

## مدل برنامه ریزی ریاضی غیر خطی بسط داده شده جهت تخمین پارامترهای غیر خطی تابع تولید بیولوژیک محصولات زراعی و بهینه سازی به طور همزمان (ENLPM)

غلامرضا پیکانی

استادیار پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران

تاریخ پذیرش مقاله ۸۳/۳/۶

### خلاصه

در این پژوهش با استفاده از مشاهدات (۲۷ نمونه آماری) تابع تولید بیولوژیکی گندم متعلق به یک ایستگاه تحقیقات گندم، سال ۱۹۷۵ میلادی و بکارگیری از مدل بسط داده شده (ENLPM) ضرایب فنی تابع تولید بیولوژیکی چند جمله ای (درجه دوم) محصول گندم با پارامترهای غیر خطی تخمین زده شد و همزمان با آن تصمیمات بهینه (حداکثر سازی سود) و نیز تحلیل حساسیت های لازم برای ایجاد اطلاعات اقتصادی پیرامون توابع هزینه متغیر تولید، عرضه محصول گندم و تقاضا برای نهاده ها متناسب با یک تابع تولید بیولوژیکی با پارامترهای غیر خطی به عمل آمد. نتایج این بررسی نشان میدهد که استفاده از روش (ENLPM) این امکان را فراهم می‌سازد در مواقعی که امکان استفاده از روش حداقل مربعات (OLS) برای تخمین پارامترهای غیر خطی مدل‌های رگرسیونی ممکن نیست و نیز کاربرد الگوریتم‌های مختلف (Gauss - Newton, ...) برای تخمین حداقل مربعات غیرخطی (وقتی سیستم معادلات نرمال غیر خطی باشد) دشواریهای خاصی دارند، استفاده از روش جدید (ENLPM) میتواند نه تنها ساختار مدل‌های آماری پیچیده را در تخمین پارامترهای غیر خطی مدل‌ها را تست کند، بلکه همزمان با تخمین این پارامترها تصمیمات بهینه سازی را نیز انجام دهد.

**واژه‌های کلیدی:** پارامترهای غیرخطی، حداقل کل، الگوریتم، گاس نیوتن، برنامه‌ریزی غیر خطی، تابع

تولید غیرخطی، برآوردسازی غیر خطی

### مقدمه

استفاده صحیح از توابع تولید بیولوژیکی محصولات کشاورزی در تصمیمات مربوطه به پیشنهادات کارشناسی در امور بهزراعی و نیز در تجزیه و تحلیل های اقتصاد تولید آنگاه از ارزش مطلوب برخوردار خواهد بود که اشکال خطی و غیر خطی آنها از هم تشخیص داده شود. این موضوع از آنجهت حائز اهمیت است که تفکیک توابع تولید بیولوژیکی با ضرایب فنی تولید خطی و غیر خطی منجر به تفکیک نتایج مختلف انواع سیاست‌های کشاورزی بر خاسته از آنها خواهد بود. طوریکه، ترکیب بهینه نهاده ها برای حداکثر تولید فیزیکی یک تابع

تولید بیولوژیکی با ضرایب فنی تولید خطی با نوع ترکیب آن نهاده ها برای تولید حداکثر تولید یک تابع تولید بیولوژیکی با ضرایب فنی تولید غیر خطی بسیار متفاوت خواهد بود. بدون تردید مدل خطی حالت خاصی از مدل غیرخطی است که مدل ساز برای سهولت برازش انتخاب میکند که در واقع نوعی تقریب سازی از واقعیت است. برای روشن شدن امر به مدل‌های آماری توجه شود:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 e^{\beta_3 X} + \varepsilon, \quad K = 3 \quad (1)$$

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2} e^{\varepsilon}, \quad K = 2 \quad (2)$$

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon, \quad K = 1 \quad (3)$$

واگنر (۱۹۵۹) و ویلسون (۱۹۷۸) و فیشر (۱۹۶۱) با استفاده از برنامه ریزی خطی و بر مبنای حداقل انحرافات مطلق تحلیل رگرسیونی خاصی را ارائه داده‌اند. همچنین جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم روش OLS میتوان به جانستون (۱۹۷۲)، کمنا (۱۹۷۱)، وناکوت و همکاران (۱۹۷۹)، جاج (۱۹۸۰) و تیل (۱۹۸۷) رجوع نمود. به منظور آشنایی بیشتر با اشکال مختلف توابع تولید و تحلیل ساختاری انواع مدل‌های آن مخصوصاً توابع تولید چند جمله ای از نوع درجه دوم میتوان به سان خایان (۱۹۸۰) رجوع نمود. برای آن دسته از محققینی که بخواهند بیشتر با مفاهیم اصول برآورد سازی حداقل مربعات غیر خطی<sup>۱</sup> آشنا شوند به گرین (۱۹۹۳) جاج و همکاران (۱۹۸۸) گریفیث و همکاران (۱۹۹۲) و هامیلتون (۱۹۹۴) مراجعه شود. تحقیق حاضر کار تازه ای در جهت بسط یک مدل برنامه ریزی ریاضی غیر خطی از نقطه نظرهای بررسی نقاط ضعف روش OLS و نیز مشکلات آن در تخمین پارامترهای غیر خطی مدل‌های آماری با پارامترهای غیر خطی و مخصوصاً تخمین پارامترهای غیر خطی توابع تولید بیولوژیکی و مشکلات خاص الگوریتم‌های جستجو برای برآورد پارامترهای غیر خطی مدل‌های آماری چند متغیره (Gauss-Newton و غیره) و نیز تخمین پارامترهای غیر خطی و بهینه سازی به طور همزمان و ایجاد اطلاعات مفید پیرامون توابع عرضه محصول و تقاضا برای نهاده‌های تولیدی متناسب با یک تابع تولید بیولوژیکی با پارامترهای غیر خطی میباشد.

### مواد و روش‌ها

داده مورد نیاز این تحقیق جهت تخمین پارامترهای غیر خطی تابع تولید بیولوژیکی گندم مربوط به یک ایستگاه تحقیقاتی در مکزیک در سال ۱۹۷۵، می‌باشد که کلیه مشاهدات آماری تحت جدول ۱ ارائه گردیده است. از آنجائیکه در زمان تهیه اطلاعات آماری قیمت هر پوند گندم ۰/۸ دلار (هر پوند معادل ۰/۴۵۳ کیلوگرم)، قیمت هر پوند کود ازته ۰/۱۲ دلار و قیمت هر جریب - فوت آب ۱/۲۵ دلار بوده است، از این

$$Y = A_0 + A_1N + A_2W + A_3^k N^2 + A_4^k W^2 + A_5^k NW + \varepsilon \quad (۴)$$

بخوبی پیداست که مدل ۳ مورد خاصی از یک مدل خطی است و نیز مدل آماری ۲ نیز قابل تبدیل به یک مدل خطی با استفاده از لگاریتم است که در هر دو مورد میتوان از روش حداقل مربعات معمولی (OLS) برای برآورد ضرایب فنی توابع استفاده نمود. اما متناسفانه در مدل‌های آماری ۱ و ۴ وقتی  $K > 1$  باشد، دارای پارامترهای غیر خطی است و قابل تبدیل به حالت خطی نیز نمی‌باشد که در این حالت بدلیل غیر خطی بودن سیستم معادلات نرمال حاصل از شرایط مرتبه اول حداقل سازی تابع غیر خطی مجموع پسماند دارای جواب‌های متعددی است و در مواردیکه تابع هدف (مجموع پسماند) مدل آماری شرایط کافی را با توجه به برآوردهای پارامترهای غیر خطی ایجاد نمیکند، الگوریتم‌های مختلف جستجو نیز با مشکل مواجه هستند.

داشتن اطلاعات کافی پیرامون توابع تولید بیولوژیکی محصولات کشاورزی و نوع اشکال این توابع از نقطه نظر خطی و یا غیرخطی بودن ضرائب فنی تولید این امکان را فراهم خواهد ساخت تا محققین کشاورزی و اقتصاد کشاورزی بتوانند اطلاعات و آمار دقیق تری را در مورد توصیه‌های بهزرایی و استفاده بهینه نهاده‌های تولیدی و تصمیمات اقتصاد تولید فراهم سازند.

محققین که با روش‌های معمولی رگرسیونی و OLS سر و کار دارند، اطلاع دارند که در صورتیکه محدودیت  $a < \sum \beta_i^{ki} < b$  وجود داشته باشد و در آن  $K$  مخالف با اعداد صفر (۰) و یک باشد، در این صورت سیستم یا دستگاه معادلات نرمال بصورت غیر خطی ظاهر شده و OLS توان برآزشی خود را از دست میدهد و ناچاراً می‌بایستی از الگوریتم‌های جستجوی مختلفی بهره گرفت که بنوبه خود بر حسب تعداد پارامترهای غیر خطی توابع تولید و توان متغیر  $B$  برآورد سازی پارامترهای غیر خطی را با پیچیدگی خاصی مواجه می‌سازد. همچنین با توجه به پیچیدگی‌های برآزش چنین توابع تولید بیولوژیکی با پارامترهای غیر خطی و نیز تصمیم‌گیریهایی بهینه‌یابی پیرامون کاربرد نهاده‌ها و رسیدن به سطوح تولید اقتصادی یا فنی بطور همزمان سرعت کار و دقت عمل بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

خطی باشند، میتوان از آن برای برآورد پارامترهای غیر خطی و نیز بهینه سازی بطور همزمان استفاده کرد<sup>۱</sup>. در مورد مسائل برآورد تحت پارامترهای غیر خطی نیز می‌بایستی شرایط مرتبه اول حداقل سازی تابع هدف (در این تحقیق تابع مجموع پسماند) برابر صفر و شرایط مرتبه دوم (دترمینان کلی هی‌شین) بزرگتر از صفر باشند تا خاصیت محدب بودن<sup>۲</sup> تابع هدف (مجموع پسماند مدل آماری) را تأیید کنند. در غیر اینصورت، مدل آماری مورد مطالعه از خصوصیات ساختاری خوب برخوردار نبوده و اطلاعات نادرستی از آن استخراج خواهد شد.

جهت تخمین پارامترهای غیرخطی تابع تولید بیولوژیکی گندم از روش ENLPM مدل آماری زیر بکار گرفته شده است:

$$Y = A_0 + A_1 N + A_2 W + A_3^k N^2 + A_4^k W^2 + A_5^k NW + \varepsilon \quad (5)$$

که در آن :

$Y$  = مقدار تولید گندم در یک اکر (پوند)

$N$  = مقدار کود نیتروژن استفاده شده در یک اکر (پووند)

$W$  = مقدار اکر - فوت آب استفاده شده در یک اکر

$\varepsilon$  = جمله اخلاص

$A_i$   $i=0, 1, \dots, 6$  = تعداد پارامترها (۶ پارامتر)

$K$  = توان پارامترهای غیر خطی  $A_3, A_4, A_5$

$N$  = تعداد مشاهدات آماری (۲۷ مشاهده)

۱ جریب = یک اکر

براساس مدل آماری (۵) چنانچه  $K=1$  باشد تابع تولید بیولوژیکی گندم از نوع چند جمله ای درجه دوم می باشد. برای اطلاع بیشتر از چگونگی تخمین پارامترهای خطی آن با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی (OLS) و مدل بسط داده شده ENLPM به مقاله اول محقق رجوع شود.

براساس مدل آماری (۵) تابع غیر خطی مجموع پسماند و سیستم معادلات نرمالی غیر خطی با درجه  $K$  با توجه به شرایط مرتبه اول و لازم (F.O.C) بصورت زیر ارائه شده است :

۱. نتایج این تحقیق نشان میدهد هر چه توان پارامترهای غیر خطی بزرگتر شود، بهمان نسبت معادلات نرمال غیر خطی حاصل از شرایط مرتبه اول پیچیده‌تر می‌شود.

2. Convexity

رو همین اطلاعات قیمتی بعنوان مبنای تجزیه و تحلیل اقتصادی قرار گرفت و در قسمت تحلیل حساسیت مربوط به تغییرات قیمت‌ها انتخاب شد.

جدول ۱- اطلاعات آماری تولید یک ایستگاه تحقیقاتی گندم یک مزرعه

نمونه در مکزیکو، ۱۹۷۵

WHEAT YIELD lbs/acre	NITROGEN FERTILIZER APPLICATIONS, LBS/ACRE	WATER APPLICATIONS ACRE-FEET
1740	0	23.4
1390	40	23.4
1880	80	23.4
2150	120	23.4
2380	160	23.4
2500	200	23.4
2970	240	23.4
2100	280	23.4
2480	320	23.4
1820	0	32.4
1440	40	32.4
2320	80	32.4
3020	120	32.4
3320	160	32.4
3240	200	32.4
3510	240	32.4
3490	280	32.4
3670	320	32.4
1170	0	24.8
1420	40	24.8
2230	80	24.8
3000	120	24.8
3650	160	24.8
3290	200	24.8
3650	240	24.8
4200	280	24.8
3840	320	24.8

### ساختار مدل

مدل (ENLPM) کاربرد بی‌عنوان یکی از روش‌های جانشین تخمین زنده پارامترهای غیر خطی مدل‌های آماری بجای روش حداقل مربعات غیر خطی نوعی مدل برنامه‌ریزی ریاضی غیر خطی بهینه یاب بسط داده شده است که در محیط نرم‌افزاری GINO, LINGO وقتی تابع هدف و شرایط مرتبه اول (شرایط لازم) و دوم (شرایط کافی) دارای پارامترهای غیر

### استفاده از روش حداقل مربعات غیر خطی<sup>۱</sup>

در صورتیکه در روابط ۵ و ۶ مقدار توان متغیرهای  $A_5$ ,  $A_4$ ,  $A_3$  در تابع تولید بیولوژیکی گندم مخالف اعداد صفر (۰) و یک باشد، معادلات نرمال (۶-۱) الی (۶-۶) غیر خطی بوده و تحت این شرایط استفاده از روش حداقل مربعات معمولی OLS برای تخمین پارامترهای غیرخطی غیر ممکن است. این بدان دلیل است که متناسب با درجه توان معادلات نرمال حل های بیشماری برای آن متصور است که در نقاط بحرانی مختلفی شیب تابع غیرخطی مجموع پسماند برابر صفر است که این مسئله تشخیص نقاط حداقل کل<sup>۲</sup> و حداقل ناحیه‌ای<sup>۳</sup> را مشکل می‌سازد بعنوان مثال چنانچه  $K=3$  فرض شود پارامترهای  $A_5$ ,  $A_4$ ,  $A_3$  در روابط (۶-۴)، (۶-۵) و (۶-۶) شرایط لازم حداقل سازی تابع پسماند (۶) دارای توان عدد ۵ می‌شوند که میتوان ۵ جواب مختلف را برای این پارامترها در نظر گرفت. همچنین اگر بخواهیم حاصل ضرب پارامترهای غیرخطی  $A_0 A_3^5$ ,  $A_1 A_3^5$ ,  $A_2 A_3^5$ ,  $A_3 A_4^5$ ,  $A_4 A_4^5$ ,  $A_5 A_4^5$  را مدنظر قرار دهیم، حل دستگاه معادلات نرمال غیر خطی تحت  $K=3$  بسیار پیچیده خواهد بود. لازم به یادآوری است، در این حالت مخصوص، در استفاده از الگوریتم‌های مختلف جستجوگر (گاس- نیوتن و...) نیز هرچه تعداد پارامترهای غیرخطی  $A_i^k$  بیشتر شود و سیستم معادلات نرمالی غیر خطی بصورت برداری مطرح شود، دشواریهای محاسباتی بسیار زیاد است.

با بکارگیری مدل برنامه ریزی ریاضی غیرخطی بسط داده شده ENLPM و استفاده از مشاهدات آماری تولید گندم در ایستگاه تحقیقات گندم مکزیکو، بعنوان مثال، جهت تخمین پارامترهای با توان ۳ و  $K=3$ ، مدل برنامه ریزی (۱) قادر است تابع تولید بیولوژیکی گندم (۵) را که دارای پارامترهای غیر خطی است، تحت برازش قرار دهد.

#### تخمین پارامترهای غیر خطی با استفاده از روش ENLPM:

الف- جهت ارائه نمودار دویبعی تابع غیر خطی مجموع پسماند با پارامترهای غیر خطی به مدل آماری (۷) در زیر ارائه میشود:

(۶)

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{\gamma} (Y_i - A_0 - A_1 N_i - A_2 W_i - A_3^k N_i^k - A_4^k W_i^k - A_5^k N_i W_i^k)^2$$

Subject to:

(۶-۱)

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial A_0} = nA_0 + \sum N_i A_1 + \sum W_i A_2 + \sum N_i^k A_3^k + \sum W_i^k A_4^k + \sum N_i W_i A_5^k = \sum Y_i \quad (۶-۲)$$

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial A_1} = \sum N_i A_1 + \sum N_i^2 A_1 + \sum N_i W_i A_2 + \sum N_i^2 A_3^k + \sum N_i W_i^k A_4^k + \sum N_i W_i A_5^k = \sum N_i Y_i$$

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial A_2} = 2K \sum N_i^2 A_2^{(2K-1)} + K \sum N_i^2 A_1 A_2^{(K-1)} + K \sum N_i^2 W_i A_2 A_2^{(K-1)} + K \sum N_i^2 W_i^k A_2^{(K-1)} A_4^k + K \sum N_i^2 W_i A_2^{(K-1)} A_5^k - K \sum N_i^2 Y_i A_2^{(K-1)} = 0$$

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial A_3} = 2K \sum N_i^2 W_i^k A_3^{(2K-1)} + K \sum N_i W_i A_3 A_3^{(K-1)} + K \sum N_i W_i^k A_3^{(K-1)} A_4^k + K \sum N_i W_i A_3^{(K-1)} A_5^k - K \sum N_i W_i Y_i A_3^{(K-1)} = 0$$

جهت کمی کردن تابع هدف (۶) و معادلات نرمال سیستم

(۶-۱) الی (۶-۶)، با توجه به اطلاعات آماری جدول ۱ مشاهدات، پس از بتوان رساندن تابع هدف، متغیرهای معلوم این تابع و معادلات نرمال قابل کمی کردن می باشد. سپس با استفاده از نرم افزار GINO یا LINGO یا LINDO (وقتی تابع هدف درجه دوم باشد،  $K=1$ )، می‌توان با رعایت اصل حداقل سازی تابع هدف تحت قیدهای سیستم نرمال، پارامترهای نامعلوم را تخمین زد.

1. Nonlinear Least Squares

2. Global minimum

3. Local minimum

خطی مجموع پسماند (۹) در سه نقطه A, B, C صفر می‌شود که در برگیرنده سه جواب مختلف برای تخمین پارامتر غیر خطی  $A_1$  می‌باشد. براساس نمودار فوق، کمترین مقدار تابع مجموع پسماند در نقطه  $\hat{A}_1 = 1.1612067$ ، c (نقطه Global Minimum) اتفاق می‌افتد:

نمودار (۱):

براساس نمودار (۱) مقدار تابع مجموع پسماند در نقطه C به کمترین مقدار خود می‌رسد. همچنین مقدار دترمینان هی‌شین<sup>۱</sup> در برگیرنده مشتقات درجه دوم رابطه (۱۰) جهت اثبات تحدبی بودن تابع مجموع پسماند غیر خطی بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$H = 12(3.5869)A_1^2 + 12(4.4141)A_1 + 2(10.4222 - 2(10.61950)) > 0 \quad (11)$$

استفاده از روش مدل برنامه‌ریزی ریاضی BNLPM برای تخمین پارامتر غیر خطی مدل آماری (۷) مشاهدات آماری فوق در مدل ۲ معلوم می‌شود که در نقطه بحرانی  $\hat{A}_1 = 1.161207$ ، مقدار تابع غیر خطی مجموع پسماند (۹) به کمترین مقدار خود ( $\sum e^2 = 16.307$ ) می‌رسد و شرایط مرتبه دوم در رابطه (۱۱) که در آن  $H > 0$  است محذب بودن تابع مجموع پسماند را تأیید می‌کند که شرایط لازم و کافی برای حداقل سازی تابع مجموع پسماند برای تخمین پارامتر غیر خطی  $A_1^2$  فراهم می‌سازد.

برای آشنایی بیشتر با مشکلات روش های جستجوی عددی<sup>۲</sup> در زمینه تکرار الگوریتم برای دستیابی به نقطه حداقل گلوبال با توجه به پیچیدگی های غیر خطی بودن پارامترها و ابعاد برداری آنها، مخصوصا مشکلات کاربرد الگوریتم گاس نیوتن برای حل یک معادله غیرخطی درجه ۳ و مشکلات همگرایی<sup>۳</sup> به ویلیام ب. گریفلیتز و همکاران (۱۹۹۲) رجوع شود.

ب-همچنین فرض کنید مدل ساز بجای مدل (۹) مدل آماری زیر را برای برآوردسازی انتخاب کند:

$$Y = A_1 X_{i1} + A_2^K X_{i2} + e_i \quad (7)$$

چنانچه فرض شود که  $A_2 = (A_1)^K$  و  $K=2$  باشد، در این صورت مدل (۷) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Y = A_1 X_{i1} + A_1^2 X_{i2} + e_i \quad (8)$$

از مدل (۸) بخوبی پیداست که تابع مذکور بر حسب متغیرهای توضیحی  $X_1, X_2$  خطی ولی بر حسب پارامتر  $A_1$  غیر خطی است.

بنابراین تابع مجموع پسماند و نیز تنها معادله غیر خطی نرمال با درجه ۳ مدل (۸) بصورت زیر می‌باشد:

$$\min \sum e_i^2 = \sum (Y_i - A_1 X_{i1} - A_1^2 X_{i2})^2$$

$$s.t. \quad \frac{\delta(\sum e_i)}{\delta A_1} = 2 \sum X_{i1}^2 A_1 + 4 \sum X_{i2}^2 A_1^3 = 0$$

یا

$$(9-1) - 2 \sum Y_i X_{i1} - 4 \sum Y_i X_{i2} A_1 + 6 \sum X_{i1} X_{i2} A_1^2 = 0$$

در صورتیکه فرض شود که مشاهدات یک نمونه آماری  $n=20$  بصورت زیر باشد:

$$\sum X_1^2 = 10.422155, \quad \sum Y X_1 = 16.528022, \quad \sum X_1 X_2 = 4.414097$$

$$\sum X_2^2 = 3.586929, \quad \sum Y X_2 = 10.619469$$

در این صورت پس از جایگزینی مقادیر معلوم، تنها معادله نرمال غیر خطی (دارای توان ۳) رابطه (۹-۱) بصورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$4(3.5869)A_1^3 + 6(4.4141)A_1^2 + 2(10.4222 - 2(10.61950))A_1 - 2(16.5280) = 0 \quad (10)$$

براساس رابطه (۱۰) بدلیل اینکه تنها معادله نرمال غیرخطی از نوع درجه ۳ می‌باشد و دارای سه جواب مختلف برای تأمین شرط لازم را دارد، بنابراین با استفاده از روش حداقل مربعات

غیر خطی نمی‌توان از رابطه  $\frac{\partial(\sum e^2)}{\partial A_1} = 0$  پارامتر  $A_1$  را

تخمین زد، زیرا  $A_1$  دارای ۳ جواب مختلف می‌باشد. دیگر اینکه روش حداقل مربعات غیر خطی قادر نیست جوابی را برای برآورد  $A_1$  انتخاب نماید که منجر به حداقل سازی تابع غیرخطی مجموع پسماند گردد. در نمودار (۱) شیب تابع غیر

1. Hessian

2. Numerical Search Procedures

3. Convergence

جدول ۲- درجه توان های مختلف پارامترهای غیر خطی و پراکندگی

درجه توان پارامترها K	مجموع پسماند $\sum e^2$	$R^2$
۰/۸	۱۶۸۲۲۸۴۲۹	-۷/۴۶
۱	۲۷۶۶۵۴۵	۰/۸۶
۱/۵	۷۲۵۵۶۳۰	۰/۶۴
۲	۶۵۵۶۴۰۸	۰/۶۷
۲/۵	۶۶۰۴۲۲۳	۰/۶۶۷
۲/۸	۶۵۵۳۳۸۸	۰/۶۶۶
۳	۴۹۸۸۶۲۲	۰/۷۴۸
۳/۵	۶۵۵۲۸۴۶	۰/۶۷
۴	۶۵۵۹۱۴۶	۰/۶۶۹
۵	۳۷۱۶۷۰۷	۰/۸۱
۶	۶۵۵۱۹۸۲	۰/۶۷
۶/۵	۶۵۷۰۳۲۳	۰/۶۶۹
۷	۴۹۸۸۸۸۵	۰/۷۵

جالب توجه است وقتی  $K=5$  باشد، براساس رانش مدل برنامه ریزی (۱) تابع تولید بیولوژیکی گندم با پارامترهای غیرخطی بصورت زیر برآورد می شود:

$$Y = A_0 + A_1N + A_2W + A_3^5N^2 + A_4^5W^2 + A_5^5NW + e$$

$$\hat{Y} = -15676.61 + 12.278376N + 1226.331W - .530783N^2 - 1.843043W^2 + .726638NW$$

$$R^2 = 0.81 \quad , \quad R^{-2} = 0.77$$

مدل تخمینی (۱۲) را میتوان با نتایج کاربرد روش حداقل مربعات وقتی  $K=1$  باشد، بصورت زیر مقایسه نمود:

$$Y = -47031.10 + 13.32183N_2 + 3498.883W$$

$$0.042345N^2 - 61.66342W^2 + 0.166295NW \quad (13)$$

$$R^2 = 0.86$$

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2^K X_2 + e \quad (12)$$

که در تابع فوق  $Y$  تابعی غیر خطی نسبت به پارامتر  $\beta_2$  با توان  $K=3$  است. در این حالت چنانچه بخواهیم این مدل را با استفاده از مشاهدات آماری بحثهای قبلی با استفاده از روش ENLPM تخمین بزنیم، نتیجه رانش آن در جدول ۲ ارائه شده است و مقدار دترمینان هی شین نیز مؤید تحدبی بودن تابع غیر خطی مجموع پسماند میباشد.

ج- یکی دیگر از ویژگیهای استفاده از روش ENLPM بسط داده شده در تخمین پارامترهای غیر خطی مدلهای آماری تخمین انواع مدلهای پیچیده غیر خطی با تحلیل حساسیت متغیر توان پارامترها،  $K$  می باشد. بعنوان مثال چنانچه مدل ساز بر این باور باشد که روند افزایش مستمر در مقدار کود از ته و آب با نرخ نزولی بازدهی نهایی این نهادها همراه است (مثلا پارامترهای غیر خطی  $A_3^k, A_4^k$  در تابع تولید بیولوژیکی گندم (۴) و نیز اینکه تأثیر متقابل آب و کود بصورت  $A_5^k NW$  فرض شود، در این صورت براساس تابع پسماند (۱) و مدل برنامه ریزی (۱) می توان با تغییر دادن مقدار توان پارامترها، یعنی  $K$  انواع مختلف مدلهای آماری با پارامترهای غیرخطی را با دقت زیاد و زمان کمتر تخمین زد و همزمان با آن مقدار حداکثر تولید فیزیکی و اقتصادی گندم را نیز مورد مطالعه بهینه یابی قرار داد. در جدول (۲) سعی شده است که با تحلیل حساسیت  $K$ ، متغیر توان  $K$  پارامترهای غیرخطی، مدلهای آماری غیر خطی بیشماری را با توجه به مقدار مجموع پسماند  $\sum e^2$  و ضریب توضیح دهنده متغیرهای مستقل مدل،  $R^2$  مورد مقایسه قرار گیرند. لازم به تذکر است که برای نمونه در مدل برنامه ریزی (۱) مقدار توان تابع غیر خطی پسماند درجه ۱۰ و توان معادلات غیرخطی شرایط مرتبه اول درجه ۹ می باشد.

براساس جدول ۲ وقتی  $K=1$  باشد تابع تولید بیولوژیکی گندم از نوع تابع چند وجهی با توان ۲ بوده و با روش حداقل مربعات معمولی OLS نیز قابل تخمین است (برای توضیح بیشتر به مجله علوم کشاورزی ایران صفحات ۲۲۶ و ۲۲۷ رجوع شود).

که در آنها مقدار  $k$  برای پارامترهای غیر خطی تولید اعدادی مخالف صفر و یک می‌باشند. همچنین ساختار کلی دترمینان هی شین (Hessian) در مطالعه ساختار توابع عرضه محصول و نهاده‌های تولیدی متناسب با تابع تولید بیولوژیکی گندم با پارامترهای غیر خطی بصورت زیر می‌باشد:

$$|H| = (4P^2 \cdot A_3^k \cdot A_4^k - P^2 A_5^{2k}) > 0 \quad (18)$$

و در نتیجه ماتریس  $A$  قطعی منفی<sup>۱</sup> و شرایط را برای حداکثرسازی سود آماده خواهد ساخت و خوش فرم بودن تابع تولید بیولوژیکی گندم را نیز تأیید می‌کند.

### نتایج و بحث

یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که روش ENLPM می‌تواند بعنوان یکی دیگر از گزینه‌های تخمین پارامترهای غیر خطی مدل‌های آماری بجای روش حداقل مربعات غیر خطی و الگوریتم‌های جستجو گر عددی (گاس - نیوتن و ...) بکار گرفته شود. مخصوصاً اینکه، وقتی درجه توان دستگاه معادلات نرمال غیر خطی از ۲ بیشتر شود و تعداد پارامترهای مدل از عدد ۱ تجاوز کند، پیچیدگی‌های تخمین توابع تولید بیولوژیکی با پارامترهای غیرخطی آشکارتر خواهد بود که روش‌های مختلف الگوریتم موجود را با مشکلات مواجه نموده است.

از طرف دیگر، چنانچه مدلساز بخواهد اطلاعات وسیعی را خارج از نمونه آماری به مدل تحت مطالعه تحمیل نماید و درصد تست مدل‌های آماری با پارامترهای غیرخطی باشد، استفاده از روش ENLPM میتواند با دقت زیاد و مدت زمان کمتر اختیارات موجود پیرامون تحلیل حساسیت درجه توان پارامترها، درستی و یا عدم درستی مدل‌های آماری مختلف را محک زند.

یکی دیگر از ویژگی‌های استفاده از روش ENLPM این است که به سبب ساختار خاص برنامه‌ریزی ریاضی آن قادر است تخمین پارامترهای غیر خطی و تصمیمات بهینه‌سازی را بطور همزمان انجام دهد و به مدل ساز این امکان را می‌دهد، که علاوه بر تست ساختاری تخمین مدل‌های آماری بیولوژیکی

بنابراین، وقتی  $K=1$  باشد، پارامترهای تابع تولید بیولوژیکی گندم بصورت خطی خواهد بود و در نتیجه مقدار مجموع پسماند به حداقل مقدار ممکن خواهد رسید. استفاده از روش ENLPM برای تخمین انواع پارامترهای غیرخطی این امکان را ایجاد میکند که مدلساز قادر باشد فرضیات مختلفی را با توجه به اطلاعات خارج از نمونه آماری برای مدل تحت بررسی خود آزمایش نماید.

استفاده از روش ENLPM برای جمع‌آوری اطلاعات لازم پیرامون تابع هزینه متغیر تولید متناسب با تابع تولید بیولوژیکی گندم با پارامترهای غیر خطی:

روش ENLPM قادر است اطلاعات مربوط به پارامترهای غیرخطی تخمین تابع تولید بیولوژیکی (۴)، تابع مسیر توسعه (۱۴) و معادله هزینه تولید (۱۵) را بعنوان عناصر اصلی اطلاعاتی لازم برای تشکیل تابع هزینه کل تولید و تابع عرضه محصول مورد استفاده قرار دهد و در نتیجه اطلاعات متناسب با ترکیب بهینه نهاده‌ها با حداقل هزینه (حداقل‌سازی هزینه متغیر تولید و یا حداکثر سازی سود) را ایجاد نماید:

$$W = \frac{A_1 \cdot R_2 - A_2 R_1}{2A_4^k \cdot R_1 - A_5^k} + \left[ \frac{2A_3^k \cdot R_2 - A_5^k \cdot R_1}{2A_4^k \cdot R_1 - A_5^k} \right] \cdot N \quad (14)$$

$$C = R_1 N + RW + F \quad (15)$$

پس از مشخص کردن درجه توان پارامترهای غیرخطی،  $K$ ، با جانشین کردن معادله (۱۴) در تابع تولید (۴) و نیز در معادله هزینه (۱۵) به طور همزمان، مقدار استفاده از کود نیتروژن  $N$ ، آب مصرفی  $W$  و نیز تابع هزینه متغیر تولید  $C$  تعیین خواهند شد. همچنین، توابع تقاضا برای نهاده، کود نترات و نهاده آب تحت پارامترهای غیر خطی تولید بصورت زیر خواهد بود:

تقاضا برای کود

$$N = \frac{(A_5^k \cdot R_2 - 2A_4^k R_1)}{P(A_5^{2k} - 4A_3^k A_4^k)} + \frac{(2A_1 A_4^k - A_2 A_5^k)}{(A_5^{2k} - 4A_3^k \cdot A_4^k)} \quad (16)$$

تقاضا برای آب

$$W = \frac{(A_5^k \cdot R_1 - 2A_3^k R_2)}{P(A_5^{2k} - 4A_3^k A_4^k)} + \frac{(2A_2 A_3^k - A_1 A_5^k)}{(A_5^{2k} - 4A_3^k \cdot A_4^k)} \quad (17)$$

1 . Negative definite

مختلف با پارامترهای غیر خطی پیچیده نیز می‌تواند صحت و  
سقم تصمیمات بهینه یابی را نیز با توجه به تکنولوژی ساختاری  
مدل محک زند. این عمل باعث می‌شود، بهتر بتوان ابعاد وسیع  
تری را در تصمیمات بهینه یابی در استفاده از توابع تولید  
بیولوژیکی را که در آنها توان پارامترهای مدلها،  $K > 1$  باشد،  
مورد مطالعه قرار داد.

## REFERENCES

## مراجع مورد استفاده

۱. بیکانی، غ. ۱۳۸۱. مدل برنامه ریزی ریاضی غیرخطی بسط داده شده جهت تخمین پارامترهای خطی تابع تولید و بهینه سازی به طور همزمان (ENLPM). مجله علوم کشاورزی ایران، جلد ۳۳ (۲): ۲۳۲-۲۳۳.
2. Charnes, A., W. W. Cooper, & R. O. Ferguson. 1995. Optimal Estimation of Executie Compensation by Linear Programming. Management Science. 1:138-1851.
3. Draper, N. & S. Harry. Applied Regression Analysis . Second edition, New York : Wiley.
4. Fisher, W.D. 1961. A Note on curve Fitting with Minimum Deviations by Linear Programming. Journal of the American Statistical Association. 56:359-362.
5. Green, William H. Econometric Analysis, 2<sup>nd</sup> edition, 1993. Prentic Hall, Inc. Pag. 318-320.
6. Griffithis, W. E., R. Carter Hill, & G. G. Judge. 1993. Learning and Practicing Econometrics. John Wiley of Sons, Inc.
7. Hamilton, James D. The series Analysis , 1994. Pricetion University Press, Prinection , Mem Sersey.
8. Jndge, G. G., R. C. Hill. W.E. Griffiths, H. Lutkepohh, & T. C. Lee (1988). Introduction to the Theory and practice of Econometrics, 2<sup>nd</sup> Edition, New York : John Wiley Sours, Inc. chapter 12.
9. Johnston, J. 1972. Econometric Methods. Second edition, New York : McGram – Hill.
10. Judge, Gerage, William E. Grittiths, R. Cater Hill, & Tsoung- chao Lee, 1980. The Theory and practice of Econometrics. New York : Wiley.
11. Kmenta, Jan. 1971. Elements of Econometrics. New York : Macmillan.
12. Sankhayan, P. L. 1988. Introduction to the Economics of Agricultural Production, Prentice Hall International, INC., India.
13. Theil, Henri. 1978. Introduction to Econometrics. Englewood Cliffs, N. J.: Prentirce – Hall.
14. Wagner, H. M. 1959. Linear Programming and Regression Analysis. Journal of the American Statistical Association, 54:206-212.
15. Wilson. H. 1978. Least Square Versus Minimum Absolutes Deviations Estimation in Linear Models. Decision Sciences. 9:322-335.
16. Wonnacott, Ronald, J. & T. H. Wonnacott. 1979. Econometrics. Second Edition, New York : Wiley.



## **An Extended Nonlinear Mathematical Programming Model (ENLPM) for Simultaneous Nonlinear – in - the – Parameters Estimations and Optimal Decsion Makings**

**GH.R. PEYKANI**

**Assistant Professor, University College of Agriculture & Natural Resources (UCAN), University of Tehran, Karaj, Iran**

**Accepted. May, 26. 2004**

### **SUMMARY**

The extended mathematical programming Model (ENLPM) is presented here as a new tool to study both regression (for nonlinear – in – the – parameter estimation) rule and optimal decision making problems simultaneously, using an experimental wheat production data. Initially, the essentials of the new technique introduced in this paper are outlined for the estimation of the nonlinear coefficients of a polynomail biological production function as compared with other numerical search methods (Gauss – Newton Algorithm); secondly, the extended model is provided with an endogenous variable  $k$  as the degree of nonlinearity of parameters for making sensitivity analysis to test the validity of many different nonlinear – in – the – parameter statistical models. Thirdly, the estimated nonlinear parameters along with product and input prices are used to provide necessary information regarding the input variable cost and supply functions for the underlying nonlinear – in – the – parameters biological production function for the crop of wheat . The main results indicate that the extended mathematical programming model (ENLPM) can be used as an alternative method for nonlinear least squares estimation. The objective in this nonlinear estimation is to locate the global minimum of the function of sum of squared error terms,  $\sum e^2$ . Given the estimated nonlinear parameters, the determinant of Hessian is used for the validity of a convex objective function.

**Key words :** Nonlinear parameters, Global minimum, Gauss–Newton Algorithm, Nonlinear estimation, Nonlinear Programming, Nonlinear Production Function, Optimality.