آناليز جزر و مدي جهاني و تعيين مدلي جديد براي سطح متوسط جهاني دريا بر اساس توابع پاية متعامد با استفاده از ۱۱ سال مشاهدات ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي توپكس-پوزايدون

عليرضا آزموده اردلان*[۱] و حسن هاشمي فراهاني [۲]

[۱] دانشيار گروه مهندسي نقشه‌برداري - قطب مهندسي نقشه‌برداري و مقابله با سوانح طبيعي
پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۲] دانشجوي دكتري گروه مهندسي نقشه‌برداري - قطب مهندسي نقشه‌برداري و مقابله با سوانح طبيعي
پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۳/۵/۲۱، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۵/۸/۱۵، تاريخ تصويب ۸۵/۱۱/۲۱)

چكيده

در اختيار بودن بيش از ۱۱ سال اطلاعات ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي جمع‌آوري شده توسط ماهوارة توپكس-پوزايدون ما را بر آن داشت كه به مطالعة جامعي در خصوص آناليز هارمونيک تغييرات سطح آبهاي جهاني و تعيين سطح متوسط جهاني دريا بپردازيم. براي اين منظور ابتدا مدل موج سه بعدي براي تعداد ۹ مولفة اصلي جزر و مدي S2، M2، N2، K1، P1، O1، Mf، Mm و Ssa در نظر گرفته شده و ضرايب اين فركانسها به همراه جزء ثابت معادلة موج به هارمونيک‌هاي كروي بسط داده شده‌اند. از آنجاييكه تعامد توابع پاية هارمونيک كروي براي كل جهان صحت داشته و براي سطح آبهاي جهان كه در حدود ⅔ كل جهان را تشكيل مي‌دهند فاقد خاصيت تعامدند، اين توابع با استفاده از روش متعامدسازي گرام-اشميت به توابع متعامد و يكه تبديل گرديدند. ماحصل اين محاسبات، مدلي بر حسب توابع پاية متعامد براي سطح متوسط دريا و ۹ مولفة جزر و مدي پيش‌گفته بوده كه با مدلهاي تعريف شدة قبلي و نتايج حاصل از آناليز تايدگيج‌ها مقايسه گرديده‌اند. در اين مقاله جزئيات مدلسازي و نتايج حاصل از مقايسه با اطلاعات حاصل از آناليز جزر و مدي تايدگيج‌ها و سطح متوسط درياي محاسبه شده توسط ديگران ذكر خواهد شد.

واژه‌هاي كليدي: ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي - توپكس-پوزايدون - جزر و مد - آناليز هارمونيک - سطح متوسط دريا - فرايند گرام-اشميت - توابع متعامد - تايدگيج

مقدمه

پديدة جزر و مد[۱] عامل اصلي در تغييرات لحظه‌اي سطح آب دريا بوده و براي انجام كلية پروژه‌هاي دريايي نظير عمليات عمراني (احداث اسكله، سكوهاي نفتي و ...) در سواحل و آبهاي دور از ساحل، مطالعة جريان‌هاي دريايي، مطالعة نحوة رسوب گذاري در كف درياها و ... اطلاع از وضعيت جزر و مدي ضروري است. بر اين اساس تا كنون تلاش‌هاي بسياري به منظور مدلسازي اين پديده صورت گرفته است. در سواحل مي‌توان اطلاعات جزر و مدي را از طريق جمع‌آوري مشاهدات جزر و مد سنج‌هاي ساحلي[۲] بدست آورد. اما در آبهاي دور از ساحل اين امكان با استفاده از اين مشاهدات وجود ندارد. براي تعيين تغييرات سطح آب دريا در مناطق دور از ساحل روشهاي مختلفي وجود دارد كه بهترين آن ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي[۳] مي‌باشد. ماهواره‌هاي ارتفاع‌سنجي اطلاعات ارتفاعي نقاط مختلف سطح كرة زمين را در امتداد مدار خود جمع‌آوري مي‌كنند. ماموريت اصلي اين ماهواره‌ها اندازه‌گيري ارتفاع سطح آب درياها و اقيانوسها در نقاط و زمانهاي مختلف مي‌باشد. از آنجاييكه داده‌هاي جمع‌آوري شده در روش ارتفاع‌يابي ماهواره‌اي داراي يك پوشش جهاني همگن مي‌باشند، بنابراين مي‌توان با استفاده از اين اطلاعات، مطالعات متعددي را در ارتباط با علوم مختلف دريايي در مقياس جهاني انجام داد. امروزه پيشرفت‌هاي زيادي در زمينة فن‌آوري ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي صورت گرفته است. بطوريكه دقت اندازه‌گيري ارتفاع ماهواره از سطح آب در ماهوارة ارتفاع‌سنجي توپكس-پوزايدون[۴] برابر با ۲ تا ۳ سانتي‌متر گزارش شده است [۱۵]. همچنين با

* نويسنده مسئول: تلفن : ۶۱۱۱۴۳۸۳ , فاكس : ۸۸۰۰۸۸۳۷ , Email: ardalan@ut.ac.ir

بكارگيري سيستم‌هاي تعيين موقعيت نظير سيستم‌هاي SLR[5]، GPS[6] و DORIS[7] و از سوي ديگر به دليل وجود مدل‌هاي دقيقي از ميدان ثقل زمين، دقت تعيين مدار در ماهواره‌هاي ارتفاع‌سنجي تا حد زيادي بهبود يافته است. به عنوان مثال دقت تعيين مدار در ماهوارة ارتفاع‌سنجي توپكس-پوزايدون در حد ۳ تا ٤ سانتي‌متر ادعا شده است [۳]. هدف از اين تحقيق مدلسازي چهار بعدي (در حيطة مكان و زمان) ارتفاع لحظه‌اي سطح آب دريا[8] (SSH)، ارتفاع سطح متوسط دريا[9] (MSL)، دامنه[10] و فاز[11] مولفه‌هاي عمدة جزر و مدي در وسعت جهاني با استفاده از داده‌هاي ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي مي‌باشد. در بخش آتي مقاله دربارة روش مورد استفاده در مدلسازي جهاني تغييرات لحظه‌اي سطح آب بحث شده و مراحل تشكيل مدل رياضي ارائه مي‌شود. در ادامه دربارة جزئيات مدلسازي جزر و مدي در آبهاي آزاد واقع در محدودة بين عرض جغرافيايي ٦٦- تا ٦٦+ درجه بحث و نتايج حاصل به همراه تمام نقشه‌ها و تست‌هاي انجام گرفته ارائه خواهند شد.

معرفي روش استفاده شده در مدلسازي تغييرات لحظه‌اي سطح آب

براي مطالعة سطح آب دريا همانند كلية پديده‌هاي فيزيكي دو روش وجود دارد: (۱) شناسايي كلية عوامل بوجود آورندة پديده، كه در اينجا اين عوامل كلية نيروهاي بوجود آورندة تغييرات سطح آب دريا مي‌باشند. (۲) در نظر گرفتن تنها تغييرات پديدة مورد نظر و تلاش در جهت مدلسازي اين تغييرات بدون توجه به عوامل بوجود آورندة آنها. در عمل با توجه به پيچيدگي بسيار زياد عوامل بوجود آورندة پديده‌هاي فيزيكي، روش دوم در محدودة زماني نزديک به زمان مدلسازي به مراتب موفق‌تر است. در اين تحقيق نيز روش دوم مورد استفاده قرار گرفته و تغييرات لحظه‌اي سطح آب دريا، مشاهده شده توسط ماهواره‌هاي ارتفاع‌سنجي ملاک مدلسازي قرار گرفته است. از آنجاييكه پديدة جزر و مد داراي رفتار تناوبي است، بنابراين به منظور مدلسازي آن از روش آناليز هارمونيک[12] [۲۰] استفاده خواهيم كرد. بعلاوه چون مشاهدات متوالي ماهوارة ارتفاع‌سنجي مربوط به نقاط مختلف مي‌باشند، لازم است براي موج مدل چهار بعدي (۱) در نظر گرفته شود [۱، ۲ و ٤ تا ٦].

$$h(\lambda,\phi;t) = U_0(\lambda,\phi) + \sum_{k=1}^{K}\{U_k(\lambda,\phi)\cos(\omega_k t) + V_k(\lambda,\phi)\sin(\omega_k t)\} \quad (1)$$

در رابطة (۱) $h(\lambda,\phi;t)$ ارتفاع لحظه‌اي سطح آب نسبت به بيضوي مرجع[13] در موقعيت (λ,ϕ) و زمان t بوده و عدد صحيح K تعداد مولفه‌هاي جزر و مدي، ω_k سرعت زاويه‌اي مولفة kام جزر و مد مي‌باشد. در اين معادله اندازه‌گيري ارتفاع سطح آب در نقاط و زمانهاي مختلف توسط ماهوارة ارتفاع‌سنجي بردار مشاهدات را تشكيل مي‌دهد. توابع $U_k(\lambda,\phi)$ و $V_k(\lambda,\phi)$ بترتيب ضرايب كسينوسي و سينوسي مدل بوده و تابع $U_0(\lambda,\phi)$ ارتفاع سطح متوسط آب دريا مي‌باشد. اين ضرايب، مجهولات مدل محسوب مي‌شوند. در اين نحوة مدلسازي جزر و مد بعلت در نظر گرفتن معادلة موج چهار بعدي به وسعت جهان، محدوديت لحاظ نمودن تعداد مولفه‌هاي جزر و مدي وجود دارد. زيرا همانطور كه در رابطة (۱) ملاحظه مي‌شود، با افزايش تعداد فركانسهاي جزر و مدي، تعداد مجهولات به صورت نمايي افزايش يافته و انجام محاسبات را عملاً غير ممكن مي‌سازد. راه حل اين مشكل محدود نمودن محاسبات به مولفه‌هاي عمدة جزر و مدي و صرفنظر نمودن از ساير مولفه‌ها است. اين صرفنظر نمودن در عمل اگر اثرات باقيمانده داراي دامنه‌اي كوچكتر از دقت مشاهدات باشند تاثيري بر نتايج نهايي نخواهد داشت. به منظور تعيين ضرايب مجهول ابتدا بايد مدلي براي آنها در نظر گرفت و سپس با استفاده از مشاهدات جمع‌آوري شده آنها را برآورد نمود. بعد از انجام محاسبات و تعيين ضرايب $U_0(\lambda,\phi)$، $U_k(\lambda,\phi)$ و $V_k(\lambda,\phi)$ مدل ارتفاع سطح متوسط دريا (MSL) نسبت به بيضوي مرجع بصورت ذيل قابل محاسبه خواهد بود.

$$MSL\ (\lambda,\phi) = U_0(\lambda,\phi) \quad (2)$$

همچنين مي‌توان مدل دامنه و فاز مولفة kام جزر و مد را بترتيب از طريق روابط (۳) و (٤) محاسبه نمود.

$$A_k(\lambda,\phi) = \sqrt{U_k(\lambda,\phi)^2 + V_k(\lambda,\phi)^2} \quad (3)$$

$$\psi_k(\lambda,\phi) = 2\ tg^{-1}\left[\frac{U_k(\lambda,\phi)}{V_k(\lambda,\phi) + A_k(\lambda,\phi)}\right] \quad (4)$$

در مدلسازي ارتفاع لحظه‌اي سطح آب بصورت جهاني بمنظور تشكيل ضرايب $U_0(\lambda,\phi)$، $U_k(\lambda,\phi)$ و $V_k(\lambda,\phi)$ از مجموعه توابع متعامد و يكه[۱۴] در منطقة مطالعاتي استفاده شده است. براي اين منظور از طريق فرايند متعامدسازي گرام-اشميت[۱۵] [۱۳] با استفاده از هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه[۱۶]، دنباله‌اي از توابع متعامد و يكه را در منطقة مطالعاتي ايجاد مي‌كنيم. قبل از شروع بحث دربارة نحوة ايجاد توابع متعامد و يكه در منطقة مورد علاقه، ابتدا لازم است دربارة علت استفاده از اين توابع بحث شود. همانطور كه مي‌دانيم هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه، توابع متعامد و مستقل بر روي كل كرة رفرانس مي‌باشند. بنابراين اين توابع براي مدلسازي پديده‌اي به وسعت كل كرة زمين مناسب مي‌باشند. در صورت عدم گسترش جهاني پديدة مورد نظر خاصيت تعامد اين توابع از دست خواهد رفت. از آنجاييكه منطقة مطالعاتي در مدلسازي جهاني تغييرات سطح آب دريا تنها از سطح اقيانوسها و درياهاي آزاد تشكيل شده است، بنابراين واضح است كه در اين ناحيه هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه داري خاصيت تعامد نمي‌باشند. بدين خاطر در اين تحقيق براي تأمين خاصيت تعامد از فرايند متعامدسازي گرام-اشميت استفاده و هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه به توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي تبديل گرديده‌اند. در ضميمة ۱ به منظور بيان نحوة انجام اين فرايند جهت ايجاد اين توابع، مراحل استخراج يك مجموعة اورتونرمال (مستقل و يكه) در یک ناحيه[۱۷] از يك مجموعة مستقل خطي دلخواه متعلق به يك فضاي ضرب داخلي با استفاده از فرايند متعامدسازي گرام-اشميت ارائه شده است [۱۳].

توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي

براي ايجاد یک پاية اورتونرمال از هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه [۸] بر روي سطح درياها از ماتريس گرام [۱۳] آغاز مي‌كنيم.

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \langle\bar{C}_{00}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{C}_{00}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{C}_{00}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{C}_{00}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \\ \langle\bar{C}_{10}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{C}_{10}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{C}_{10}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{C}_{10}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \\ \langle\bar{C}_{11}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{C}_{11}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{C}_{11}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{C}_{11}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \\ \langle\bar{S}_{11}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{S}_{11}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{S}_{11}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{S}_{11}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle\bar{C}_{nn}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{C}_{nn}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{C}_{nn}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{C}_{nn}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \\ \langle\bar{S}_{nn}\mid\bar{C}_{00}\rangle & \langle\bar{S}_{nn}\mid\bar{C}_{10}\rangle & \langle\bar{S}_{nn}\mid\bar{C}_{11}\rangle & \langle\bar{S}_{nn}\mid\bar{S}_{11}\rangle & \cdots \end{bmatrix}_{sea}$$

(۵)

در رابطة (۵) $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_{sea}$ بيانگر ضرب داخلي بين دو تابع بر روي درياها مي‌باشد. براي تشكيل ماتريس گرام $\mathbf{G}$ بايد ضرب‌هاي داخلي (٦) را محاسبه نماييم.

$$\langle\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\mid\bar{C}_{rs}(\lambda,\phi)\rangle=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\bar{C}_{rs}(\lambda,\phi)ds$$
$$\langle\bar{S}_{nm}(\lambda,\phi)\mid\bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\rangle=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{S}_{nm}(\lambda,\phi)\bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)ds$$
$$\langle\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\mid\bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\rangle=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)ds$$

(۶)

در روابط (۶) a مساحت منطقة مطالعاتي بر روي كرة رفرانس مي‌باشد. براي محاسبة مساحت منطقة مورد نظر و تعيين ضرب‌هاي (٦) در اين ناحيه، منطقة مطالعاتي را به خانه‌هاي مستطيل شكل تقسيم نموده و انتگرال‌هاي موجود را بصورت گسسته محاسبه مي‌كنيم. براي محاسبة مساحت منطقة مطالعاتي از رابطة (۷) استفاده مي‌شود.

$$a=\iint_{sea}ds=\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}w_{kl}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\lambda$$

(۷)

همچنين براي محاسبة ضرب‌هاي داخلي در منطقة مطالعاتي از روابط (۸) تا (۱۰) استفاده مي‌شود.

$$\langle\bar{C}_{nm}\mid\bar{C}_{rs}\rangle_{sea}=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{C}_{rs}(\lambda,\phi)\ ds$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}w_{kl}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{C}_{rs}(\lambda,\phi)\cos\phi\ d\lambda\ d\phi$$

(۸)

$$\langle\bar{S}_{nm}\mid\bar{S}_{rs}\rangle_{sea}=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{S}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\ ds$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}w_{kl}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}}\bar{S}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\cos\phi\ d\lambda\ d\phi$$

(۹)

$$\langle\bar{C}_{nm}\mid\bar{S}_{rs}\rangle_{sea}=\frac{1}{a}\iint_{sea}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\ ds$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}w_{kl}\int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}}\int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi)\ \bar{S}_{rs}(\lambda,\phi)\cos\phi\ d\lambda\ d\phi$$

(۱۰)

در روابط (۸) تا (۱۰) براي محاسبة ضرب‌هاي داخلي بر روي درياها از تابع w_{kl} موسوم به تابع دريا[۱۸] استفاده شده است. مقدار اين تابع در درياها برابر با يك و در خشكي‌ها برابر با صفر است. به منظور محاسبة توابع هارمونيك كروي نرماليزه از درجة n و مرتبة m از روابط (۲۷) و (۲۹) استفاده خواهيم نمود. جهت محاسبة انتگرال‌هاي موجود در ضرب‌هاي داخلي مي‌توان از tool-boxهاي نرم‌افزارهايي نظير Maple و يا MathCAD استفاده نمود. پس از تشكيل ماتريس گرام، با استفاده از رابطة (۲۶)

ماتريس متشكل از ضرايب تركيب c_{ij} قابل محاسبه خواهد بود. با بدست آوردن اين ضرايب دنبالة $\bar{L} = \{O_{nm}(\lambda,\phi), Q_{nm}(\lambda,\phi)\}$ متشكل از توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي را از طريق روابط (١١) و (١٢) بدست خواهيم آورد.

$$\bar{L}_j(\lambda,\phi) = \sum_{p=0}^{j} c_{jp} L_p(\lambda,\phi)$$

(١١)

$$O_{nm}(\lambda,\phi) = \underbrace{c_{kk}\bar{C}_{nm}(\lambda,\phi) + \sum_{p=0}^{k-1} c_{kp} L_p(\lambda,\phi)}_{k=\begin{cases} n^2 & ;m=0 \\ n^2+2m-1 & ;m\neq 0 \end{cases}}$$

$$Q_{nm}(\lambda,\phi) = \begin{cases} 0 \quad \forall m = 0 \\ \underbrace{c_{kk}\bar{S}_{nm}(\lambda,\phi) + \sum_{p=0}^{k-1} c_{kp} L_p(\lambda,\phi)}_{k=n^2+2m} \end{cases}$$

(١٢)

بزرگترين بُعد ماتريس گرام كه به ازاي بُعد بزرگتر از آن دترمينان اين ماتريس صفر شود، متناظر با تعداد توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي و بُعد فضاي توابع پايه مي‌باشد [١٩].

تشكيل مدل رياضي

مجموعة توابع متعامد و يكه در فضاي ضرب داخلي $\mathbf{L}^2_{sea}$ مستقل خطي بوده و يك پايه براي اين فضا محسوب مي‌شود. اين مجموعه از $(n_{\max}+1)^2$ عنصر تشكيل شده‌اند. ضرايب $U_0(\lambda,\phi)$، $U_k(\lambda,\phi)$ و $V_k(\lambda,\phi)$ با استفاده از اين توابع مستقل، بصورت ذيل قابل ارائه‌اند.

$$U_0(\lambda,\phi) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} a^0_{nm} O_{nm}(\lambda,\phi) + b^0_{nm} Q_{nm}(\lambda,\phi)$$

(١٣)

$$\begin{cases} U_k(\lambda,\phi) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} a^k_{nm} O_{nm}(\lambda,\phi) + b^k_{nm} Q_{nm}(\lambda,\phi) \\ V_k(\lambda,\phi) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^{n} c^k_{nm} O_{nm}(\lambda,\phi) + d^k_{nm} Q_{nm}(\lambda,\phi) \end{cases}$$
$$\forall k = 1,2,\ldots,N$$

(١٤)

در روابط (١٣) و (١٤) ضرايب a^0_{nm}، b^0_{nm}، a^k_{nm}، b^k_{nm}، c^k_{nm} و d^k_{nm} مجهولات مدل مي‌باشند. از آنجاييكه بمنظور مدلسازي ارتفاع لحظه‌اي سطح آب دريا K مولفة جزر و مدي در نظر گرفته شده است، بنابراين تعداد ضرايب مجهول برابر با $(2K+1)(n_{\max}+1)^2$ مي‌باشد. به منظور تشكيل بردار مشاهدات نبايد از تمام داده‌هاي جمع‌آوري شده توسط ماهواره استفاده نمود. بلكه بايد از بين داده‌هاي موجود بردار مشاهدات را طوري تشكيل دهيم تا از بروز پديدة خطاي آلايسينگ[19] اجتناب گردد. بعبارت ديگر فاصلة مكاني بين نقاط موجود در بردار مشاهدات بايد به گونه‌اي انتخاب شود، كه ضرايب هارمونيك كروي حاصل از محاسبات سرشكني داراي مفهوم فيزيكي باشند. براي اين منظور بايد فاصلة نمونه‌برداري از بين داده‌هاي جمع‌آوري شده در امتداد هر مدار ماهواره برابر با نصف طول موج هارمونيك‌هاي كروي تا درجه و مرتبة $n_{\max}$ باشد. طول موج هارمونيك‌هاي كروي براي درجه و مرتبة $n_{\max}$ برابر با ($2\times 6400\times\pi / n_{\max}$) كيلومتر مي‌باشد [١١ و ١٢]. بنابراين با توجه به اين طول موج كه بيانگر فركانس نايكوئيست[20] مي‌باشد، فاصلة نمونه‌برداري در امتداد مدارات ماهواره را برابر با نصف اين مقدار انتخاب مي‌كنيم. بعد از تشكيل بردار مشاهدات $\mathbf{l}$، ماتريس ضرايب $\mathbf{A}$ و ماتريس وزن مشاهدات $\mathbf{P}$ به روش سرشكني كمترين مربعات بردار مجهولات $\mathbf{x}$ و دقت آنها $\mathbf{C_X}$ قابل برآورد خواهند بود.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$$
$$\mathbf{C_X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

(١٥)

داده‌هاي استفاده شده

به منظور برآورد مجهولات مدل رياضي از داده‌هاي خام ماهوارة ارتفاع‌سنجي توپكس-پوزايدون استفاده نموده‌ايم. برخي از مشخصات مداري اين ماهواره در جدول (١) ارائه شده است.

جدول ١: مشخصات مداري ماهوارة توپكس-پوزايدون.

ارتفاع متوسط ماهواره از سطح زمين	1336 km
مدت زمان تكميل يک دوره[21]	9.915 days
مدت زمان يك دوران به دور زمين[22]	1.87 hours
سرعت متوسط نقطة نادير در زمين	5.8 km/sec
فاصلة زماني نمونه برداري در امتداد مدار	0.98 sec

اطلاعات جمع‌آوري شده در مدت ١٠ سال در قالب ١١٧ CD توسط سازمان فضايي آمريكا[23] (NASA) در اختيار اين تحقيق قرار گرفت. در جدول (٢) مشخصات و حجم اين اطلاعات ارائه شده‌اند.

جدول ۲: مشخصات داده‌هاي جمع‌آوري شده توسط ماهوارة توپكس-پوزايدون در مدت ۱۱ سال.

سالهاي جمع‌آوري داده‌ها	1992-2002
تعداد CD هاي ارسال شده	117
تعداد دوره‌ها در CD هاي ارسالي	351
تعداد متوسط نقاط مشاهداتي در هر دوره	468,387
تعداد كل نقاط مشاهداتي در ۱۱ سال	162,998,659

در محاسبات مدلسازي از اطلاعات موجود در دوره‌هاي ۱ تا ۳۵۰ استفاده نموده‌ايم. كميت مشاهداتي در ماهواره‌هاي ارتفاع‌سنجي فاصلة ماهواره تا سطح آب مي‌باشد، كه آن را بُرد ماهواره[۲٤] مي‌نامند. دقت مشاهدات جمع‌آوري شده توسط ارتفاع‌سنج توپكس و ارتفاع‌سنج پوزايدون بترتيب برابر با 2cm و 3cm در نظر گرفته شد. فاصلة اندازه‌گيري شده داراي خطاهاي سيستماتيك متعددي بوده، لذا به منظور تعيين ارتفاع سطح آب دريا در نقطة مشاهداتي ابتدا بايد فاصلة مشاهده شده را نسبت به خطاهاي سيستماتيك تصحيح نمود [۲۲]. اين تصحيحات عبارتند از: تصحيح تريوسفر تر[۲۵]، تصحيح تروپوسفر خشك[۲٦]، تصحيح يونسفر[۲۷]، تصحيح فشار جوي معكوس[۲۸]، تصحيح باياس الكترومغناطيس[۲۹]، تصحيح جزر و مد قطبي[۳۰] و تصحيح تغييرات مركز ثقل آنتن ارتفاع‌سنج[۳۱]. روابط اين تصحيحات توسط توليدكنندگان اين داده‌ها ارائه شده است. در اين مقاله دربارة اين تصحيحات و نحوة محاسبة آنها بحث نخواهيم نمود. با داشتن ميزان اين تصحيحات مي‌توان بصورت ذيل مقدار بُرد تصحيح شده corr. range را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} \text{corr. range} = & \text{range} \\ & + \text{wet tropospheric correction} \\ & + \text{dry tropospheric correction} \\ & + \text{ionospheric correction} \\ & + \text{electromagnetic bias correction} \\ & + \text{inverse barometer correction} \\ & + \text{pole tide correction} \\ & + \text{center of gravity movement correction} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

بعد از محاسبة بُرد تصحيح شده مي‌توان با داشتن ارتفاع ماهواره از سطح بيضوي مرجع مقدار ارتفاع سطح آب (SSH) را نسبت به بيضوي مرجع در تمام نقاط مشاهداتي از طريق رابطة (۱۷) بدست آورد.

$$ssh(\lambda,\phi) = h_{Sat.}(\lambda,\phi) - range(\lambda,\phi) \quad (۱۷)$$

در رابطة فوق $h_{Sat.}$ ارتفاع ماهواره نسبت به بيضوي مرجع در نقطة مشاهداتي بوده كه توسط سازمان فضايي آمريكا محاسبه و توزيع مي‌گردد.

جزئيات محاسبات

همانگونه كه قبلاً ذكر گرديد در اين مطالعه براي مدلسازي تغييرات جزر و مدي سطح آب دريا، ۹ مولفة جزر و مدي در نظر گرفته شد. از آنجاييكه فركانس اين مولفه‌ها از طريق مشاهدات نجومي با دقت بالا مشخص گرديده‌اند، ما نيز در مدلسازي خود آنها را معلوم فرض نموديم. جدول (۳) در بر گيرندة اين مولفه‌هاي جزر و مدي و زمان تناوب مربوطه مي‌باشد.

جدول ۳: مولفه‌هاي جزر و مدي بكار رفته در مدلسازي تغييرات سطح آب درياها به همراه زمان تناوب آنها.

رديف	نام مولفة جزر و مدي	زمان تناوب (ساعت)
۱	S2	12.000000
۲	M2	12.420601
۳	N2	12.658348
٤	K1	23.934470
۵	P1	24.065890
٦	O1	25.819342
۷	Mf	327.85898
۸	Mm	661.30927
۹	Ssa	4382.9065

از آنجاييكه داده‌هاي جمع‌آوري شده توسط ماهوارة توپكس-پوزايدون در محدودة بين عرض جغرافيايي ٦٦- تا ٦٦+ درجه موجود مي‌باشد، بنابراين منطقة مطالعاتي، متشكل از درياها در اين محدوده مي‌باشد. بعلاوه چون مشاهدات ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي در آبهاي كم عمق داراي دقت كمتري مي‌باشند، لذا داده‌هاي موجود در نزديكي سواحل از مجموعة اطلاعات ورودي حذف گرديدند. به منظور ايجاد توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي از فرايند گرام- اشميت استفاده نموده و براي اين منظور ابتدا عناصر ماتريس گرام در منطقة مورد نظر محاسبه گرديد. محاسبة مربوط به ضربهاي داخلي نيز از طريق حل عددي انتگرال‌هاي مربوطه در سلول‌هاي ۱ درجه در ۳ درجه صورت گرفت. محدودة انتگرال‌گيري نيز با وجود داده‌هاي ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي مشخص گرديد.

بدين ترتيب كه هر سلول كه حداقل يك دادة ماهواره‌اي در آن قرار گرفته بود جزء محدودة انتگرال‌گيري محسوب گرديد. به منظور تعيين تعداد توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي ابتدا بايد ماتريس گرام را براي درجه و مرتبه‌هاي مختلف تشكيل و بزرگترين مرتبة ماتريس كه به ازاي آن، ماتريس داراي رنك[٣٢] كامل بود را به عنوان معيار تشخيص بعد فضا و تعداد توابع متعامد و يكة مستقل بكار بريم [١٩]. در اين منطقه ماتريس گرام در درجة ١٤ و مرتبة ٣ بسط هارمونيک‌هاي كروي كمبود مرتبه پيدا كرد. جدول (۴) نشان دهندة نحوة پيشرفت ماتريس گرام به تكينگي[٣٣] با افزايش درجه و مرتبة بسط هارمونيک‌هاي كروي است. به عنوان ملاک تكينگي در اين جدول عدد شرط[٣٤]، كه نشان دهندة نسبت بزرگترين مقدار ويژه به كوچكترين مقدار ويژه است، بكار برده شده است.

جدول ٤: مقادير عدد شرط ماتريس گرام براي درجه و مرتبة مختلف هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه.

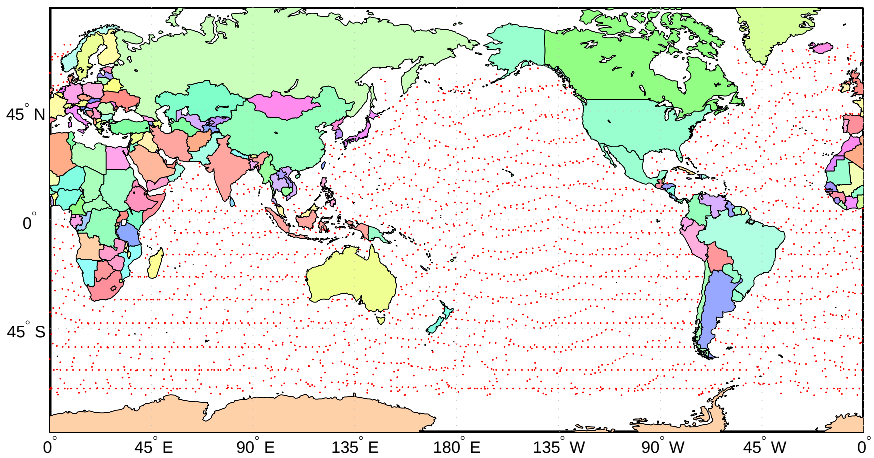
درجه و مرتبة هارمونيك‌ها		عدد شرط ماتريس گرام
درجه	مرتبه	
13	11	2.8569e+005
13	12	3.2568e+005
13	13	3.9133e+005
14	00	3.9341e+006
14	01	4.6124e+008
14	02	4.8481e+008
14	03	8.8285e+010

با توجه به نتايج جدول (۴)، درجه و مرتبة ١٣ به عنوان ماكزيمم بسط هارمونيک‌هاي كروي در تشكيل توابع پاية مستقل متعامد بكار رفت. مجموعة توابع متعامد و يكه در منطقة مطالعاتي حاصل از متعامدسازي هارمونيک‌هاي كروي تا درجه و مرتبة ١٣ از ١٩٦ عنصر تشكيل شده است. با توجه به تعداد مولفه‌هاي جزر و مدي در نظر گرفته شده در مدلسازي تغييرات سطح لحظه‌اي آب تعداد مجهولات مدل ٣٧٢۴ مي‌باشد. طول موج هارمونيك‌هاي كروي تا درجه و مرتبة ١٣ متناظر با 3093^{Km} در فضاي هندسي است. بنابراين فاصلة نمونه‌برداري از داده‌هاي موجود در امتداد هر مدار ماهواره برابر با 1546^{Km} در نظر گرفته شده است. با توجه به سرعت نقطة مشاهداتي و فاصلة زماني نمونه‌برداري در ماهوارة توپكس-پوزايدون در هر ٢٧٢ نقطة مشاهداتي يك داده در محاسبات وارد شده است. مشخصات و حجم داده‌هاي استفاده شده به منظور برآورد مجهولات در جدول (۵) ارائه شده است.

جدول ۵: مشخصات داده‌هاي استفاده شده در محاسبات مدلسازي.

شمارة دوره‌هاي استفاده شده	001-350
متوسط حجم داده‌هاي استفاده شده در هر دوره	2,669
حجم كل داده‌هاي استفاده شده	936,150

موقعيت داده‌هاي استفاده شده در محاسبات مدلسازي در هر دورة ماهواره در شكل (١) در سيستم تصوير استوانه‌اي نشان داده شده است.



شكل ١: موقعيت داده‌هاي استفاده شده در يک دورة ماهواره در محاسبات مدلسازي.

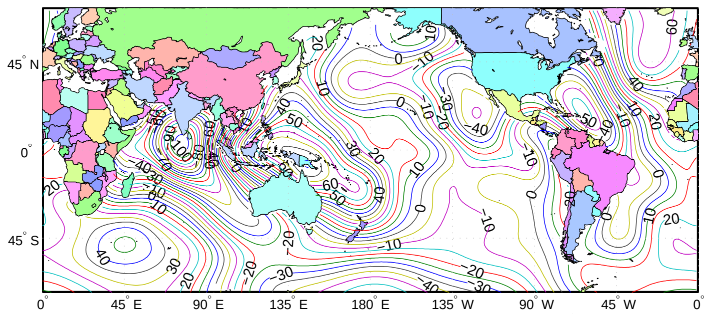
نتايج حاصل و بررسي دقت مدل محاسباتي

به منظور تست صحت مدل محاسبه شده براي تغييرات سطح لحظه‌اي آب تمام مشاهدات دورة ۳۵۱ ماهوارة توپکس-پوزايدون در محاسبة مدل بكار نرفته و جهت كنترل مدل حاصل كنار گذارده شد. نتايج مقايسة سطح لحظه‌اي آب دريا، برآورد شده در دورة ۳۵۱ با مشاهدات اين دوره در جدول (۶) ارائه گرديده است.

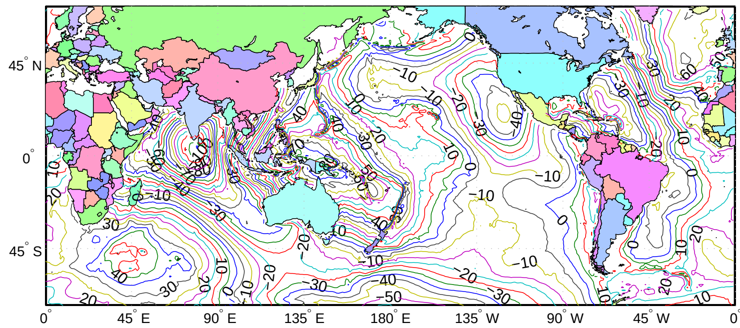
جدول ٦: اختلاف ارتفاع لحظه‌اي سطح آب دريا برآورد شده از مدل با مشاهدات دورة ۳۵۱.

تعداد نقاط كنترل	505,350
بزرگترين قدرمطلق اختلاف (سانتيمتر)	212.35 cm
كوچكترين قدرمطلق اختلاف (سانتيمتر)	00.32 cm
ميانگين قدرمطلق اختلاف‌ها (سانتيمتر)	13.25 cm

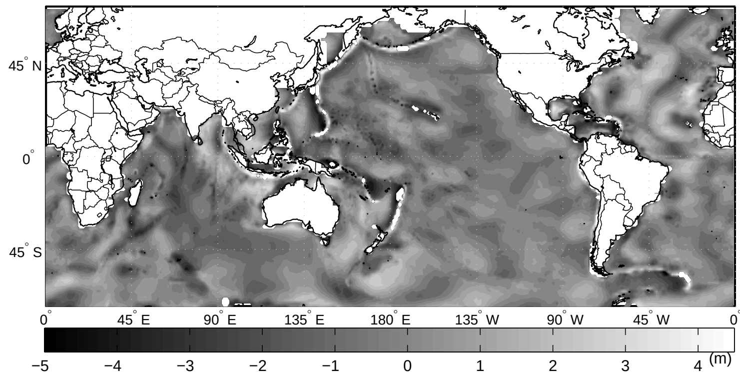
توجه داشته باشيد كه ارتفاع لحظه‌اي سطح آب دريا بر اثر امواج مي‌تواند با ارتفاع حاصل از مدل كه برآوردي بر اساس ۱۱ سال مشاهدة ماهوارة توپکس-پوزايدون است، در بعضي نقاط اختلاف زيادي داشته باشد كه مقدار ۲ متر در جدول (۶) را توجيه مي‌كند. يكي ديگر از محصولات اصلي اين مطالعه، مدل سطح متوسط دريا مي‌باشد كه در شكل (۲) در سيستم تصوير استوانه‌اي نسبت به بيضوي مرجع WGD2000[35] [۷] به نمايش گذارده شده است. همچنين نقشة ارتفاع سطح متوسط آب دريا با استفاده از مدل CSRMSS95 در شكل (۳) براي تمام جهان در سيستم تصوير استوانه‌اي نسبت به بيضوي WGD2000 ارائه شده است. شكل (۴) نشان دهندة اختلاف سطح متوسط دريا، محاسبه شده توسط ما از مدل CSRMSS95 در سيستم تصوير استوانه‌اي مي‌باشد.



شكل ۲: نقشة ارتفاع سطح متوسط آب دريا حاصل از محاسبات مدلسازي براي تمام دنيا (فاصلة منحني‌هاي ميزان: 5m).



شكل ۳: نقشة سطح متوسط آب دريا با استفاده از مدل CSRMSS95 براي تمام دنيا (فاصلة منحني‌هاي ميزان: 5m).



شكل ٤: اختلاف مدل سطح متوسط آب دريا محاسبه شده در اين تحقيق با مدل CSRMSS95.

مقايسة مشابهي نيز با مدل سطح متوسط آب دريا OSUMSS92 تهيه شده توسط رَپ [١٧] در سال ١٩٩٢ صورت گرفت كه خلاصة نتايج آن در جدول (٧) مكتوب است. با توجه به اين دو مقايسه نتيجه مي‌گردد كه مدل سطح متوسط آب دريا محاسبه شده در اين تحقيق با مدلهاي قبلي داراي تفاوت در حد 13cm است.

جدول ٧: مقايسة مدل سطح متوسط آب دريا حاصل از مدلسازي در اين تحقيق با مدل OSUMSS92 [١٧].

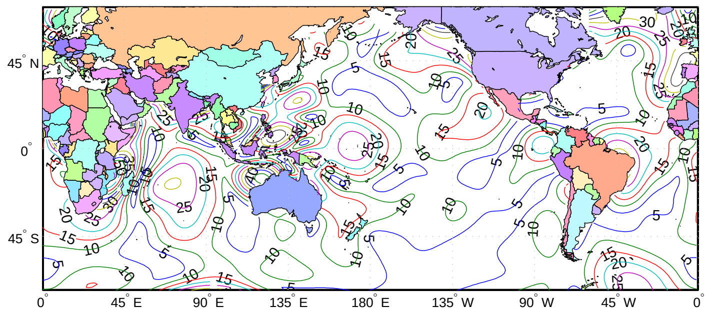
تعداد نقاط كنترل با توزيع جهاني	552,033
بزرگترين قدرمطلق اختلاف (متر)	04.96 m
كوچكترين قدرمطلق اختلاف (سانتيمتر)	0.01 cm
ميانگين قدرمطلق اختلاف‌ها (متر)	0.13 m

با در اختيار داشتن مدل سطح لحظه‌اي آب دريا اقدام به تهية نقشه‌هاي هم‌دامنه[٣٦] و هم‌فاز[٣٧] جزر و مدي در سيستم زماني UTC[38] براي مولفه‌هاي S2، M2، K1 و O1 گرديد. نقشه‌هاي حاصل براي كل جهان در سيستم تصوير استوانه‌اي در اشكال (۵) و (۶) براي مولفة S2 ارائه شده است. نقشة هم‌دامنه و نقشة هم‌فاز براي مولفة M2 بترتيب در اشكال (٧) و (٨)، نقشة هم‌دامنه و نقشة هم‌فاز براي مولفة K1 بترتيب در اشكال (٩) و (١٠) و نقشة هم‌دامنه و نقشة هم‌فاز براي مولفة O1 بترتيب در اشكال (١١) و (١٢) نمايش داده شده است. به منظور تست مدل تعيين دامنة مولفه‌هاي S2، M2، K1 و O1 مقايسه‌اي با نتايج آناليز جزر و مدي در ٢١٥ ايستگاه جزر و مدي صورت گرفت [٢١]. شكل (١٣) پوشش اين ايستگاه‌هاي جزر و مدي را نشان مي‌دهد. خلاصة نتايج اين مقايسه در جدول (٨) درج گرديده است.

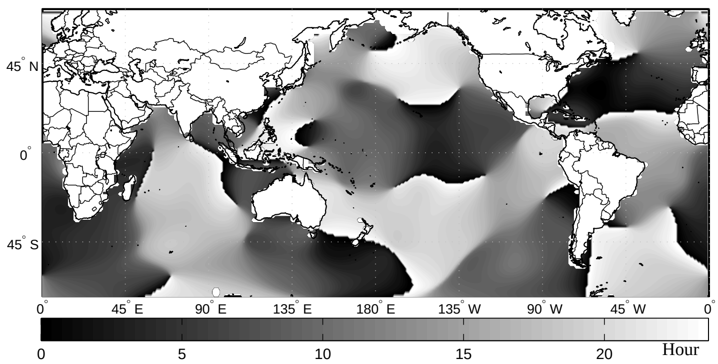
جدول ٨: مقايسة مدل دامنة مولفه‌هاي اصلي جزر و مد با مقادير برآورد شده در ايستگاه‌هاي جزر و مدي.

مولفة جزر و مدي	بزرگترين قدرمطلق اختلاف (cm)	كوچكترين قدرمطلق اختلاف (cm)	ميانگين قدرمطلق اختلاف‌ها (cm)
M2	47.98	00.31	11.48
S2	23.39	00.03	07.08
K1	30.58	00.05	05.76
O1	17.43	00.04	04.26

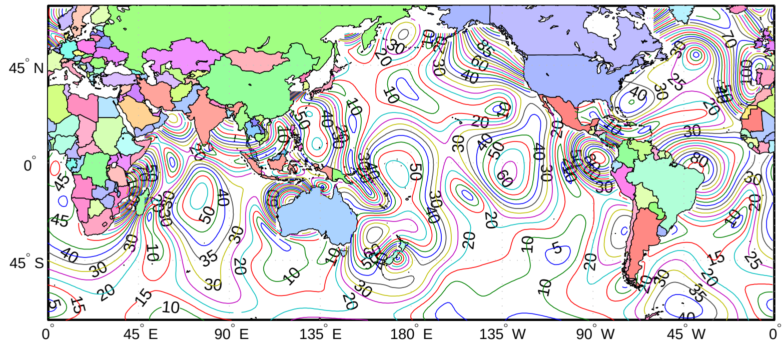
همانطور كه در جدول (٨) ملاحظه مي‌شود ميانگين قدرمطلق اختلاف‌ها براي تمام مولفه‌هاي اصلي تقريباً زير دسي‌متر مي‌باشد. توجه داشته باشيد كه تمام اين ايستگاه‌ها در سواحل واقع شده و روش ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي داراي كمترين دقت در سواحل است. بنابراين اين نتايج مي‌توانند حد بالاي دقت تلقي گردند.



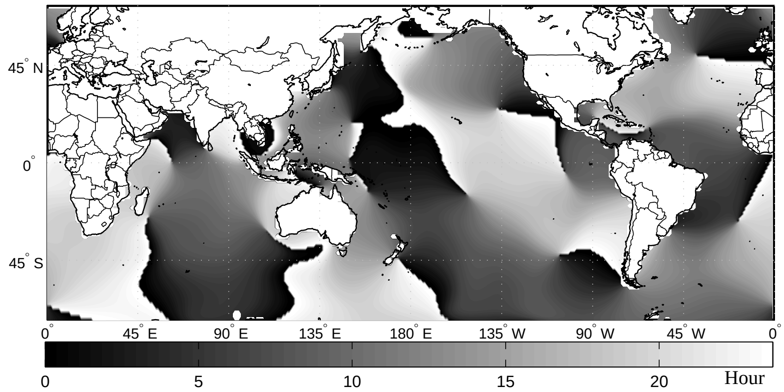
شكل ۵: نقشة هم دامنه براي مولفة S2 حاصل از مدلسازي (فاصلة منحني‌هاي ميزان: 5cm).



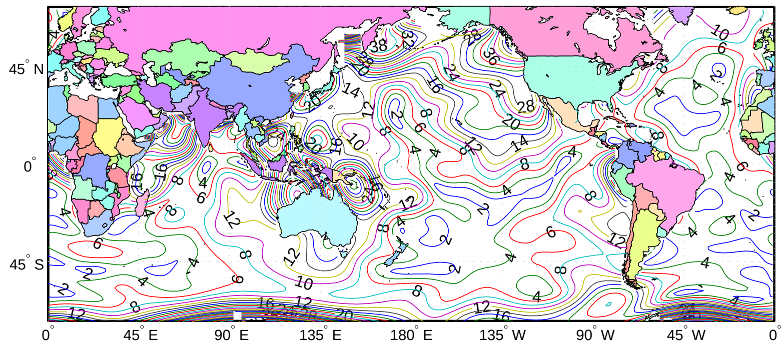
شكل ٦: نقشة هم فاز جزر و مدي براي مولفة S2 حاصل از مدلسازي.



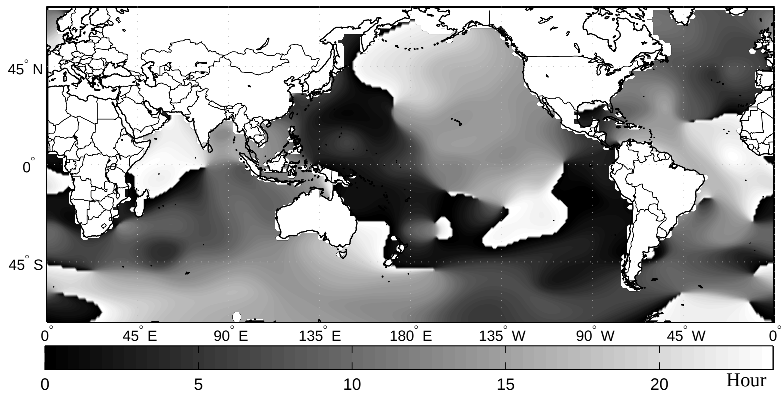
شكل ۷: نقشة هم دامنة جزر و مدي براي مولفة M2 حاصل از مدلسازي (فاصلة منحنيهاي ميزان: 5cm).



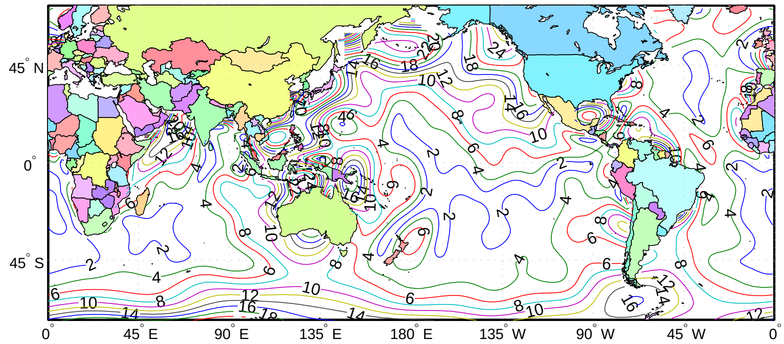
شكل ۸: نقشة هم فاز جزر و مدي براي مولفة M2 حاصل از مدلسازي.



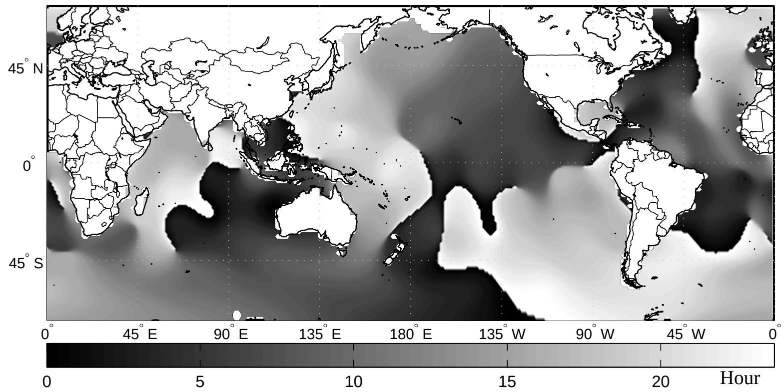
شكل ۹: نقشة هم دامنة جزر و مدي براي مولفة K1 حاصل از مدلسازي. (فاصلة منحنيهاي ميزان: 2cm)



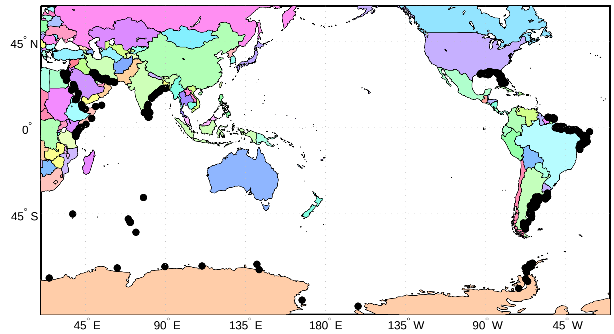
شكل ۱۰: نقشة هم فاز جزر و مدي براي مولفة K1 حاصل از مدلسازي.



شكل ۱۱: نقشة هم دامنة جزر و مدي براي مولفة O1 حاصل از مدلسازي (فاصلة منحني‌هاي ميزان: 2cm).



شكل ۱۲: نقشة هم فاز جزر و مدي براي مولفة O1 حاصل از مدلسازي.



شكل ۱۳: موقعيت ايستگاه‌هاي جزر و مدي انتخابي در سراسر دنيا.

بحث و نتيجه‌گيري

در اين مقاله با استفاده از ۱۱ سال مشاهدات ارتفاع‌سنجي ماهواره‌اي مدلي براي تغييرات سطح آب دريا محاسبه شد، كه مي‌تواند ۹ مولفة عمدة جزر و مدي را در كل جهان مشخص سازد. بعلاوه مدلي براي MSL جهاني تعيين گرديد. استفاده از توابع پاية متعامد، تعريف شده براي محدودة پوشش داده شده توسط اطلاعات دريايي ماهوارة توپكس-پوزايدون از ويژگي‌هاي اصلي اين تحقيق مي‌باشد.

تشكر و قدرداني

اين تحقيق با حمايت مالي معاونت پژوهشي طي طرح پژوهشي شمارة ۶۲۱/۴/۱۰۱۱ در مدت ۱ سال انجام گرفته كه بدينوسيله از اين حمايت تشكر و قدرداني مي‌گردد. همچنين از سازمان فضايي آمريكا (NASA) به خاطر در اختيار قرار دادن تمام داده‌هاي ماهوارة ارتفاع‌سنجي توپكس-پوزايدون سپاس‌گزاري مي‌گردد.

مراجع

1 - Andersen, O. B. (1994). "Ocean tides in the northern North Atlantic Ocean from ERS-1 altimetry." *J. Geophys. Res.*, Vol. 99, No. C11, PP.22557-22573.

2 - Andersen, O. B. (1995). "Global ocean tides from ERS-1 and TOPEX/POSEIDON altimetry." *J. Geophys. Res.,* Vol. 100, No. C12, PP.25249-25260.

3 - Benada, J. R. (1997). *PO.DAAC Merged GDR (TOPEX/POSEIDON) Generation B User's Handbook, Version 2.0*, JPL D-11007.

4 - Cartwright, D. E. and Ray, R. D. (1990). "Oceanic tides from Geosat altimetry." *J. Geophys. Res.,* Vol. 95, No. C3, PP.3069-3090.

5 - Cartwright, D. E. and Ray, R. D. (1991). "Energetics of global ocean tides from Geosat altimetry." *J. Geophys. Res.,* Vol. 96, No. C9, PP.16897-16912.

6 - Cartwright, D. E. (1993). "Theory of ocean tides with application to altimetry. In: Satellite altimetry in geodesy and oceanography." *Lecture Notes in Earth Sciences,* Vol. 50, R. Rummel and F.Sanso, editors, Springer-Verlag, New York, PP. 99-141.

7 - Grafarend, E. W. and Ardalan, A. A. (1999). "World Geodetic Datum 2000." *J. Geod*, Vol. 73, PP. 611-623.

8 - Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy,* W.H.Freeman, New York.

9 - Hwang, C. (1993). "Spectral analysis using Orthonormal Functions with a case study on the sea surface topography." *Geophys., J. Int.*, Vol. 115, PP. 1148-1160.

10 - Hwang, C. (1995). "Orthonormal function approach for Geosat determination of sea surface topography." *Marine Geodesy*, Vol. 18, PP. 245-271.

11 - Knudsen, P. (1993). "Altimetry for geodesy and oceanography, in Geodesy and Geophysics." *Lecture Notes for the NKG Autumn School 1992*, edited by J. Kakkuri, pp. 87-129, Finnish Geodetic Institute, Helsinki.

12 - Knudsen, P. (1994). "Global low harmonic degree models of seasonal variability and residual ocean tides from TOPEX/POSEIDON altimeter data." *J. Geophys. Res.,*Vol. 99, No. C12, PP.24643-24655.

13 - Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with applications*. University of Windsor, John Wiley and Sons, New York, Chi Chester, Toronto.

14 - Mainville, A. (1987). "The altimetry-gravimetry problem using orthonormal base functions." *Dep. Geod., Sci., Surv.,* Rep. No. 373, The Ohio State University, Columbus.

15 - PO.DAAC (1993). *PO.DAAC Merged GDR (TOPEX/POSEIDON) Users Handbook*. JPL D-11007, November 1996.

16 - Rapp, R. H. and Pavlis, N. K. (1990). "The development and analysis of geopotential coefficient Models to spherical harmonic degree 360." *J. Geophys. Res.,* Vol. 95, PP.21889-21911.

17 - Rapp, R. H., Yi, Y. and Wang, Y. M. (1994). "Mean Sea Surface and Geoid Gradient Comparisons with TOPEX Altimeter Data." *J. Geophys. Res.,* Vol. 99, No. C12, PP. 24, 667.

18 - Rapp, R. H. and Wang, Y. M. and Pavlis, N. K. (1991). "The Ohio State 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models." *Dep. Geod., Sci., Surv.,* Rep. No. 410, The Ohio State University, Columbus.

19 - Rapp, R. H. (1999). *Ocean domains and maximum degree of Spherical Harmonic and Orthonormal expansions,* NASA/CR –1999-208628.

20 - Smith, A. J. E. (1997). *Ocean tides from satellite altimetry*, PhD Thesis, Delft Institute for Earth-Oriented Space Research, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, PP.171.

21 - The United Kingdom Hydrographic Office, *Admiralty Tide Tables Volume 3,* Indian Ocean and South China Sea, 2003.

22 - Wahr, J. W. (1985). "Deformation of the Earth induced by polar motion." *J. Geophys. Res. (Solid Earth),* Vol. 90, PP.9363-9368.

ضميمة ۱: فرايند گرام-اشميت

در محدودة $\mathbf{D}_1$ فضاي ضرب داخلي $\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_1}$ را در نظر ميگيريم. فرض كنيد، توابع $\{f_i\} \equiv \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ يك مجموعة مستقل خطي دلخواه در فضاي ضرب داخلي $\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_1}$ و مجموعه توابع $\{\bar{f}_i\} \equiv \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ مجموعة متعامد و يكة حاصل از انجام فرايند متعامدسازي گرام-اشميت متعلق به فضاي $\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}$ باشد. محدودة $\mathbf{D}_2$ همان منطقة مورد مطالعه ميباشد كه ميخواهيم در آن ناحيه مجموعه توابع اورتونرمال $\{\bar{f}_i\}$ را ايجاد نماييم. مراحل انجام اين فرايند به منظور دستيابي به توابع پاية $\{\bar{f}_i\}$ در فضاي ضرب داخلي $\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}$ بصورت ذيل است [۱۳].

$$\begin{array}{ll} \bar{f}_1 = h_1 / \| h_1 \|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} & h_1 = f_1 \\ \bar{f}_2 = h_2 / \| h_2 \|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} & h_2 = f_2 - \langle f_2 \mid \bar{f}_1 \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} \bar{f}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{f}_n = h_n / \| h_n \|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} & h_n = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle f_n \mid \bar{f}_i \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} \bar{f}_i \end{array} \quad (۱)$$

در اين روابط $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}}$ بيان كنندة ضرب داخلي بين دو تابع و $\| \cdot \|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}}$ نشان دهندة نرم يك تابع در فضاي ضرب داخلي $\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}$ بوده كه بصورت ذيل محاسبه ميشود.

$$\langle f_i \mid f_j \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} = \frac{1}{a} \iint_{\mathbf{D}_2} f_i f_j^* ds \quad (۲)$$

$$\| f_i \|_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} = \sqrt{\frac{1}{a} \iint_{\mathbf{D}_2} f_i f_i^* ds} \quad (۳)$$

در اين روابط a مساحت ناحية $\mathbf{D}_2$ و تابع f_i^* مزدوج[۳۹] تابع f_i ميباشد. با توجه به روابط فوق ميتوان توابع $\{\bar{f}_i\}$ را بر حسب توابع $\{f_i\}$ بصورت زير نوشت.

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} f_j \quad ; i = 1, 2, \ldots, n \quad (۴)$$

در رابطة فوق ضرايب c_{ij} ضرايب تركيب[۴۰] در فرايند متعامدسازي گرام-اشميت بوده و آنها را ميتوان به شكل ماتريسي ذيل نوشت.

$$\left[\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \cdots \quad \bar{f}_n \right]^T = \mathbf{C} \left[f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n \right]^T \quad (۵)$$

ماتريس $\mathbf{C}$ در رابطة (۵) يك ماتريس پايين مثلثي[۴۱] و شامل ضرايب تركيب c_{ij} بصورت ذيل ميباشد.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (۶)$$

راه سريعتر براي محاسبة ضرايب تركيب c_{ij} بر اساس تجزية چولسكي[۴۲] ماتريس گرام[۴۳] است. اين ماتريس در فضاي ضرب داخلي $\mathrm{L}^2_{\mathrm{D}_2}$ بصورت ذيل تعريف ميگردد.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle f_1 \mid f_1 \rangle & \langle f_1 \mid f_2 \rangle & \cdots & \langle f_1 \mid f_n \rangle \\ \langle f_2 \mid f_1 \rangle & \langle f_2 \mid f_2 \rangle & \cdots & \langle f_2 \mid f_n \rangle \\ & & \vdots & \\ \langle f_n \mid f_1 \rangle & \langle f_n \mid f_2 \rangle & \cdots & \langle f_n \mid f_n \rangle \end{bmatrix}_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} \quad (۷)$$

براي محاسبة ضرب داخلي $\langle f_i \mid f_j \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}}$ منطقة مطالعاتي $\mathbf{D}_2$ را به شبكههاي منظمي تقسيم و ضربهاي داخلي را بصورت گسسته از طريق رابطة (۲۵) محاسبه ميكنيم.

$$\langle f_i \mid f_j \rangle_{\mathbf{L}^2_{\mathbf{D}_2}} = \frac{1}{a} \iint_{\mathbf{D}_2} f_i f_j^* ds = \frac{1}{a} \sum_{x=1}^{N} \sum_{y=1}^{M} \iint_{\Delta\sigma} f_i f_j^* ds \quad (۸)$$

در رابطه (۸) اعداد صحيح N و M تعداد خانههاي شبكه در امتداد محورهاي مختصات و $\Delta\sigma$ مساحت يك خانه ميباشد. در انتها به منظور محاسبة ضرايب تركيب c_{ij} ميتوان ماتريس $\mathbf{C}$ را بصورت زير محاسبه كرد.

$$\mathbf{C} = [\mathbf{R}^{-1}]^T \quad (۹)$$

در اين رابطه $\mathbf{R}$ ماتريس پايين مثلثي حاصل از تجزية چولسكي ماتريس گرام ميباشد.

ضميمة ۲: هارمونيكهاي كروي نرماليزه

توابع هارمونيك كروي نرماليزه از درجة n و مرتبة m در هر نقطة (λ, ϕ) بر روي كرة رفرانس از طريق روابط (۲۷) تعريف ميشوند [۸].

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda \\ \bar{S}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin\phi)\sin m\lambda \end{cases} \forall \begin{cases} n = 0, 1, 2, \ldots, n_{\max} \\ m = 0, 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad (۱۰)$$

در اين روابط $\bar{P}_{nm}(\cdot)$ توابع وابستة نرماليزة لژاندر[۴۴] از درجة n و مرتبة m با تعريف ذيل ميباشند [۸].

$$\begin{array}{l} \bar{P}_{n0}(\theta) = \sqrt{(2n+1)} \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dt^n} (\theta^2 - 1)^n \\ \bar{P}_{nm}(\theta) = \\ \sqrt{2(2n+1)\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}} \dfrac{1}{2^n n!} (1-\theta^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (\theta^2 - 1)^n \\ \forall [n = 0, 1, 2, \ldots, n_{\max}] \wedge [m = 1, 2, \ldots, n] \end{array} \quad (۱۱)$$

در عمل براي محاسبة اين توابع از روابط بازگشتي[۴۵] (۲۹) استفاده ميگردد.

$$\begin{array}{l} \bar{P}_{00}(\theta) = 1, \ \bar{P}_{10}(\theta) = \sqrt{3}\theta, \ \bar{P}_{11}(\theta) = \sqrt{3(1-\theta^2)} \\ \bar{P}_{mm}(\theta) = \sqrt{\dfrac{(2m+1)}{2m}} \sqrt{1-\theta^2} \bar{P}_{m-1,m-1}(\theta) \\ \bar{P}_{nm}(\theta) = \sqrt{\dfrac{(2n+1)(2n-1)}{(n-m)(n+m)}} \theta \bar{P}_{n-1,m}(\theta) - \\ \sqrt{\dfrac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(n+m)(n-m)}} \bar{P}_{n-2,m}(\theta) \forall n \neq m \end{array} \quad (۱۲)$$

از طريق حاصلضرب داخلي هارمونيك‌هاي كروي نرماليزه بر روي كرة رفرانس S_R^2 مي‌توان تعامد و استقلال خطي اين توابع را اثبات نمود. بنابراين اين توابع يك پايه را براي فضاي ضرب داخلي $L^2_{S_R^2}$ تشكيل مي‌دهند.

واژه‌هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Tidal phenomenon
2 - Tide gauge stations
3 - Satellite altimetry
4 - TOPEX/Poseidon
5 - Satellite Laser Ranging
6 - Global Positioning System (GPS)
7 - Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite (DORIS)
8 - Sea Surface Height (SSH)
9 - Mean Sea Level (MSL)
10 - Amplitude
11 - Phase
12 - Harmonic analysis
13 - Reference ellipsoid
14 - Orthonormal base functions
15 - Gram-Schmidt
16 - Normalized Spherical Harmonics
17 - Domain
18 - Sea function
19 - Aliasing
20 - Nyquist
21 - Period time
22 - Revolution time
23 - National Aeronautics and Space Administration (NASA)
24 - Satellite range
25 - Wet troposphere correction
26 - Dry troposphere correction
27 - Ionosphere correction
28 - Inverse barometer effect
29 - Electromagnetic bias
30 - Pole tide correction
31 - Center of gravity movement correction
32 - Rank
33 - Singularity
34 - Condition number
35 - World Geodetic Datum 2000
36 - Co-tidal map
37 - Co-phasal map
38 - Universal Coordinated Time (UTC)
39 - Conjugate symmetry
40 - Combination coefficients
41 - Lower triangular matrix
42 - Cholesky decomposition
43 - Gram matrix
44 - Normalized associated legendre functions
45 - Recursive formula