بررسي وزن اسپيلاين هاي صفحات نازک برای مدل سازی رقومی زمین

جلال امینی*[۱] و سینا تقوي كيش[۲]

[۱]استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده هاي فنی- دانشگاه تهران

[۲]دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده هاي فنی- دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۳/۱۲/۹، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۸/۲۰، تاریخ تصویب ۸۴/۱۰/۲۴)

چکیده

مدل هاي رياضي گوناگوني براي برازش سطح توپوگرافی زميني پيشنهاد شده است كه يكي از اين مدل ها سطوح اسپلاين هاي صفحات نازک[a] مي باشند. در اين مقاله ابتدا به تشريح رياضي اسپلاين هاي صفحات نازک و سپس به حل و پياده سازي روي داده هاي رقومی زمين پرداخته مي شود. از آنجا كه حل هر مسئله معمولاً مسائل جديدی مطرح مي كند روش حل مذكور نيز مسئله وزن را پيش مي كشد. براي بررسي وزن, بر اساس وابستگي يا عدم وابستگي به چگالي, دو گونه وزن كلي در نظر گرفته شد. به نمايندگي از روش هاي وابسته به چگالي نقاط, روش وروني و روش وزن ثابت در برابر آن در نظر گرفته شد. در نتيجه به صورت تجربي اثبات شد سطوح حاصل از اسپيلان هاي صفحات نازک به پراكندگي نقاط ايجاد كننده آنها وابستگي ندارند.

واژه های کلیدي: اسپلاينهاي صفحات نازک (TPS) - مدل ارتفاعي رقومي (DEM) - انترپولاسيون

مقدمه

سطح توپوگرافي زمين را مي توان به عنوان يک سطح رياضي پيوسته در نظر گرفت كه براي بيان اين سطح بصورت رقومي مي توان نقاطي در فواصل مشخص روي سطح توپوگرافي اندازه گيري نمود. مدل رقومي اين سطح كه مي تواند براي تعيين ارتفاع هر نقطه دلخواه بكار رود به كمک روش هاي درون يابي بر اساس نقاط اندازه گيري شده قابل تعيين است. به منظور ايجاد يک شبكه ي منظم بر اساس نمونه هاي اندازه گيري شده مي توان از روش هاي درون يابی بهره گرفت. بطوركلي روش هاي درون يابي به دو طبقه ي قطعي و احتمالي تقسيم مي شوند. روش هاي قطعي مستقيماً بر اساس فرمول هاي رياضي براي تعيين ارتفاع نقاط استفاده مي شود و روش هاي احتمالی بر اساس خود همبستگي در آمار مورد استفاده قرار مي گيرند. اسپيلاين هاي صفحات نازک كه به صورت مخفف TPS نيز خوانده مي شود يكي از مدل هاي درونيابي قطعي است كه اولين بار بسال ۱۹۷۶ ميلادي توسط داچن[۲] معرفي شد[۴]. وي توابع پايه شعاعي[۳] را به عنوان راه حل معرفي نمود كه توسط منگاست[۴] بسط داده شدند[۱۰].

امروزه TPSها كاربردهاي بسياري يافته اند كه مي توان به كاربردهاي ژئوفيزيكي از جمله نقشه برداري ثقل سنجي و مغناطيسي[۲]. مدلسازي اثر انگشت[۱], تحقيقات پزشكي[۱۱], توليد داده ي شبكه اي از روي منحني هاي ميزان[۷و۹] و غيره اشاره كرد. همچنين براي درونيابي منحني هاي ميزان مياني نيز مورد استفاده قرار گرفته اند[۷].

جوال[۵] در تحقيق خود بر روي روشهاي متفاوت سيستم اطلاعات توپوگرافي 1:10000 ليتواني براي از بين بردن جابجايي ارتفاعي تصاوير آيكونوس[۶] جهت ايجاد مدل رقومي ارتفاعي[۷]روش TPS را با روشهاي چندجمله اي كه توسط نرم افزار ERDAS استفاده مي شود مقايسه كرده و به اين نتيجه مي رسد كه TPS الگوريتمي مطمئن تر است و نرم افزار PCI Gematica-OrthoEngineرا براي اين كار پيشنهادكرد[۱۲] نرم افزار MicroStation Descartes 7.0, TPS را به تكنيک هايش اضافه كرده كه به صورت كلي براي تصحيح تغيير شكلهاي ناشي از Rubbersheeting به كار برده مي شود[۱۴]. بُزتُسان[۸] در سال ۲۰۰۲ ثابت مي كند كه TPS ها در معادلات واگرا-همگرا دچار مشكل نمي شوند و روشي با جواب منحصر به فرد براي معادلات ديفرانسيل خود مي باشند[۳].

در ادامه ي مقاله در بخش دوم TPS از نظر رياضي تعريف و راه حلي براي ايجاد آن معرفي مي كنيم.

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۴۳۷۸ , فاکس : ۸۸۰۰۸۸۳۷ , Email: jamini@ut.ac.ir

از آنجاکه در این راه حل مشکل وزن مطرح مـي گـردد در بخش ۳ بـه بررسـي وزن در مـدل فـوق مـي پـردازيم. در بخش ۴ روش مقاله روي نقاط ارتفاعي يـک منطقـه تپـه ماهوری پیاده سازي و سپس نتايج حاصل مـورد ارزيـابي قرار مي گيرد. در انتها در بخش ۵ نتايج و پيشنهادات ارائه مي گردد.

مدل رياضي اسپيلاين هاي صفحات نازک

اسپيلاين صفحه ي نازک برگرفتـه از يـک مفهـوم فيزيکي به مفهوم صفحه اي الاسـتيک خـالي از هـر گونـه نيروي خارجي است که بر روي نقاط کنترل رها مي شود. بنابراين اين سطح بايد داراي کم ترين انـرژي پيچـشي در نقاط کنترل باشد. اين انرژي به صـورت انتگـرال زيـر روي فضاي $\Re^2$ تعريف مي شود[۱۳].

$$I[f(x,y)]=\iint_{\Re^2} f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2$$

(۱)

در معادله ي (۱)، f معرف ارتفاع در مدل سه بعدي است. از خواص معادله ي (۱) ميتـوان بـه ايـن اشـاره کـرد کـه پيچشي است غير حساس به دوران[۹], پوشش دهنـده ي نرم دوم سطح اسـت و آن هنگـام کـه مينـيمم گـردد بـه معناي اينست که پيچش سطح در نقاط کنترل و تغييرات شيب در صفحات مماس به حداقل خود رسيده است.

اسپيلاين های صفحات نازک برای بيان سـطوح مي‌توانند جواب يک مسئله انترپولاسيون[۹] و يا يک مـسئله تقريب[۱۰] باشند. در يک مسئله انترپولاسيون برای n نقطه داده شـده از سـطح بـا ارتفـاع معلـوم f_i ، معادلـه سـطح (تابع $f(x,y)$) طوری پيدا مي شود که در نقاط داده شده $f(x_i,y_i)=f_i \ \ (x_i,y_i,f_i;i=1,2,...,n)$ و انتگـــرال (۱) مينيمم شود.

از طرف ديگر سطح اسـپيلاين هـاي صـفحات نـازک بـه عنوان يک تقريب از سطح واقعـي داده هـا مـي بايـست از نزديکي نقاط کنترل عبور کند (جواب مسئله تقريـب). در اين حالت سطح $f(x,y)$ طوری تعيين مي شود که فاصله ي آن با نقاط کنترل کمينه مي شود, به عبارتي رابطه (۲) (نرم L2) مينيمم شود[۱۱].

$$E_{TPS}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(f(x_i,y_i)-z_i)^2+\iint_{\Re^2} f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2$$

(۲)

داچُن و سوبر نشان دادند که توابعي به شکل رابطه (۳) جواب مسئله انترپولاسيون مي باشند.

$$\sum_i a_i\phi(r_i(x_j,y_j))+b_0+b_1x_j+b_2y_j=z_j;$$
$$\sum_j a_i=0;\sum_j a_ix_i=0;\sum_j a_iy_i=0;$$
$$(j=1,...,n);$$

(۳)

و با در نظـر گـرفتن وزن هـاي μ_i در مـسئله ي تقريب [معادله ي(۲)]، توابع شکل زير جواب مسئله فـوق است[۴].

$$\frac{8\pi a_j}{\mu_j}+\sum_i a_i\phi(r_i(x_j,y_j))+b_0+b_1x_j+b_2y_j=z_j;$$
$$(j=1,...,n)$$

(۴)

که ϕ همان توابع پايه شعاعي مي باشـند کـه در مـورد TPS ها بـه فـرم کلـي $\phi(x,x_j)=\phi(r_j)=r_j^{2m}\log(r_j)$ نمايش داده مي شـوند و از پيوسـتگي C^{2m-1} برخـوردار است[۳]. انتخاب m خارج از بحث اين مقاله بوده بنـابراين بر اساس آنچه براي TPS هاي مـورد اسـتفاده در DTM[۱۱] معمول است m را ۱ اختيـار کـرديم؛ بنـابراين تـابع ϕ از پيوســـتگي C^1 برخـــوردار بـــوده و بـــه صـــورت $\phi(x,x_i)=\phi(r_i)=r_i^2\log(r_i)$ مـي باشـد کـه در آن r فاصله ي اقليدسي بين نقاط در فضاي دو بعدي مي باشـد $(r_i(x_j,y_j)=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2})$.

روش پيشنهادي داچُن حل مستقيم اين سري معـادلات است که در واقـع يـک سيـستم معـادلات خطـي بـا n+3 معادله مي باشد [۴].

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
8\pi/\mu_1 & c_{21} & \cdots & c_{n1} & 1 & x_1 & y_1\\
c_{21} & 8\pi/\mu_2 & \cdots & c_{n2} & 1 & x_2 & y_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
c_{1n} & c_{2n} & \cdots & 8\pi/\mu_n & 1 & x_n & y_n\\
\hline
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0\\
y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\\\hline b_0\\b_1\\b_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\\\hline 0\\0\\0\end{array}\right);$$
$$c_{ij}=\phi\big(r_i(x_j,y_j)\big)$$

(۵)

مـــي تـــوان معادلـــه ي (۵) را بـــه صـــورت $\begin{pmatrix}C & F\\F^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z\\0\end{pmatrix}$ نيز نمايش داد. مـاتريس ضـرايب $\begin{pmatrix}C & F\\F^T & 0\end{pmatrix}$ يک ماتريس قرينه ي مثبت است. کاراسـو[۱۲] حل معادلات فوق را از طريق تکنيک فاکتور گيـري QR[۱۳] پيشنهاد کرد[۹], بطوريکه Q يک ماتريس (n,n) ارتوگونال

و R یک ماتریس به فرم (n,3) مي باشد که تمامي اعضاي آن بغیر از بالا مثلث U صفر است.

$$R=\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix};Dim[U]=3\times 3$$

(۶)

از آنجا که F ماتریسي $3\times n$ از مرتبه ي[۱۴] ۳ مـي باشـد پس حد اقل ۳ نقطه با مختصات نا مشخص وجود دارد لذا R داراي مرتبه ي ۳ بوده و U معکوس پذیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix}C & F\\F^T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^T & 0\\0 & I\end{pmatrix};$$
$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(۷)

با جایگذاري معادلـه(۷) در معادلـه (۵) مـي تـوان نوشت:

$$\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^T & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^Ta\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Z\\0\end{pmatrix}\\ \wedge\\ Q^{-1}=Q^T\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^TZ\\0\end{pmatrix}\\ a=Qd\end{cases}$$

با جایگذاري $Q=(Q_{1_{n\times 3}}Q_{2_{n\times n-3}})$ و $d=\begin{pmatrix}d_1\\{\scriptstyle 3\times 1}\\d_2\\{\scriptstyle (n-3)\times 1}\end{pmatrix}$ در معادله بالا داریم.

$$\begin{pmatrix}Q_1{}^TCQ_1 & Q_1{}^TCQ_2 & U\\Q_2{}^TCQ_1 & Q_2{}^TCQ_2 & 0\\U^T & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1{}^TZ\\Q_2{}^TZ\\0\end{pmatrix}$$
$$\wedge$$
$$a=Q_1d_1+Q_2d_2$$

(۸)

از معادله ي (۸) مي توان دید که $U^Td_1=0$ چـون U غیـــر صـــفر اســـت لـــذا $d_1=0$؛ از معادلـــه ي $Q_2{}^TCQ_2d_2=Q_2{}^TZ$ مـــي تـــوان d_2 و در نتیجـــه $a=Q_2d_2$ را بدســـــت آورد؛ از معادلـــــــه ي $Q_1{}^TCQ_2d_2+Ub=Q_1{}^TZ$ نیز مي توان b را اسـتـخراج نمود.

در روش حل مستقیم که در بالا به تفـصیل بحـث شد اگر بیش از ۳ نقطه ي کنترل غیر تکراري داشته باشد هرگز جواب تکینه نخواهد داد. ولي ازنقاط ضـعف آن بایـد به وزن هاي μ_i در معادله ي (۴) اشاره کردکه باعث مـي شود جوابهاي حاصل از این روش متأثر از μ_i ها گردد. در این مقاله به بررسي وزنهـای فـوق در مـدل هـاي رقـومي زمین توســط اسپلاین هاي صفحات نازک می پردازیم.

بررسي وزن در اسپلاین هاي صفحات نازک

براي سادگي بحث, معادله ي (۲) را به صورت زیر نمایش دادیم.

$$E_P=P\sum_{i=1}^{n}r_i(f(x_i,y_i)-z_i)^2+I(f)$$

(۹)

که در آن $P=\sum_i\mu_i$ و $r_i=\frac{\mu_i}{P}$ که r_i وزن نسبي نقطه ي (x_i,y_i,z_i) است و P در واقع تضمین کننـده ي قـدرت معیـــار بـــرازش $e(f)=\sum_{i=1}^{n}r_i(f(x_i,y_i)-z_i)^2$ در برابـــر معیار پیچش $I(f)$ است .

بنابراین انتخاب صحیح وزن هاي P و r_i الزامي است.

الف) بحث را با P آغاز مي کنیم

فرض کنید $P>0$ نمایانگر یک TPS منحـصر بـه فـرد باشد که مـشخص کننـده ي سـطح f_P اسـت و معادلـه $E_P(f)=P.e(f)+I(f)$ را مینیمم مي کند؛ به همین ترتیب براي $Q>0$, که مـشخص کننـده ي سـطح f_Q است و معادله $E_Q(f)=Q.e(f)+I(f)$ را مینیمم مي کنـد. بـه دلیـل خاصـیت مینـیمم $E_P(f_P)$ و $E_Q(f_Q)$ داریم:

$$E_P(f_P)\le E_P(f_Q)\text{ و }E_Q(f_Q)\le E_Q(f_P)$$

به عبارت دیگر:

$$P.e(f_P)+I(f_P)\le P.e(f_Q)+I(f_Q)$$

(۱۰)

$$Q.e(f_Q)+I(f_Q)\le Q.e(f_P)+I(f_P)$$

(۱۱)

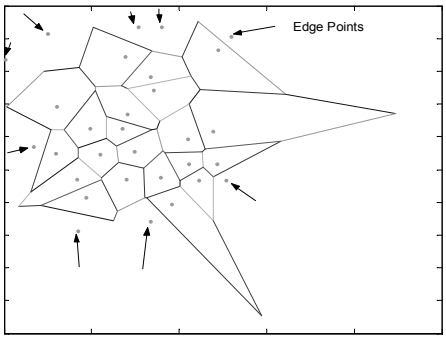
اگـــــر $P>Q$ باشـــــد آنگـــــاه $I(f_P)\ge I(f_Q)$ و $e(f_P)\le e(f_Q)$؛ این به این معني است که سـطح f_Q

نرمتر از سطح f_P خواهد بود. از طرف ديگر اگر P به سمت بينهايت ميل كند سطح ما مي تواند كاملاً منطبق بر سطح واقعي داده گردد.

ب) حال فرض مي كنيم P مشخص شده و وزن هاي r_i را بررسي مي كنيم

البته ساده ترين وزن مي تواند $r_i = 1/n$ براي تمامي نقاط باشد (در اين مقاله پيشنهاد مي شود كه $r_i = 1$ در نظر گرفته شود تا P را محاسبه نكنيم). اما به دليل نامنظم بودن نقاط و تفاوت چگالي محلي نقاط تعيين وزن از طريق مساحت چندضلعي هاي وروني[15]معرفي مي گردد [۶و۹]. لذا به طور خلاصه اين روش را معرفي مي كنيم و سپس آنچه اين مقاله را بر اساس آن پايه گذارده ايم به بحث مي گذاريم.

چند ضلعي هاي وروني (شكل ١) يک روش افراز فضاي $\Re^2$ است. كه در آن شرط مرزي مجموعه هاي افراز كننده عمود منصف ميان مراكز ثقل همسايه ي آنهاست.



شكل ١: چند ضلعي هاي وروني.

از آنجا كه فضاي $\Re^2$ داراي وسعتي از $+\infty$ تا $-\infty$ مي باشد و نقاط ما هرگز نمي توانند كران بالا يا كران پايين اين مجموعه را پوشش دهد. لذا در مراكز ثقل حاشيه ای مقدار μ_i يک در نظر گرفته مي شود. از اين رو در اين تحقيق در ذيل روشهای (a) تا (e) كه بر اساس مساحت نرمال شده وروني با وزنهای مختلف P و روش (f) بر اساس مساحت وروني و (g) با وزن ثابت ١ استفاده شده مطرح مي گردد.

a) روش مساحات نرمال شده ي وروني با وزن ثابت P=١ كه مقدار μ_i در مراكز ثقل حاشيه اي برابر يک در نظرگرفته شده است.

در اين روش وزن دهي همانطور كه از نام آن پيداست P برابر ١ و r_i مساحت نرمال شده ي چندضلعي وروني است كه نماينده ي نقطه ي i ام است, اين روش داراي سيستم تعريف وزني به صورت زير مي باشد:

$$\mu_i = \begin{cases} r_i = \dfrac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; & if\,(i = 1,2,3,...,n \,\&\, A_i \neq \infty) \\ 1; & if\,(A_i = \infty) \end{cases} \qquad (۱۲)$$

كه در آن A همان مساحت چند ضلعي وروني است كه براي چندضلعي هاي باز مراكز ثقل حاشيه اي مقدار آن صفر در نظر گرفته شده است.

b) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=100

آنچه كه روش مساحت ها ي نرمال شده ي وروني با ضريبP برابر يک ايجاد مي كند سطحي است كه ميزان نرمي آن به نزديكي گذر آن از نقاط كنترل برتري دارد لذا بر اساس آنچه در ابتداي اين فصل گفته شد ثابت P وارد معادلات مي گردد. لازم به ذكر است كه P را رقمي بين 10^3 تا 10^5 معرفي مي كنند[۴]. لذا در اين مقاله مشاهدات خود را بر مبناي تغيير در P نيز بررسي كرديم.

$$\mu_i = 100 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,...,n \qquad (۱۳)$$

c) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=1000

$$\mu_i = 1000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,...,n \qquad (۱۴)$$

d) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=10000

$$\mu_i = 10000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,...,n \qquad (۱۵)$$

e) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=100000

$$\mu_i = 100000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,...,n \qquad (۱۶)$$

f)روش مساحات وروني

اين روش بر اين اساس پايه گـزارده شـد کـه حالـت نرمال و غير نرمال را بتوان با هم مقايسه کرد.

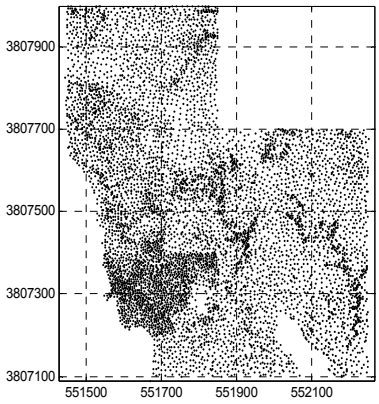
$$\mu_i = A_i; i = 1,2,3,...,n$$

(۱۷)

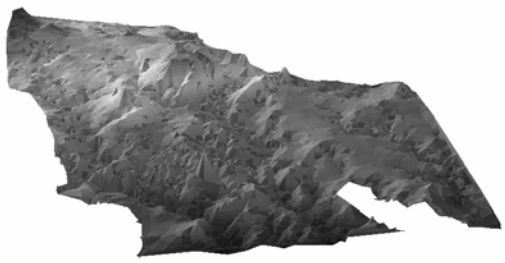
g) روش وزن ثابت برابر يک

$$\mu_i = 1; i = 1,2,3,...,n$$

(۱۸)



الف)



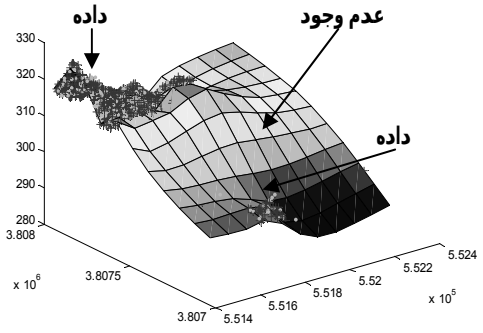
ب)

شکل ۲- الف) : نماي دو بعدي از داده هاي آموزشي
ب) نماي ۳ بعدي از داده هاي آموزشي .

پياده سازي و ارزيابي نتايج

در اين پروژه داده هاي ارتفاعي منطقه اي واقع در استان مرکزي (شهر اراک) به وسعت ۸۰۴*۹۱۰ مترمربـع که شامل ۷۳۳۰ نقطه ارتفـاعي بـود مـورد اسـتفاده قـرار گرفت (شکل ۲). براساس تئوري بيان شـده در بخـش۲ و تعيـين وزن هـاي لازم در بخـش۳ برنامـه اي در محـيط MATLAB نوشـته شـد. برنامـه ي مـذکور ابتـدا پـس از دريافـت داده مـشخص مـي کنـد چـه مقـدار از کـل داده انتخاب شود تا مدل TPS روي آن اجـرا شـود؛ بـراي ايـن منظور دو روش انتخاب براي کـاربر در نظـر گرفتـه شـده است. روش انتخاب اول نقاط را بـه همـان ترتيبـي کـه در داده ي اوليه برداشـت شـده و بـدون ايجـاد نظـم در آنهـا انتخاب مي کند. براي اين کار به دو مؤلفه نقطه ي شـروع و تعداد نقاط انتخاب شونده نيـاز دارد. روش انتخـاب دوم، داده را به نظم در آورده و پنجره اي از آن بـر اسـاس يـک شبکه ي m*m استخراج مي کند. مثلاً سـتون اول جـدول (۱) نماينده ي دو نحوه ي انتخاب داده اسـت. سـطر آخـر که از لحاظ تعداد نقاط متفاوت از ديگر سطرها است نشان دهنده ي روش انتخاب نقـاط بـه شـيوه ي اول اسـت کـه نقطه ي شروع نقطه ي شماره يک است که تعـداد ۱۵۰۰ نقطه در کل از داده ي اوليه برداشت مـي کنـد. همچنـان سطر هاى اول اين جدول انتخاب يک پنجره ۵ در ۵ است که همان شيوه ي دوم انتخاب داده مطرح شده مي باشد.

حـال بـه منظـور مقايـسه ي روشـهاي وزن دهـي مطرح شده در بخش ۳, ۱۰ سري داده با پراکندگي هـاي متفـاوت از داده انتخـاب گرديـد.پـس از اعمـال روشـهاي مطرح شده در اين مقاله روي هر سري داده, براي بدسـت آوردن دقت هر سري داده نقاط کنترل و نقاط چـک[۱۶] بـه نسبت ۲ به ۱ از داده ي گزينش شده انتخاب شد. انحراف معيار و ميانگين باقيمانده ها بر روي نقاط چک بـراي هـر يک از روش هاي وزن دهي محاسبه گرديد که بـه ترتيـب در جداول (۱) و (۲) و شکل (۴) نتايج حاصل آمده است.



شکل۳ : رفتار TPS در مناطق بدون داده.

نکته جالب رفتار نرم منحني TPS در مناطق بدون داده و عدم وجود افزونگي برونيابي [۱۷] مي باشد (شکل ۳).

همانطور که انتظار مـي رفـت روشـهاي مـساحات نرمال شده ي وروني بـا وزن ثابـتP=1 [روش a] بـدليل برتري قسمت انتگرال پيچش به قسمت نُرم L2 در معادله ي (۲) و بحث صورت گرفته در قسمت (الـف) بخـش۳ در

نزديكي به نقاط كنترل نسبت به ديگر روش هـاي معرفـي شده از خود ضعف نشان می دهد.

روشهاي وروني كـه وزن ثابـت[P]آنهـا مخـالف ١ باشد پاسخي بهتر از تمامي موارد بحث شـده مـي دهنـد. ولي آنچه آشـكار اسـت جـواب بهينـه ميـان 10^3 تـا 10^5 مي باشد, ولي اين مطلب تقريبي بوده مـثلاً در شـكل (۴) بـراي حالـت ۲۴۲ نقطـه, b [P=100] انحـراف معيـاري كوچكتر از مينيمم c، d و e دارد. لذا بايد براي هـر نمونـه, P بهينه را يافت و تنها يک جواب منحصر بـه فـرد وجـود ندارد (شكل ۴ روشهاي b، c، d و e) و اين بر خلاف ايـده ي بهتر شدن جواب در صورت ميل P به سـمت بينهايـت است كه در قسمت (الف) بخش۳ مطرح گرديد.

f همواره پاسخي بهتر از a مي دهد ولي با توجـه به ميزان خطا لزوماً بدتر از b، c، d و e نيست لـذا نتيجـه آنست كه روشهاي نرمال شده در TPS ها برتري فاحشي بـر روش غيـر نرمـال آن ندارنـد (شـكل ۴ روشـهاي (fg,e,d,c,b,a .

برخلاف انتظار در تمامي١٠ حالت مورد آزمـايش, نتايج حاكي از اينست كه اگر وزنهاي μ_i را ثابـت و برابـر يک(روش g) در نظر بگيريم، تفاوت چنـداني ميـان پاسـخ آن و بهتـرين پاسـخ هـاي روش هـاي اسـتفاده كننـده از الگوريتم وروني ندارد (شكل ۴). از طرفي الگـوريتم مزبـور مـشكلاتي را نيـز بـه TPS اضـافه مـي كنـد كـه وزنهـاي ثابت μ_i برابر يک (g) داراي آنها نيستند. ايـن مـشكلات عبارتند از:

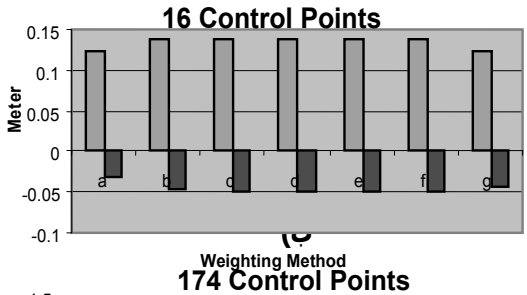
- ✓ امكان وجود بيش از سه مركز ثقل بر روي يک دايـره و ايجاد چند ضلعي محاطي توسـط آنهاسـت(n نقطـه) كه ايـن روش را دچـار ابهـام مينمايـد زيـرا بـيش از C_n^2 عمود منصف همـرس خـواهيم داشـت و امكـان تعريف نقاط همسايه را مشكل مي سازد.

جدول ۱: نتايج انحراف معيار مربوط به مجموعه داده ۱.

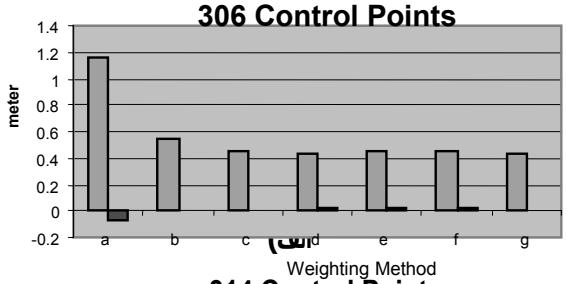
تعداد نقاط كنترل زميني	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
16	0.122	0.139	0.138	0.138	0.138	0.138	0.122
174	1.414	0.861	0.717	0.740	0.779	0.783	0.710
190	0.724	0.542	0.521	0.568	0.614	0.622	0.564
250	0.872	0.505	0.453	0.454	0.458	0.457	0.483
552	1.257	0.748	0.660	0.683	0.718	0.723	0.663
306	1.152	0.547	0.452	0.437	0.458	0.460	0.432
314	1.301	0.682	0.641	0.710	0.747	0.749	0.682
242	0.692	0.373	0.382	0.417	0.444	0.447	0.398
96	1.693	1.429	1.410	1.416	1.420	1.420	1.404
1000	1.401	0.867	0.654	0.536	0.507	0.510	0.504

جدول ۲ : نتايج ميانگين مربوط به مجموعه داده ۱.

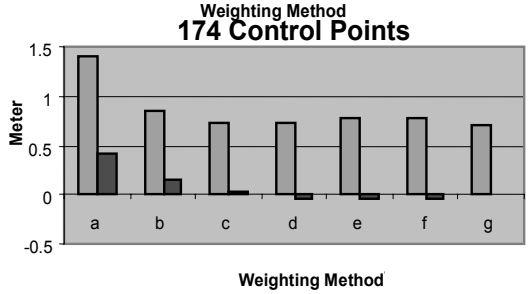
تعداد نقاط كنترل زميني	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
16	-0.032	-0.045	-0.048	-0.049	-0.049	-0.049	-0.043
174	0.411	0.140	0.033	-0.034	-0.051	-0.051	-0.020
190	0.385	0.092	0.032	-0.009	-0.023	-0.025	0.001
250	0.123	0.056	0.040	0.040	0.041	0.041	0.035
552	0.140	0.088	0.042	0.021	0.008	0.006	0.016
306	-0.069	0.003	0.005	0.017	0.019	0.019	0.012
314	0.177	-0.009	-0.054	-0.082	-0.093	-0.094	0.010
242	0.040	-0.022	-0.044	-0.068	-0.079	-0.080	-0.061
96	-0.390	0.112	0.133	0.139	0.143	0.143	0.117
1000	0.156	0.049	0.029	0.005	-0.006	-0.010	-0.013



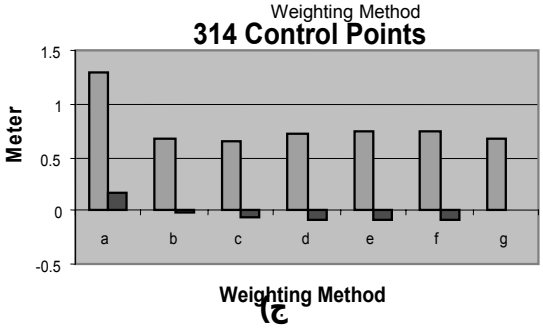
ب)



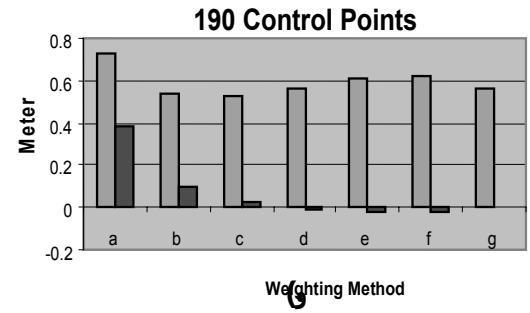
الف)



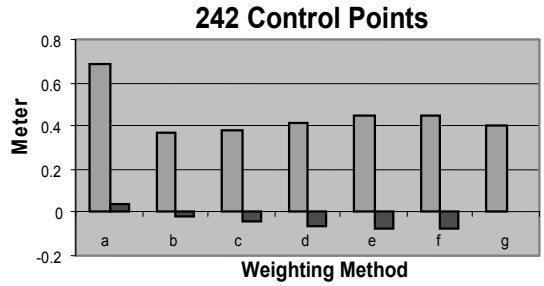
د)



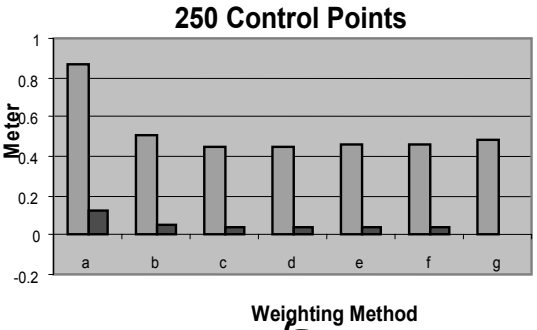
ج)



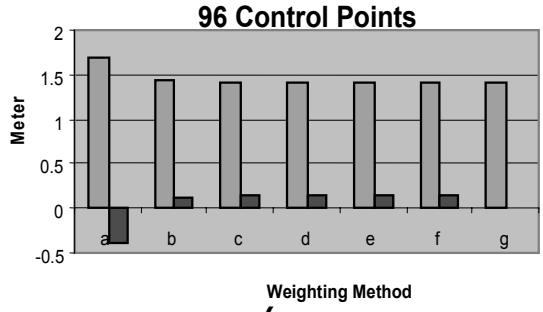
ي)



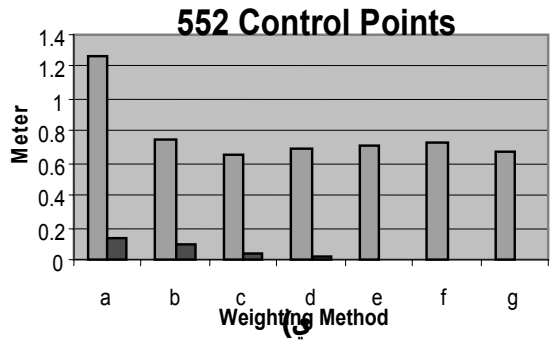
ه)



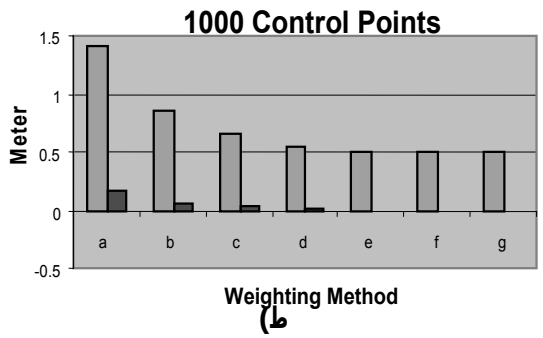
ح)



ن)



ي)



ط)

شكل ٤ : مقايسه ميانگين و انحراف معيار روشهاى مختلف وزن دهى براى تعداد نقاط كنترل متفاوت الف) ٣٠٦ ب) ١٦ ج) ٣١٤ د) ١٧٤ ه) ٢٤٢ و) ١٩٠ ن) ٩٦ ح) ٢٥٠ ط) ١٠٠٠ ي) ٥٥٢ نقطه است كه ستون هاي خاكستري كمرنگ معرف انحراف معيار و ستون هاي خاكستري تيره معرف ميانگين مي باشند.

- ✓ همچنين مسئله ي تعيين چندضلعي هـاي حاصـل از اين نقاط مي توانـد بـه عنـوان يـک مـسئله ي مهـم مطرح گردد كه از نظر برنامه نويسي پيچيده و زمانبر مي باشد.
- ✓ محاسبه ي مساحت چند ضلعي هاي نامنتظم نيز بـه پيچيدگي هاي برنامه اضافه مي گردد.

لذا لزوم بازبيني در دلايل معرفي روشهاي استفاده كننـده از مساحات چند ضلعي هاي وروني بار ديگر اهميـت خـود را نشان داده و نويسنده را بر آن داشت كه آزمايشي ديگـر براي آنها ترتيب دهد. كنتـرل حـساس اسـت. بنـابراين در ادامه به بررسي ايـن خاصـيت در شـرايط خـاص TPS هـا پرداخته و آزمايشي تعريف شد. به اين صورت كه دو ناحيه همسايه از دو مجموعه داده اصلي انتخاب گرديد. اولـي(I) داراي ۴۵۴ نقطه و دومي (II) ۴۷۳ نقطه داشت.

نقاط كنترل و چک به نسبت ۲ به ۱ جدا شـده تـا خطاي سطح ايجاد شده توسط نقاط كنترل بـا اسـتفاده از نقاط چک تعيـين گـردد. چگـالي نقـاط كنتـرل در I, ۱۰ نقطه در كيلومتر مربع و در داده II، ۱۰ نقطه در كيلـومتر مربـع بـود. خطاهـا بـراي تركيـب دو سـري داده ي فـوق محاسبه شد كـه نتـايج در جـداول (۳) و (۴) آورده شـده است.

سپس در مر حله ي بعد داده ي منطقه ي I تغيير داده نشد و تنها داده ي منطقـه ي II نـصف گرديـد و بـه ۲۳۶ نقطه رسيد. دوباره نقاط كنترل و چک به نسبت ۲ به ۱ جدا شـد و چگـالي نقـاط كنتـرل در II بـه ۵ نقطـه در كيلومتر مربع يعني كمتر از نصف II تقليل يافت كه نتـايج مربوط به آن در سطر I+½II جداول (۳) و (۴) آورده شده است.

در ادامه در حاليكه هنوزمنطقه ي I دست نخورده باقي مانده است داده ي منطقه يII ½ دوباره نـصف و بـه ۱۱۹ نقطه رسانده شد كه چگالي در اين حالـت تقريبـاً ۲ نقطه در كيلومتر مربع يعنـي بـه كمتـر از يـک چهـارم II تقليل يافـت. نتـايج در جـدول (۳) و (۴) در سـطرI+¼II نشان داده شده است.

حال براي آخرين بار داده ي منطقه ي II¼ نـصف گرديده و بـه ۶۰ نقطـه رسـيد در حاليكـه چگـالي نقـاط كنترل كه به نسبت ۲ به ۱ انتخاب شده بودند بـه ميـزان تقريباً ۱ نقطه در كيلومتر مربع يعنـي بـه يـک هـشتم II رسيد. نتايج درسطرI+⅛II در جداول (۳) و (۴) نشان داده شده است.

در شكل (۵) نمايي دو بعـدي از داده هـاي تغييـر يافته براي چگالي هاي مختلف نشان داده شده است, آنچه انتظار مي رفت اين بـود كـه چـون در روش وزنهـاي μ_i ثابت و برابـر يـک(روش g) نـسبت بـه چگـالي حـساسيت نداشت و با تغيير چگالي نقاط وزن ها تغيير نمي يافتند مي بايست با كاهش چگالي در قسمتي از منطقـه, پاسـخ آن نسبت بـه الگـوريتم وروني دچـار ضـعف گـردد. ولـي چنانچـه در شـكل (۶) ملاحظـه مـي شـود روش وزنهـاي ثابت μ_i برابر يک (روشg) حتي در زمـاني كـه چگـالي نقاط به يک هشتم داده ي اوليه مي رسد, خطايي نزديـک به روشهاي وروني حاصل مي نمايد و دچار ضعف نگشته و از بافت پيشبيني شـده تبعيـت نمـي كنـد. در شـكل (۷) رفتار هريک از روشهاي وزن دهي نشان داده شـده اسـت, اين شكل نشان مي دهد با تغيير چگـالي حتـي روشـهاي وروني با وزنهاي P ,۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ نيز از يـک فـرم كلـي تبعيت نمي كنند و هيچكدام از نتايج يک منحني صعودي يا نزولي نمي‌شود. لذا اين نتيجه گرفته شد كـه در كمـال تعجب روش TPS به چگالي نقاط حساسيت ندارد.

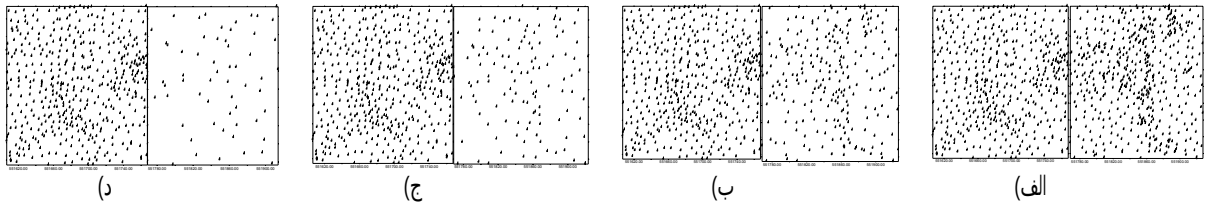
آنچه در اين بخش ذكر شد نشان مي دهد بـراي اين راه حل خاص اسپيلاين هـاي صـفحات نـازک بـا وزن ثابت يكي از بهترين گزينه هاي وزن مي باشد؛ اين حالـت عـلاوه بـر اينكـه جـوابي قابـل قبـول مـي دهـد, نيـاز بـه محاسبات پيچيده ندارد و روش TPS را به صـورت روشـي متحدالـشكل بـراي داده هـاي گونـاگون در مـي آورد كـه چگالي داده براي آن مهم نيست.

جدول ۳: نتايج انحراف معيار مربوط به پراكندگي هاي مختلف داده I و II.

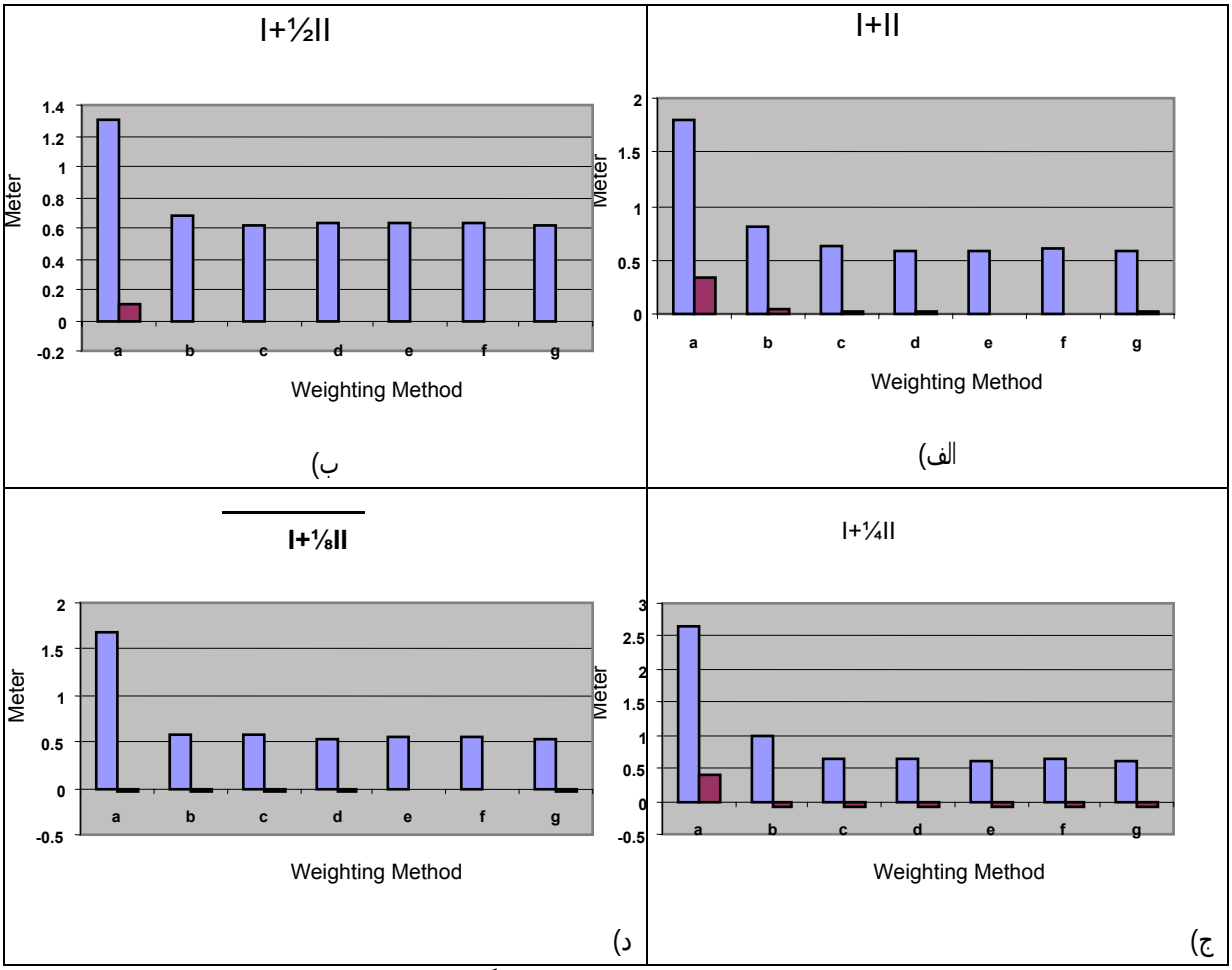
چگالي داده	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
I+II	1.789	0.816	0.637	0.583	0.595	0.609	0.581
I+½II	1.308	0.685	0.623	0.634	0.634	0.635	0.615
I+¼II	2.638	1.004	0.648	0.648	0.622	0.638	0.620
I+⅛II	1.690	0.578	0.578	0.534	0.545	0.554	0.531

جدول ٤: نتايج ميانگين مربوط به پراكندگی های مختلف داده I و II.

چگالي داده	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
I+II	0.342	0.046	0.021	0.017	0.010	0.003	0.011
I+½II	0.110	-0.014	-0.013	-0.001	-0.001	-0.001	-0.009
I+¼II	0.412	-0.084	-0.090	-0.090	-0.081	-0.077	-0.082
I+⅛II	-0.045	-0.038	-0.038	-0.025	-0.017	-0.017	-0.026



شكل ٥ : پراكندگی نقاط در چگاليهای مختلف كه مربع چپ با چگالي داده I و مربع راست الف) با چگالي داده II؛ ب) با نيمي از چگالي داده II؛ ج) با يك چهارم چگالي داده II و د) با يك هشتم چگالي داده II.



شكل ۶ : مقايسه روشهای مختلف برای چگاليهای متغير شكل ۵.

نتيجه گيري

TPS ها به عنوان روشي كه حساسيت به چگالي داده ندارند مي توانند براي برازش سطوح در نقشه برداري نوين نقشي قدرتمند ايفا كنند چرا كه معمولاً در نقشه برداري منابع داده گوناگون است و لزوماً چگالي داده ي توليد شده از روشهاي متفاوت يكسان نيست و اين تعيين وزن ها از مباحث هميشگي در نقشه برداري به نظر مي رسد. از طرف ديگر با استفاده از TPSو عدم كاربرد روش وروني كه سبب محدوديت هايي در تعداد نقاط كنترل و سرعت عمليات مي گردد مي توان سطحي رياضي را بر

خلاف روشهايي همچون BSPline ها بر تمام داده در يک بار پردازش برازاند. از آنجاکه روش مستقيم حل مسئله يک فرم رياضي عاري از مقياس را مي دهد مي توان در نرم افزار هاي CAD/CAM نيز از آن استفاده نمود.

آنچه که به نظر مي رسد اينست که استقلال از چگالي مي بايست از خواص اسپيلاين هاي صفحات نازک باشد از اين رو پيشنهاد مي شود مطالعاتي بر روي ديگر روشهاي حل معادله ي TPS مانند روشهاي تکراري مطرح شده توسط فرانک ١٩٨٢[14] صورت گيرد. چرا که حداقل نشان دهنده ي اين است که اين روش در مناطق چگال و غير چگال با خطايي تقريباً مشابه جوابگوست. به هر صورت استفاده از اين روش بدليل عدم وجود افزونگي درونيابي براي مناطق تپه ماهوری با داده ي کافي پيشنهاد مي شود زيرا که تغييرات يک منطقه بر روي منطقه ي مجاور تأ ثير زيادي ندارد.

تغيير در مختصات، حذف و يا جابجايي يك نقطه در روش حل ذکر شده در اين مقاله منجر به تکرار محاسبات مي‌گردد چرا که يك نقطه در تمامي نقاط ديگر تأثير گذار است. لذا تحقيق بر روي روشي که ويرايش نقاط سبب انجام محاسبات TPS کمتر گردد بسيار مفيد خواهد بود.

مراجع

1 - Bazen, A. M. and Gerez, S. H. (2002). "Thin-Plate Spline modelling of elastic deformations in fingerprints." *3rd IEEE Benelux Signal Processing Symposium* (SPS-2002)., Leuven, Belgium, March 21-22.

2 - Billings, Stephen D., Beatsonz, Rick K., and Newsam, Garry N. (2002). "Interpolation of geophysical data using continuous global surfaces." *GEOPHYSICS*, Vol. 67, No. 6.

3 - Boztosun, I., Chara, A., Zerroukat, M. and Djidjeli, K. (2002). "Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems." *Electronic Journal of Boundary Elements,* Vol. BETEQ 2001, No. 2, PP. 267-282.

4 - Duchon, J. (1976). "Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces." *RAIRO Analyse Numérique 10*, PP.5-12.

5 - Franke, R. (1982). "Smooth interpolation of scattered data by local thin plate splines." *Computing and Mathematics with Applications 8*, PP.273–281.

6 - Goncalves, G., Julien, P., Riazanoff, S. and Cervelle, B. (2002). "Preserving cartographic quality in DTM interpolation from contour lines." *ISPRS 56* (2002), PP.210-220.

7 - Gousie, M. B. *Converting Elevation Contours to a Grid*.

8 - Jenkins, David R. (2000). "Thin plate spline interpolation on an annulus." *ANZIAM J. 42* (E), PP. C819{C836, 2000 C819, 7 August 2000.

9 - Maillet, Gregoire *DSM reconstruction, Manual of photogrammetry*.

10 - Meinguet, J. (1979). "Multivariate interpolation at arbitrary points made simple." *J. Appl. Math. Phys.* Vol. 30, PP.292-304.

11 - Pedersen, Lars. (2000). *Estimation of Thin Plate Spline warp parameters from protein spot positions in 2d electrophoresis gels*.

12 - Sjowall, Aldona. (2001). *Short Report on OrthoEngine*. Vilnius 2001, PP.04-08.

13 - http://mathworld.wolfram.com

14 - http://www.bentley.com/products/descartes

واژه هاي کليدي به ترتيب استفاده در متن

1 - Thin plate splines
2 - J. Duchon
3 - Radial Bases Functions
4 - J. Meinguet
5 - Sjowall
6 - IKONOS
7 - Digital Elevavation Model
8 - Boztosun
9 - Interpolation
10 - Approximation
11 - Digital Terrian Model (DTM)
12 - C. Carasso
13 - Orthogonal-triangular decomposition
14 - Rank
15 - Voronoi Polygons
16 - Check Point
17 - ExtraPolation