزدیک است و نوفهٔ موجود در داده‌ها را خیلی بهتر برآورد می‌کند.

## ۲ معکوس‌سازی داده‌ها

یکی از راه حل‌های رابطهٔ (۱) استفاده از روش ارائه شده تیخونف (۱۹۶۳) است. جواب مسئله معکوس در روش تیخونف که در نقش مدل پایه، $\hat{x}_\lambda$، برای برآورد اولیه نوفهٔ مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌صورت زیر است

$$\hat{x}_\lambda = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T d \qquad (۲)$$

که $\lambda$ پارامتر تنظیم تیخونف نام دارد و باعث ایجاد تعادل بین اندازهٔ بردار باقی‌مانده و اندازهٔ بردار پارامترهای مدل می‌شود. ساختار مدل به‌دست آمده با این روش به مقدار $\lambda$ بستگی دارد که در این مقاله با روش منحنی L (هانسن، ۱۹۹۸) به‌دست می‌آید.

راه حل دیگر استفاده از روش TSVD ( truncated singular value decomposition) است.

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} s_i^{-1} \langle u_i, d \rangle v_i . \qquad (۳)$$

که $u_i$ بردارهای ویژهٔ $AA^T$، $v_i$ بردارهای ویژهٔ $A^TA$ و $s_i$ ریشهٔ دوم مقادیر ویژهٔ $A^TA$ هستند (اسکیلز و اسمیت، ۲۰۰۱). همچنین $\langle , \rangle$ نشان دهنده ضرب داخلی است. اما مشکلی که در اینجا ظاهر می‌شود پیدا کردن مقدار بهینه برای k است. برای رفع این مشکل می‌توان از تابع $\chi^2$ استفاده کرد که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\chi^2(k) = n^{-1} \tilde{\sigma}_L^{-2} \| A x_k - d \|^2 . \qquad (۴)$$

که n تعداد داده‌ها و $\tilde{\sigma}_L$ واریانس نوفه موجود در داده‌هاست که باید برآورد شود. در وان ویجک و همکاران (۱۹۹۸) روش‌های آماری متفاوتی برای برآورد واریانس نوفه، هنگامی که عملیات برداشت داده فقط یک بار صورت می‌گیرد، پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها برآورد واریانس بردار نوفهٔ داده‌ها است. واریانس $\sigma_i$ برای i-امین داده به معنی توانایی تغییر $d_i$ حول میانگین آن است. در این حالت همان‌طور که در رابطه زیر دیده می‌شود، میانگین داده‌ها همان داده‌های بدون نوفه‌اند.

$$\mu_i = (A x_{true})_i \qquad (۵)$$

که $\mu_i$ i-امین دادهٔ بدون نوفه، A و $x_{true}$ نیز همانند رابطهٔ (۱) است. در این مقاله با فرض اینکه واریانس ثابت است،

$\sigma_i^2 = \sigma^2$، برای برآورد اولیهٔ آن از روش تیخونف استفاده می‌شود. با به‌دست آوردن $\hat{x}_\lambda$ از رابطه (۲) واریانس بردار باقی‌ماندهٔ $A\hat{x}_\lambda - d$ در حکم یک برآورد اولیه از $\sigma^2$ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\widetilde{\sigma}_L^2 = \mathrm{var}(A\hat{x}_\lambda - d) \qquad (۶)$$

هنگام حل مسئله با رابطه (۲) به‌دلیل آنکه هیچ محدودیتی روی همواری مدل اعمال نمی‌شود، پاسخ مسئله، $\hat{x}_\lambda$، نوسان‌های زیادی را حول مدل واقعی نشان می‌دهد. اما همان‌طور که غلامی (۱۳۸۴) ارائه کرده است، همین مدل می‌تواند واریانس نوفه موجود در داده‌ها را به‌طور قابل ملاحظه‌ای درست برآورد کند.

اگر برآورد واریانس داده‌ها صحیح باشد، مدلی که برای آن $\chi^2 = 1$، داده‌ها را در حد میانگین یک انحراف معیار استاندارد پیش‌بینی خواهد کرد. اما منحنی $\chi^2$ برای مقادیر متفاوت k ممکن است طوری باشد که برای بهبود پیش‌بینی داده‌ها، پیچیدگی ساختار مدل $x_k$ را طلب کند. بنابراین از شرط AIC (Akaike Information Criterion) برای جلوگیری از ساختارهای اضافی در مدل استفاده می‌شود (تی ساکاموتو و کیتاگاوا، ۱۹۸۶).

$$AIC(k) = \chi^2(k)\, e^{a.k/n} \qquad (۷)$$

که a تعیین‌کننده حساسیت نسبی ساختارهای اضافی به تعداد مقادیر تکین به‌کار برده شده است. k تعداد مقادیر تکین در رابطهٔ (۳) و n تعداد داده‌ها است. مقدار k که به ازای آن منحنی AIC کمینه شود باید ساختارهای اضافی کمتری را به مدل اعمال کند. بنابراین با دو مقدار k روبه‌رو هستیم، یکی k که به ازای آن $\chi^2 = 1$ باشد و دیگری k مربوط به نقطهٔ کمینه منحنی AIC. انتظار می‌رود سطح قطع بهینه مقادیر تکین کمترین مقدار بین این دو k باشد. با پیدا کردن k بهینه، می‌توان مدل بهینه را از رابطه (۳) به‌دست آورد.

## ۳ تحلیل عدم قطعیت مدل نهایی

برای تحلیل عدم قطعیت پارامترهای مدل نهایی از مقادیر یک برآوردکننده، باید مقادیر اریبی و واریانس برآوردکننده تعیین شود. یک برآوردکننده (اگر دارای واریانس کوچک باشد) می‌تواند برای تغییرات تصادفی در داده‌ها پایدار باشد. از طرف دیگر، یک برآوردکننده (اگر دارای واریانس بزرگ باشد) حتی بدون اریبی ممکن است نسبت به تغییرات داده‌ها بسیار حساس باشد.

اگر $A_0^\dagger$ عملگر تصویرکننده از فضای داده به فضای مدل باشد و $x_0$ بردار پارامترهای مدل نهایی، آن‌گاه با توجه به آنکه رابطه (۳) یک تبدیل خطی است می‌توان نوشت

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k_0} s_i^{-1} \langle u_i, d \rangle v_i = A_0^\dagger d \qquad (۸)$$

که $k_0$ مقدار قطع بهینهٔ مقادیر تکین است. بنابراین ماتریس کواریانس به‌صورت زیر خواهد بود (گوویا و اسکیلز، ۱۹۹۷).

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(x_0) &= E[x_0 (x_0)^T] \\ &= A_0^\dagger \,\mathrm{cov}(d) A_0^{\dagger^T} \end{aligned} \qquad (۹)$$

حالا به فرض اینکه کواریانس داده‌ها به‌صورت زیر باشد

$$\mathrm{cov}(d) = \widetilde{\sigma}^2 I \qquad (۱۰)$$

آن‌گاه واریانس i-امین پارامتر مدل به صورت زیر در خواهد آمد

$$\mathrm{Var}[(x_0)_i] = \widetilde{\sigma}^2 \left( A_0^\dagger A_0^{\dagger^T} \right)_{ii} \qquad (۱۱)$$

ریشه دوم واریانس به‌دست آمده برابر مقدار انحراف معیار پارامتر مدل است که به صورت میله خطا روی آن رسم می‌شود. اگر مدل حاصل از الگوریتم OTSVD بدون اریبی باشد، این میله‌ها عدم قطعیت نهایی پارامترها را نشان می‌دهند. در غیر این‌صورت پارامترهای به‌دست آمده ممکن است به اندازهٔ میزان اریبی مدل جابه‌جا شوند.

متأسفانه میزان اریبی مدل نهایی را نمی‌توان به‌دست آورد زیرا طبق رابطهٔ (۱۲) محاسبهٔ آن منوط به دانستن مدل اصلی است (وان ویجک و همکاران، ۲۰۰۲).

$$\begin{aligned}\mathrm{Bias}(x_0) &\equiv E\left[x_0 - x_{\mathrm{true}}\right] \\ &= E[(A_0^{\dagger}A - I)x_{\mathrm{true}} + A_0^{\dagger}e] \\ &= (A_0^{\dagger}A - I)x_{\mathrm{true}} = Bx_{\mathrm{true}}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

این نتیجه با توجه به اینکه میانگین مقادیر نوفه برابر صفر است به‌دست می‌آید. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نمی‌توان میزان اریبی را محاسبه کرد. تنها راهکار این است که محدوده‌هایی را برای میزان اریبی به‌دست آورد. اما از آنجایی که در اینگونه مسائل، تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است، نمی‌توان محدوده‌های بسته‌تری را نسبت به اطلاعات اولیه در مورد مقدار پارامترهای مدل به‌دست آورد. ولی شرایط اولیهٔ اضافی در مورد حدود مقدار پارامترهای مدل و همچنین میزان همواری منحنی پارامترهای مدل به بازه‌های اطمینان بسته‌تری خواهد انجامید (غلامی، ۱۳۸۴).

## ۴ ساخت مسئله

مسئله انتخاب شده در این مقاله، معکوس کردن زمان اولین رسیدهای امواج کشسان در داده‌های لرزهٔ پایین‌چاهی با دورافت صفر برای به‌دست آوردن مدل سرعتی زمین در امتداد چاه است. در یک لرزه پایین‌چاهی یک تک چشمهٔ قابل تکرار انرژی امواج کشسان در سطح زمین به فاصلهٔ کمی از چاه در بالای سر گیرنده‌هایی که به فواصل متفاوت یا یکسان در درون چاه قرار می‌گیرند عمل می‌کند. این چشمه پالس انرژی را به درون زمین می‌فرستد و زمان سیر امواج، با گیرنده‌ها ثبت می‌شود. زمان رسید امواج پایین‌رونده برای ساخت یک مدل سرعتی به‌صورت تابعی از عمق که به بهترین وجه زمان سیرهای برداشت شده را پیش‌بینی کند به کار برده می‌شود.

در اینجا، برای ساخت مسئله معکوس، زمینی حاوی پنج لایه با ضخامت‌های یکسان در نظر گرفته شده است. سرعت به‌طور خطی با عمق افزایش می‌یابد به‌طوری‌که سرعت در سطح زمین ۲۵۰ متر بر ثانیه و در انتهای چاه ۲۰۰۰ متر بر ثانیه است اما در لایه‌های دوم و چهارم سرعت ثابت و کمتر از لایه‌های اطراف است (شکل ۱). در این حالت جواب مسئله معکوس غیر یکتا خواهد بود. عمق چاه در نظر گرفته شده در این مقاله چهل متر است که تعداد ۱۰۰ گیرنده با فاصله‌های یکسان، زمان رسید امواج پایین‌رونده را ثبت می‌کنند.

زمان سیر امواج پایین‌رونده در طول یک پرتوی خاص از چشمه به گیرنده با انتگرال زیر محاسبه می‌شود (اسکیلز و اسمیت، ۲۰۰۱)

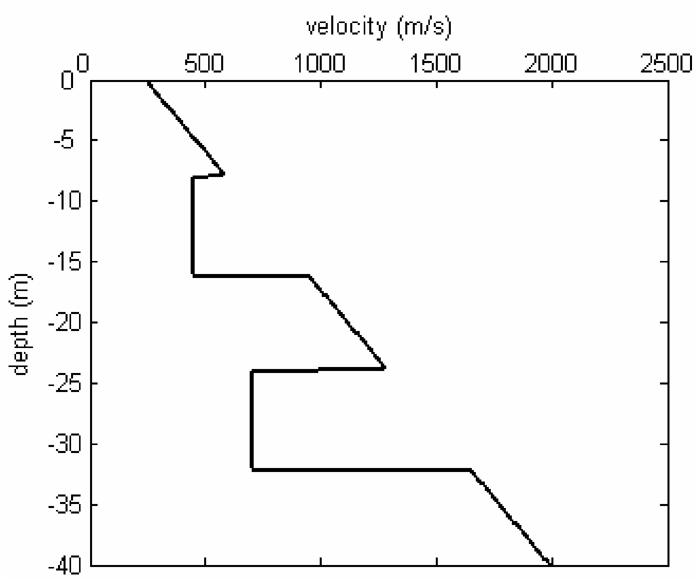
$$t = \int_{\mathrm{ray}} \frac{1}{v(z)}\, dl \qquad (۱۳)$$

با معرفی پارامتر کندی که عکس سرعت محیط است، $s = 1/v$، انتگرال زمان سیر را می‌توان به‌صورت ساده‌تر نوشت. در این حالت انتگرال نسبت به پارامتر کندی خطی خواهد شد

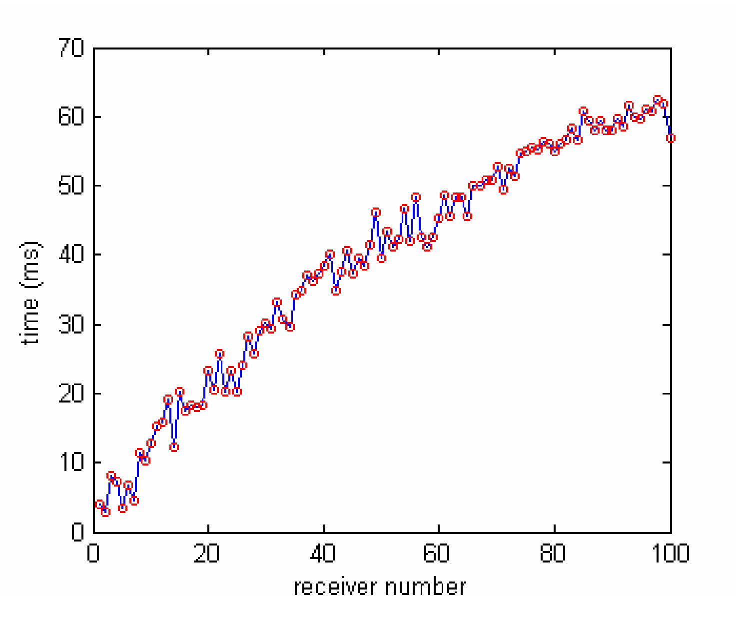
$$t = \int_{\mathrm{ray}} s(z)\, dl \qquad (۱۴)$$

اگر مدل سرعتی (یا مدل کندی) و مسیر پرتو مشخص باشند، زمان سیر را می‌توان با انتگرال‌گیری سرعت (یا کندی) در طول مسیر پرتو به‌دست آورد. اما در اینجا به فرض مستقیم بودن مسیر پرتوها، عملگر مستقیم گسسته شده که داده‌ها را از فضای مدل به فضای داده‌ها تصویر می‌کند یک ماتریس A به ابعاد $n \times m$ است. عناصر $A_{ij}$ این ماتریس طول پرتوی iام در قطعه مسیر jام است که در آن سرعت ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای برداشت با دورافت غیر صفر رابطهٔ (۱۴) به علت شکسته شدن امواج در فصل مشترک لایه‌ها نسبت به s غیرخطی

خواهد بود. اما در عمل شدت غیرخطی بودن رابطه متوسط است و با خطی‌سازی تناوبی بر طرف می‌شود (وان ویجک و همکاران، ۲۰۰۲). یک مؤلفه نوفه از نوع شبه گوسی با میانگین صفر ثانیه و مقدار انحراف معیار استاندارد ۲/۰۰ میلی ثانیه به داده‌ها اضافه شده است. شکل ۲ نمودار داده‌های حاوی نوفهٔ را نشان می‌دهد.




**شکل ۱.** مدل سرعتی مصنوعی به کار برده شده.




**شکل ۲.** نمودار داده‌های زمان سیر مصنوعی ساخته شده. یک مؤلفهٔ نوفهٔ تصادفی شبه گوسی با میانگین صفر میلی ثانیه و انحراف معیار استاندارد ۲/۰۰ میلی ثانیه به داده‌ها اضافه شده است.

## ۵ معکوس‌سازی داده‌ها

برای معکوس‌سازی داده‌های به‌دست آمده ابتدا به برآورد اولیه از نوفه پرداخته می‌شود. برای این کار رابطهٔ (۲) برای مجموعه‌ای از مقادیر $\lambda$ کمینه شده است. با رسم اندازهٔ بردار باقی‌مانده، $\|Ax - d\|$، در مقابل اندازهٔ بردار پارامترهای مدل، $\|x\|$، منحنی L به‌دست آمده است که در شکل ۳ نشان داده شده است. طبق تعریف، پارامتر تنظیم تیخونف بهینه، نقطه‌ای از منحنی با بیشترین انحنا است (هانسن، ۱۹۹۸). با این مقدار $\lambda$، تنظیم تیخونف منجر به یک مدل اولیه $\hat{x}_\lambda$ از زمین شده است که از این مدل برای به‌دست آوردن یک برآورد اولیه از واریانس، $\tilde{\sigma}_L^2$، استفاده شده است. در این مثال برآورد اولیه از واریانس تقریباً ۹۳٪ مقدار واقعی آن است. اما مدل سرعتی به‌دست آمده (شکل ۴) در حکم مدل زمین انتخاب نمی‌شود زیرا منحنی پارامترهای آن نوسان بسیار زیادی را حول مدل واقعی نشان می‌دهند. با این برآورد اولیه از نوفه الگوریتم OTSVD برای بهبود برآورد نوفه اجرا شده است. منحنی AIC در شکل ۵ نشان داده شده است. نمودار داده‌های برآورد شده برای مدل حاصل از روش تیخونف و مدل حاصل از الگوریتم OTSVD به همراه داده‌های بدون نوفه در شکل ۶ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که داده‌های برآورد شده با دو روش تفاوت چندانی با هم ندارند اما مدل‌های مربوط به آنها کاملاً با هم متفاوت‌اند. عدم قطعیت‌های برآورد شده برای داده‌ها در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که برآورد عدم قطعیت داده‌ها حاصل از الگوریتم OTSVD، $\tilde{\sigma}$ نسبت به برآورد اولیه $\tilde{\sigma}_L$ بهبود یافته است.

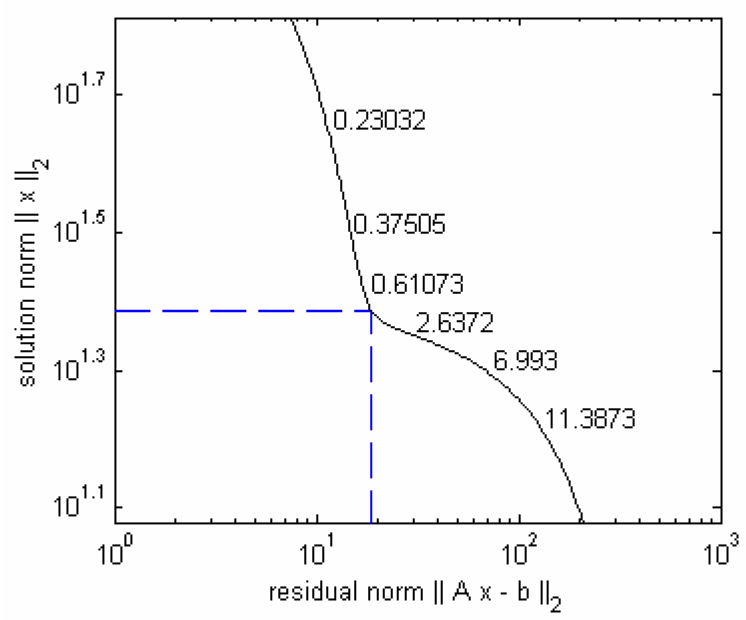
**جدول ۱.** از سمت راست، عدم قطعیت‌های اصلی (ستون اول)، برآورد شده با مدل به‌دست آمده از روش تیخونف (ستون وسط) و OTSVD (ستون آخر) برحسب میلی ثانیه.

| $\tilde{\sigma}$ | $\tilde{\sigma}_L$ | $\sigma$ |
|---|---|---|
| ۱/۹۸ | ۱/۸۷ | ۲/۰۰ |

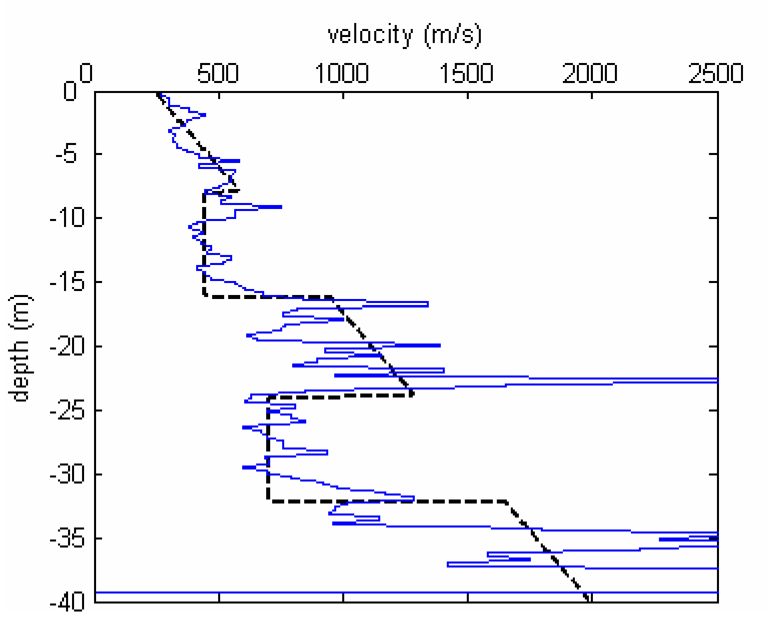
مدل سرعتی به‌دست آمده از الگوریتم OTSVD به همراه بازه پایداری پارامترهای آن در شکل ۷ و ماتریس کواریانس پارامترهای مدل در شکل ۸ نشان داده شده است. ریشه دوم داده‌های روی قطر اصلی ماتریس، کواریانس عدم قطعیت پارامترهای مدل کندی‌اند که به‌صورت میله‌های خطا روی پارامترهای مدل رسم شده‌اند. این میله‌های خطا بیان کنندهٔ این مطلب‌اند که در اثر تغییرات تصادفی در داده‌ها، پارامترهای مدل به چه میزان تغییر می‌کنند. اگر مدل OTSVD بدون اریبی باشد، این میله‌ها عدم قطعیت نهایی مدل به‌شمار می‌آیند. اما پارامترهای مدل کندی به اندازهٔ میزان اریبی محاسبه شده با رابطهٔ (۱۲) جابه‌جا می‌شوند. شکل ۹ منحنی پارامترهای مدل سرعتی اما تصحیح شده از اریبی را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این مدل با مدل واقعی توافق دارد.

## ۶ نتیجه گیری

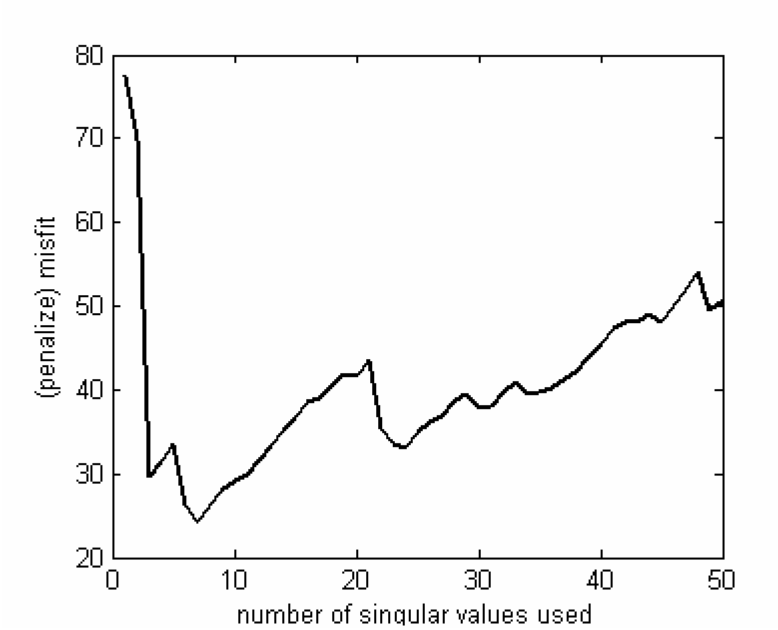
یکی از روش‌های به‌دست آوردن اطلاعات از داده‌ها، روش معکوس‌سازی است. در مسائل معکوس، به‌دست آوردن نوفهٔ موجود در داده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در لرزه‌شناسی هنگامی که عملیات برداشت داده فقط یک بار صورت می‌گیرد، جدا کردن سیگنال از نوفه (زمانی که باند بسامدی آنها هم‌پوشانی داشته باشد) مشکل است. در الگوریتم OTSVD پیشنهاد شده در این مقاله برای حل مسائل معکوس خطی، برآورد اولیه از واریانس داده‌ها با روش منحنی L بدون هیچ اطلاعاتی در مورد خطای موجود در داده‌ها صورت پذیرفت. دیده شد که برآورد نهایی واریانس داده‌ها با مدل حاصل از الگوریتم یادشده، بسیار به مقدار واقعی آن نزدیک‌تر است (۹۹٪ مقدار واقعی). بنابراین این روش می‌تواند برای برآورد خطای موجود در داده‌ها بسیار کارا باشد. همچنین مدل به‌دست آمده با این روش همخوانی خوبی با مدل اصلی زمین دارد.



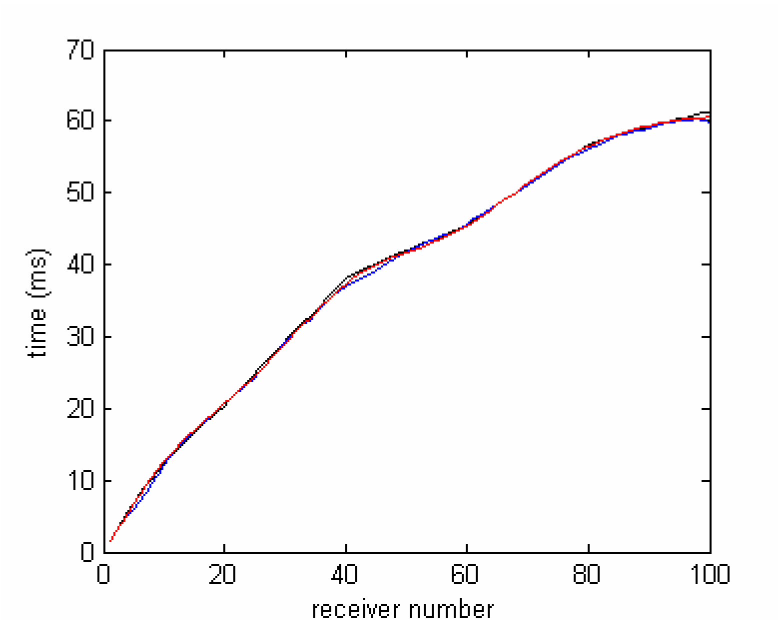

**شکل ۳.** منحنی L به‌دست آمده برای انتخاب λ بهینه در تنظیم تیخونف.



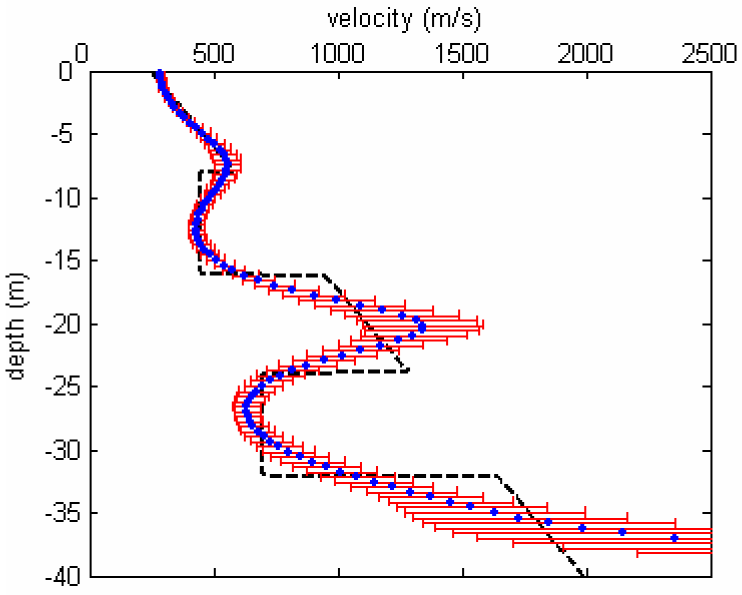

**شکل ٤.** منحنی پارامترهای مدل سرعتی اصلی (منحنی مقطع سیاه رنگ). منحنی پارامترهای مدل سرعتی حاصل از تنظیم تیخونف (منحنی آبی رنگ). همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود، پارامترهای مدل برآورد زده شده، نوسان زیادی از خود نشان می‌دهند.



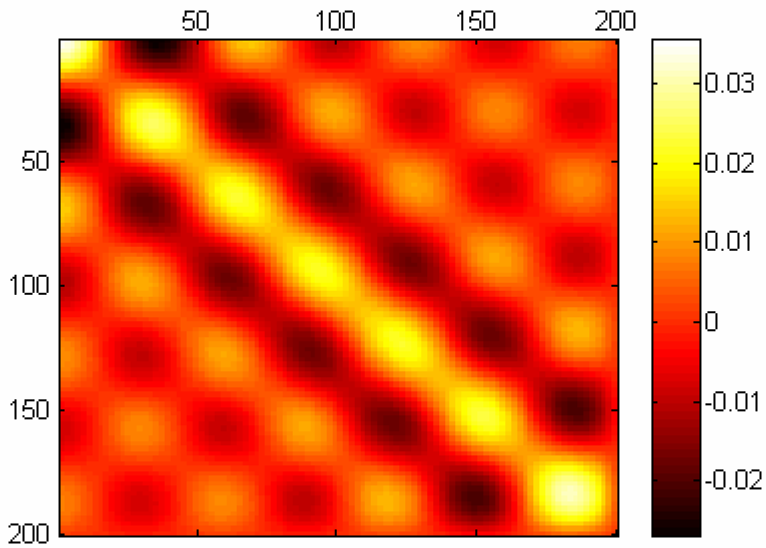

**شکل ۵.** منحنی AIC به‌دست آمده در این مثال. k مربوط به نقطهٔ کمینه منحنی در حکم $k_{aic}$ انتخاب می‌شود، در اینجا a=۲ در نظر گرفته شده است.



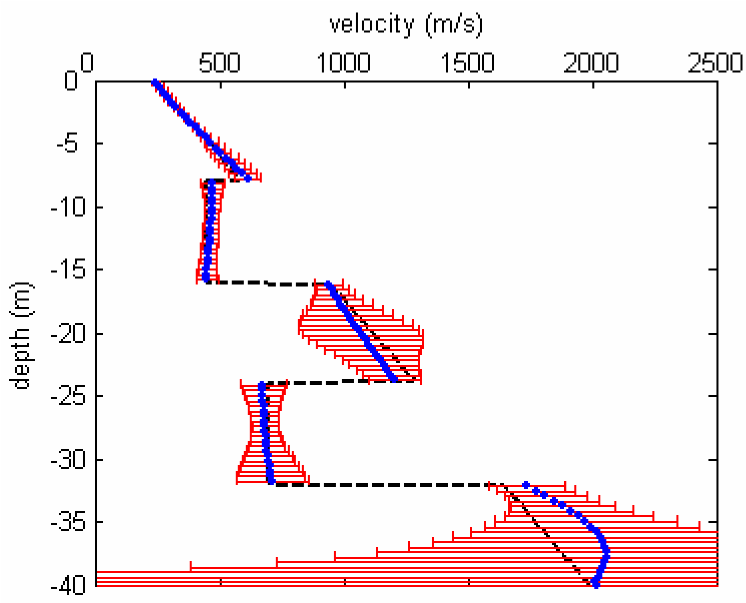

**شکل ٦**. منحنی داده‌های مصنوعی بدون نوفه (رنگ سیاه)، منحنی داده‌های برآورد شده با مدل به‌دست آمده از روش تیخونف (منحنی آبی رنگ) و منحنی داده‌های برآورد شده با مدل حاصل از الگوریتم OTSVD. ملاحظه می‌شود که دو منحنی تفاوت چندانی با هم ندارند و هر دو داده‌های اصلی را به‌خوبی پیش‌بینی می‌کنند.




**شکل ۷.** متوسط نتیجه مدل OTSVD با بازهٔ پایداری مدل.




**شکل ۸.** ماتریس کواریانس پارامترهای مدل نشان داده شده در شکل ۷.




**شکل ۹.** منحنی پارامترهای مدل سرعتی نهایی حاصل از OTSVD تصحیح شده از اریبی.

## تشکر و قدردانی

این مقاله از محل اعتبارات پژوهشی دانشگاه تهران در قالب طرح پژوهشی شماره ۶۲۰۱۰۰۴/۱/۰۴ صورت گرفته است. بدین وسیله از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه تهران و مؤسسه ژئوفیزیک تشکر می‌نماییم.

## منابع

غلامی، ع.، ۱۳۸۴، بررسی عدم قطعیت در حل مسائل معکوس لرزه‌ای از طریق معکوس‌سازی داده‌های پروفیل لرزه‌ای قائم، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ژئوفیزیک، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران.

Donoho, D. L., 1995, Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet-vaguelette Decomposition. Appl. Comput. Harmon. A. 2, no. **2**, 101-126.

Gouviea, W. P., and Scales, J. A., 1997, Resolution of seismic waveform inversion: Bayes versus Occams: Inverse Probl, 13, 323-349.

Hansen, P. C., 1998, Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM. USA.

Scales, J. A., and Smith, M., L., 2001, Introductory geophysical inverse theory, Samizdat Press, Colorado School of Mine, Denver.

T. Sakamoto, M. I., and Kitagawa, G., 1986, Akaike information criterion statistics, D. Reidel, Holand.

Tikhonov, A. N., 1963, Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method: Soviet Math: Dokl., **4**, 1035-1038.

Van Wijk, K., Scales, J. A., Navidi, W., and Roy-Chowdhury, K., 1998, Estimating data uncertainties for least squares optimization, in Annual Project Review, vol. CWP 283, Center for Wave Phenomena, Colorado School of Mines, Denver.

Van Wijk, K., Scales, J. A., Navidi, W., and Tenorio, L., 2002, Data and model uncertainty estimation for linear inversion: Geophys. J. Int., **149**, 625-632.