نشریهٔ دانشکدهٔ علوم جلد سوم شمارهٔ ۳ مهرماه ۱۳۵۰

محاسبه جمع مقاطع تصادم برای تحریك و یونیزه شدن اتمها و یونهای شبه هیدرژن در اثر برخورد با ذرات باردار و تند

دکتر کاظم امیدوار

گروه فیزیک

دانشکدهٔ علوم ـ دانشگاه تهران

مقدمه ـ در فیزیک پلاسما ، مطالعه اتمسفر ستاره‌ها و خورشید برای دانستن حالت پلاسما از قبیل دانسیته و درجه حرارت الکترونها ، تصادمهای اتمی رل مهمی را بازی میکنند. در میان این تصادمها ، تصادمهائی که میان الکترونها و اتمهای خنثی انجام میگیرد مهمتر هستند. در این تصادمات سطوح انرژی اتمها تغییر مییابند و این تغییر موجب تشعشع اتمها میگردد. چون مقدار عمده پلاسما از اتم هیدرژن و یون آن تشکیل شده مطالعه این تصادمات در مورد اتم هیدرژن و الکترون اهمیت بیشتری دارند.

در این مطالعات بایستی مقطع مؤثر را درباره این تصادمات محاسبه نمود. هانس بتا (Hans Bethe) در ۱۹۳۰ مقطع مؤثر تمام تصادمات میان اتم هیدرژن و الکترون را که در آنها اتم هیدرژن در ابتدا در پائین‌ترین سطح انرژی خود و یا حالت نرمال خود قرار گرفته است محاسبه نموده است. محاسبات بتا با وجود کامل بودن برای محاسبات پلاسما کافی نیست ، چون در پلاسماهائی که درجه حرارت آنها زیاد است تمام اتمهای هیدرژن در حالت نرمال خود قرار ندارند.

در این مقاله یک فرمول آنالیتیک بدست آمده است که شبیه بفرمول بتا مقطع مؤثر کل تصادمات غیرالاستیکی را بدست میدهد و در آن هرنوع تحریک ممکن و یونیزاسیون جمع شده است ولی فرق آن

با فرمول بتا این است که اتم هیدرژن میتواند هرگونه حالت اولیه را داشته باشد. بنابراین فرمول بتا یک حالت اختصاصی از فرمولهای بدست آمده دراینجا خواهد بود.

فرموله نمودن مسئله ـ در ابتدا رابطه‌ای که مربوط بخواص مجموعه های کامل است بدست میآید. این رابطه معروف برابطه بهم بستگی (Closure) است و بدست آوردن آن بقرار زیر است. برای سهولت ابتدا مسئله در یک بعد مطرح میشود. هرتابع آنالیتیک نامشخص $f(x)$ را میتوان بطریق زیر برحسب مجموعه کامل (Complete Set) $u_n(x)$ گسترش داد.

$$f(x)=s_n a_n u_n(x) \qquad (۱)$$

جائیکه s_n عبارت از جمع اگر u_n متقاطع و عبارت از انتگرال اگر u_n مداوم باشد میباشد. برای مثال بسط بوسیله سری فوریه یک حالت اختصاصی از (۱) است. از اینجهت که $u_n(x)$ یک مجموعه ارتو نورمه است حاصل میشود.

$$a_n=\int u^*_n(x')f(x')dx' \qquad (۲)$$

و بدین ترتیب رابطه (۱) بصورت زیر در میآید:

$$f(x)=s_n u^*_n(x')u_n(x)f(x') \qquad (۳)$$

از اینجهت که $f(x)$ یک تابع نا مشخص است، رابطه بالا درصورتی صادق است که:

$$s_n u^*_n(x')u_n(x)=s(x-x') \qquad (٤)$$

باشد.

رابطه (۳) و (٤) را بآسانی میتوان به δ بعد تعمیم داد. درمورد سه بعد اگر مجموعه کامل به $\psi_n(\mathbf{r})$ نشانداده شود برای هرتابع نامشخص $A(\mathbf{r})$ رابطه زیر حاصل میشود:

$$A(\mathbf{r})=s_n\psi^*_n(\mathbf{r'})\psi(\mathbf{r})A(\mathbf{r'}) \qquad (٥)$$

$$s_n\psi^*_n(\mathbf{r'})\psi_n(\mathbf{r})=s(\mathbf{r}-\mathbf{r'}) \qquad (٦)$$

چون تمام محاسباتی که در زیر توضیح داده خواهد شد، درسه بعد انجام میگیرد از نوشتن اندیس $\mathbf{r}$ صرفنظر میشود و طبق نوتاسیون دیراك $\psi_n(\mathbf{r})$ به $|n>$ نشان داده میشود. برای مثال طبق این نوتاسیون:

$$<n'|A|n>=\int\psi^*(\mathbf{r})A(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \qquad (۷)$$

میباشد. در محاسباتی که برای تعیین مقطع تصادم کل در انرژیهای بالا لازم است احتیاج بمجذور قدر مطلق (۷) وقتی که این مجذور نسبت به n' جمع شده باشد میباشد . در زیر این مقدار تعیین ارزش میشود. ابتدا برابطه زیر توجه میکنیم :

$$\sum_{n'\neq n} |<n'|A|n>|^2 = \sum_{n'} |<n'|A|n>|^2 - |<n|A|n>|^2 \qquad (۸)$$

جائیکه $A=A(\mathbf{r})$ ممکن است یک تابع معمولی ویا یک عامل فیزیکی (Physical Operator) مانند انرژی و یا ممان و یا پتانسیل ذره باشد . این عامل ممکن است بصورت یک مشتق و یا یک انتگرال باشد. در طرف راست (۸) جمع نسبت بتمام مقادیری است که n' میگیرد و در طرف چپ جمع نسبت بتمام مقادیر n' باستثنای $n'=n$ میباشد.

اکنون بنابتعریف و بااستفاده از (٦) :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n'}|<n'|A|n>|^2 &= \sum_{n'} \int \psi^*_{n'}(\mathbf{r})A(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r})d\tau \\
&\quad \text{x} \int \psi_{n'}(\mathbf{r}')A^*(\mathbf{r}'')\psi^*_n(\mathbf{r}'')d\tau'' \\
&= \int \psi^*_n(\mathbf{r}'')\psi_n(\mathbf{r})A(\mathbf{r})A^*(\mathbf{r}'')[\Sigma_{n'}\psi^*_{n'}(\mathbf{r})\psi_{n'}(\mathbf{r}'')]d\tau d\tau'' \\
&= \int \psi^*_n(\mathbf{r})|A(\mathbf{r})|^2\psi_n(\mathbf{r})d\tau \\
&= <n|\,|A|^2\,|n> \qquad (۹)
\end{aligned}$$

بدین ترتیب رابطه زیر حاصل میشود :

$$\sum_{n'\neq n} |<n'|A|n>|^2 = <n|\,|A|^2|n> - |<n|A|n>|^2 \qquad (۱۰)$$

این رابطه‌ایست که در پی بدست آوردن آن بودیم.

اکنون تصادمی میان یک اتم شبه هیدرژن و ذره‌ای که دارای بار الکتریکی است درنظر میگیریم. اتمهای شبه هیدرژن مدلی از اتمهای حقیقی هستند که در آن الکترونها مستقل از یکدیگر در میدان مرکزی هسته اتم دور میزنند (دراینجا برای سهولت فهم مسئله تشبیهات کلاسیک بکار میرود) مقداری از بار هسته بوسیله الکترونهای داخلی خنثی شده‌اند. مقدار بار خنثی شده بوسیله الکترونهای داخلی برای هرالکترون مشخص از هراتم را بوسیله محاسباتی که بنام محاسبات هارتری فاك

(Hartree Fock) معروفند میتوان معین نمود.

تصادم یک ذره باردار با یک اتم در اثر نیروی کولونی است که بین این ذره و الکترونهای اتم وجود دارد. از نظر تصادم غیرالاستیکی که مورد نظر ما است نیروی کولون بین ذره و هسته اتم رلی بازی نمیکند. طبق تعریف اگر اتم در اثر تصادم حالت خود را از دست ندهد تصادم الاستیکی و در غیر اینصورت غیرالاستیکی است. در اثر تصادم غیرالاستیکی، اتم ممکن است بترازهای انرژی بالاتر و یا پائین تر انتقال یابد. اگر اتم بترازانرژی پائین تر انتقال یابد برخورد تصادم فوق الاستیک (Super Elastic) نامیده میشود ولی اگر اتم بتراز انرژی بالاتر انتقال یابد ولی الکترون از اتم کنده نشود عمل را تحریک (Excitation) خوانند. هرگاه انتقال انرژی بقدری باشد که الکترون از اتم کنده شود عمل یونیزه شدن (Ionization) نامیده میشود.

وقتی تصادم در انرژی‌های بالا انجام گیرد تصادمهای الاستیکی نسبت بتصادمهای غیرالاستیکی قابل صرفنظر کردن است. دراین گزارش مقطع تصادم مربوط به مجموعه برخوردهای غیرالاستیکی در انرژیهای بالا بین ذرات دارای بار الکتریکی و اتمها و یا یونهای شبه هیدرژن محاسبه گردیده است. از تصحیحی که بنا بنظریه نسبیت در انرژیهای بالا بایستی بعمل آید صرفنظر شده است. بنابراین دامنه اعتبار فرمولهای بدست آمده برای سرعتهائی از ذرات باردار است که شرط $v/c \ll 1$ صدق نماید جائیکه v سرعت ذره و c سرعت نور است.

فرض کنیم که بار الکتریکی ذره باردار ze و توده آن M باشد جائیکه e قدر مطلق بار الکتریکی الکترون است. مقطع تصادم برای مجموعه برخوردهای غیرالاستیکی برطبق تقریب بورن (Born Approximation) با رابطه زیر داده میشود:

$$Q_B(i) = \frac{8\pi}{a_0^2 R_1^2} \left(\frac{M}{\mu} z\right)^2 \sum_{f \neq i} \int_{R_1 - R_2}^{R_1 + R_2} |\langle f | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | i \rangle|^2 \frac{dq}{q^3} \qquad (۱۱)$$

جائیکه Q_B مقطع تصادم برطبق تقریب بورن و i حالت اولیه اتم و f حالت اتمهائی آنست. بدیهی است که برای مجموعه برخودهای غیرالاستیکی f شامل مجموعه حالات باستثنای $f=i$ میشود. در رابطه بالا R_1 و R_2 عدد موج ذره باردار پیش و پس از تصادم میباشد و اگر $t=1$ گرفته شود و انرژی اتم پیش از برخورد به E_i و E_f نشان داده شود بین R_1 و R_2 و E_i و E_f رابطه زیربرقرار است:

$$R_1^2 - R_2^2 = (M/\mu)(E_f - E_i) \qquad (۱۲)$$

دراین رابطه و (۱۱) μ توده یک الکترون و در (۱۱) a_0 شعاع بهر (Bohr) میباشد.

در (۱۱) بردار $\mathbf{q}$ عبارت از ممانی است که ذره باردار باتم منتقل میکند و درسیستم واحدی که $t=1$ میباشد بایستی داشته باشیم :

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 \qquad (۱۳)$$

و از این رو می‌نیموم و ماکزیموم $|\mathbf{q}|$ بایستی با روابط :

$$q_{min} = R_1 - R_2 \quad \text{و} \quad q_{max} = R_1 + R_2 \qquad (۱٤)$$

داده شده باشند. اگر نمره کوانتوم کل اتم هسته هیدرژن پیش‌از برخورد n و پس‌از برخورد n' باشد و اتم دارای بار مرکزی Z باشد Ei و Ef با روابط :

$$E_i = \frac{Z^2}{a_0^2 n^2} \quad \text{و} \quad E_f = \frac{Z^2}{a_0^2 n'^2} \qquad (۱۵)$$

داده میشوند. در انرژیهای بالا که شرط $R_1 \gg 1/a_0$ صدق میکند ، بآسانی میتوان نشان داد که حدود انتگرال (۱۱) با روابط زیر داده میشوند.

$$q_{min} = \frac{\alpha_{nn'}^2}{2R_1} \quad \text{و} \quad \alpha_{nn'}^2 \equiv \frac{Z^2}{a_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \quad \text{و} \quad q_{max} = 2R_1 \qquad (۱٦)$$

جائیکه علامت $\equiv$ نماینده تعریف یک مقدار جدید است.

اکنون انتگرال (۱۱) را میتوان بدو قسمت نمود و در نتیجه (۱۱) بصورت زیر نوشته میشود :

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad (۱۷)$$

$$Q_1 = \frac{8\pi}{a_0^2 R_1^2} \cdot \left(\frac{M}{\mu} z\right)^2 \sum_{f \neq i} \int_{q_{min}}^{q_0} \frac{dq}{q^3} |\langle f|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|i\rangle|^2 \qquad (۱۸)$$

$$Q_2 = \frac{8\pi}{a_0^2 R_1^2} \left(\frac{M}{\mu} z\right)^2 \sum_{f \neq o} \int_{q_0}^{q_{max}} \frac{dq}{q^3} |\langle f|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|i\rangle|^2 \qquad (۱۹)$$

در روابط بالا پارامتر q_0 طوری انتخاب میشود که شرط زیر را اقناع نماید :

$$\frac{\alpha^2_{nn'}}{2R_1} \ll q_\circ \ll \frac{Z}{a_\circ}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) \qquad (۲۰)$$

علت انتخاب پارامتر $q_\circ$ بقرار زیر است. با توجه برابطه (۱۸) ملاحظه میشود که در نواحی مجانبی $|i>$ و $|f>$ متناسب با $\exp[-Zr/na_\circ]$ و $\exp[-Zr/n'a_\circ]$ میباشند و ازاین قرار وقتی r زیاد میشودانتگراند $<f|\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})|i>$ متناسب با $\exp\left[-(Zr/a_\circ)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right]$ میشود. بنابراین در انتگرال $<f|\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})|i>$ میتوان گفت که از ارزشهائی از r که خیلی بزرگتر از:

$$r_\circ = \left(\frac{a_\circ}{Z}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)^{-1}$$

باشند،میتوان صرفنظر نمود چون دراینصورت انتگراند فوق‌العاده کوچک است. بنابراین بجای اینکه حدود انتگرال نسبت به r از صفر تا بینهایت باشد میتوان‌آنرا از صفر تا $r_\circ$ گرفت. دراین حدود(۲۰) نشان میدهد که:

$$q_\circ r_\circ \ll 1 \qquad (۲۱)$$

است چون r کوچکتر و یا مساوی $r_\circ$ است میتوان در (۱۸) تابع $\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ را نسبت به $\mathbf{r}$ و $\mathbf{q}$ بسط داد و اولین جمله‌ای که صفر نمیشود نگهداشت. از اینجهت (۱۸) تبدیل برابطه زیر میشود:

$$Q = \frac{8\pi}{a_\circ^2 R_1^2}\left(\frac{M}{\mu}z\right)^2 \sum_{f\neq i} |<f|z|i>|^2 \int_{q_{min}}^{q_\circ} \frac{dq}{q} \qquad (۲۲)$$

و یا توجه به (۱۶) خواهیم داشت:

$$Q_1 = \frac{8\pi}{a_\circ^2 R_1^2}\left(\frac{M}{\mu}z\right)^2 \sum_{f\neq i} |<f|z|i>|^2 \ln \frac{2R_1 q_\circ}{\alpha^2_{nn'}} \qquad (۲۳)$$

ازطرف دیگر نامساوی اول (۲۰) نشان میدهد که حد پائینی انتگرال (۱۹) مستقل از انرژی حالت انتهائی تحریک میباشد بنابراین قاعده جمع(۱۰) را برای‌این انتگرال با قرار دادن $A = \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})$ میتوان بکار برد و از اینرو نتیجه میشود:

$$Q_2=\frac{8\pi}{a_0^2R_1^2}\left(\frac{M}{\mu}z\right)^2\int_{q_0}^{q_{max}}\frac{dq}{q^3}\ [1-|<i|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|i>|^2] \qquad (۲٤)$$

باین ترتیب مسئله تعیین ارزش مقطع تصادم برای مجموعه تصادمهای غیرالاستیکی تبدیل به تعیین ارزش ماتریسهای غیر نظری (۲۳) و ماتریسهای نظری (۲٤) میشود. در (۲٤) بعلاوه یک انتگرال نسبت به q بایستی بعمل آید. تعیین ارزش این ماتریسها بوسیله توابع موجی بعمل میایند که توابعی از بردار وضعی الکترون در محور مختصات هزلولی (Parabolic Coordinates) میباشند. این تعیین ارزش شامل یکعده عملیات جبری است که خالی از ایده‌های فیزیکی میباشد، از اینجهت دراینجا ذکر نمیگردند. علاقمندان میتوانند بمقاله مفصل‌تری که بعداً بزبان انگلیسی منتشر میگردد مراجعه نمایند. فعلاً بایستی در نظر گرفته شود که ماتریسهای (۲۳) بردو نوع اند. در یک نوع حالت انتهائی مربوط بتحریک میباشد و از اینجهت $|f>$ تابع بسته‌ایست. در نوع دیگر الکترون یونیزه میشود و از اینجهت $|f>$ برابر با تابع موج کولن با انرژی مثبت میشود. تابع موج کولن کن به $|\mathbf{R}>$ نشان داده میشود بستگی بجهت حرکت الکترون پس از یونیزه شدن اتم دارد و $\mathbf{R}$ همان این الکترون میباشد.

در زیرانتگرال مجذور قدر مطلق ماتریسهای مربوط نسبت به $\hat{k}$ که جهت حرکت الکترون را مشخص میکند داده شده‌اند.

همچنین بایستی دقت شود که $|i>$ با اعداد کوانتوم درمختصات هزلولی که nmn_1 باشند و $|f>$ با اعداد مشابه کوانتوم که $n'mn'_1$ باشند مشخص شده‌اند. n عبارت از عدد کوانتوم کل و m قدر مطلق عدد کوانتوم مغناطیسی و n_1 عدد کوانتوم هزلولی است. ماتریسهای مربوط بقرار زیرند:

$$<m'mn'_1|z|nmn_1>=\frac{1}{4Z}\left[\frac{4\alpha'\alpha}{(\alpha+\alpha')^2}\right]^{m+2}$$

$$\times\left[\frac{(n_1+m)!}{n_1!}\times\frac{(n_2+m)!}{n_2!}\times\left(\frac{(n'_1+m)!}{n'_1!}\right)\times\frac{(n'_2+m)!}{n'_2!}\right]^{1/2}$$

$$\times\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\sum_{r'_2=0}^{n'_1}\sum_{r'_2=0}^{n'_2}\left(\frac{-2\alpha}{\alpha+'\alpha}\right)^{r_1+r_2}\left(\frac{-2\alpha'}{\alpha+\alpha'}\right)^{r'_1+r'_2}$$

$$\times\binom{n^1}{r_1}\binom{n'_1}{r'_1}\binom{n_2}{r_2}\binom{n'_2}{r'_2}\times\frac{(m+r_1+r'_1)!}{(m+r_1)!\ (m+r'_1)!}\times\frac{(m+r_2+r'_2)!}{(m+r_2)!\ (m+r'_2)!}$$

$$\times[\lambda_1(\lambda_2+1)-\lambda_2(\lambda_2+1)] \qquad (۲۵)$$

در رابطه بالا محور Z در جهت **q** گرفته شده و مقادیر α ، α' ، λ_1 ، λ_2 با روابط زیر داده شده‌اند.

$$\alpha=Z/n \quad ، \quad \alpha'=Z/n' \tag{۲۶}$$

$$\lambda_1=m+1+r_1+r'_1 \quad ، \quad \lambda_2=m+1+\nu_2+\nu'_2 \tag{۲۷}$$

همچنین

$$n'_2=n'-1-m-n'_1 \quad و \quad n_2=n-1-m-n_1$$

میباشد.

برای تعیین ارزش $<\mathbf{R}\,|\,z\,|\,nmn_1>$ محور Z بایستی در جهت **q** باشد. ولی‌بآسانی میتوان نشان داد که اگر انتگرال مجذور قدر مطلق ماتریس بالا نسبت به $\hat{R}$ بعمل‌آید عدد حاصل نسبت بانتخاب محور Z نامتغیر است. ازاینرو میتوان محور Z را در جهت **R** انتخاب نمود. در این صورت ماتریس بالا به $<\mathbf{R}\,|\,\hat{q}\cdot\mathbf{r}\,|\,nmn_1>$ تبدیل میگردد. بدیهی‌است که $\hat{q}\cdot\mathbf{r}$ نسبت بهر محور نامشخص فقط دارای مؤلفه‌های $\mu=0$ و $\mu=1$ میباشد. جائیکه μ اعدادکوانتوم مغناطیسی است. ازاینجهت که **R** در جهت محور Z گرفته شده است. ماتریس بالا تنها برای‌ارزشهای $m=0$ و $m=1$ غیر صفر است. مجذور این ماتریس وقتی انتگرال آن نسبت به $\hat{R}$ بعمل آمده باشد بقرار زیر است:

$$\int d\hat{R}\,|<\mathbf{R}\,|\,z\,|\,nmn_1>|^2=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{3}\,|\,sG|^2 \quad , \quad m=0\\[2ex] \dfrac{16\pi}{3}\,|\,sF\,|^2 \quad ، \quad m=1\end{cases} \tag{۲۸}$$

$$O \qquad m\neq 0 \text{ و } 1$$

چنانکه s و G و F با روابط زیر داده شده‌اند:

$$\delta=\frac{-i^m(2\alpha)^{m+2}}{2m!\sqrt{\pi Z}}\left[\frac{(n_1+m)!\,(n_2+m)!}{n_1!\qquad n_2!}\right]^{1/2}\left(\frac{\beta}{1-e^{-2\pi\beta}}\right)^{1/2}$$

$$\times\sum_{r_1=0}^{n_1}\binom{n_1}{r_1}(-2\alpha)^{r^1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\binom{n_2}{r_2}(-2\alpha)^{r^2}$$

$$\times \sum_{\mu_2=0}^{m+r_2} \binom{m+r_2}{\mu_2} \times \frac{(-2)^{\mu_2}}{\mu_2!\,Z} \prod_{\lambda_2=0}^{\mu_2} (Z-iR\lambda_2) \quad , \quad \beta=Z/R$$

(٢٩)

$$F=-\frac{f}{|\alpha|}\left[(1+\mu_2)e^{i\varphi}+(3+\nu_1+\nu_2)e^{-i\varphi}-\frac{2Z}{|\alpha|}\right] \qquad (٣٠)$$

$$G=\frac{f}{|a|^2}\Big\{(1+\mu_2)(2+\mu_2)e^{2i\varphi}-(1+r_1-r_2)(2+r_1+r_2)e^{-2i\varphi}$$

$$+2\nu_2(1+\mu_2)+\frac{4Z}{|a|^2}\left[Z-\alpha(2+\mu_2+\nu_2)-iR(1+\mu_2-\nu_2)\right]\Big\} \qquad (٣١)$$

در روابط (٢٨) s عامل جمعی است که بر G و F اثر میکند و a و φ و f با روابط زیر داده میشوند.

$$a=\alpha+iR \ , \ \varphi=\tan^{-1}R/\alpha \ , \ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \qquad (٣٢)$$

$$f=|a|^{-2}e^{-2\beta\varphi}\, a^{-(2m+\nu_1+\nu_2)}a^{*-\mu_2} \qquad (٣٣)$$

همچنین ماتریسهای قطری (٢٤) با رابطه زیر داده میشوند.

$$<nmn_1|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|nmn_1>=d\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu'_1=0}^{n'_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\sum_{\nu'_2=0}^{n'_2}(-2a)^{\nu_1+\nu'_2+\nu_2+\nu'_2}$$

$$\times\binom{n_1}{\nu_1}\binom{n'_1}{\nu'_1}\binom{n_2}{\nu_2}\binom{n'_2}{\nu'_2}\times\frac{(m+\nu_1+\nu'_1)!}{(m+\nu_1)!\,(m+\nu'_1)!}\times\frac{(m+r_2+r'_2)!}{(m+\nu_2)!\,(m+\nu'_2)!}$$

$$\times\frac{[(2m+2+\nu_1+\nu'_1+\nu_2+\nu'_2)(2a)-i(\nu_2-\nu_1+\nu'_2-\nu'_1)q]}{(2a-iq)^{m+2+\nu_1+\nu'_1}(2a+iq)^{m+2+\nu_2+\nu'_2}} \qquad (٣٤)$$

$$C=\frac{(2a)^{2(m+2)}}{4Z}\left[\frac{(n_1+m)!}{n_1!}\times\frac{(n_2+m)!}{n_2!}\right] \qquad (٣٥)$$

وقتی ماتریس بالا در (٢٤) قرار داده شده و نسبت به q انتگرال بعمل آید و همچنین از رابطه (١٦) برای q_{min} و $q^m{}_{ax}$ که اعتبار آن در انرژیهای بالا است استفاده گردد و Q_2 که بدینطریق بدست

میاید با Q_1 که با (۲۳) داده شده جمع گردد نتیجه زیر حاصل میگردد :

$$Q(nmn_1) = (Mz/\mu Z)^2 E^{-1}[A(nmn_1)\ln E + B(nmn_1)] \qquad (۳۶)$$

جائیکه E انرژی ذره باردار برحسب ریدبرگ و پارامترهای $A(nmn_1)$ و $B(nmn_1)$ اعداد ثابتی هستند که میتوان بصورت زیر نوشت :

$$A(nmn_1) = 8\left(\frac{M}{\mu}z\right)^2 T[\tau + (\sigma^\circ_2)] \qquad (۳۷)$$

$$T = \frac{M^2}{32Z^2} \sum_{\gamma} \sum_{\gamma'' \leqslant \gamma} H(\gamma)H(\gamma'')\ (2 - \delta\gamma\gamma'') \sum_{p=0}^{2} D(\gamma\gamma'', \rho)$$

$$H(\gamma) = (-1)^{v_1 + v'_1 + v_2 + v'_2} \binom{n_1}{v_1}\binom{n_1}{v'_1}\binom{n_2}{v_2}\binom{n_2}{v'_2} \qquad (۳۸)$$

$$\times \frac{(m + v_1 + v'_1)!}{(m + v_1)!\ (m + v'^1)!} \times \frac{(m + v_2 + v'_2)!}{(m + v_2)!\ (m + v'_2)!} \qquad (۳۹)$$

در رابطه بالا γ معرف چهار اندیس $v_1 v_2 v'_1 v'_2$ میباشد و حدود v_1 و v_1 از صفر تا n_1 حدود r_2 و r'_2 از صفر تا n_2 میباشد. همچنین γ'' معرف چهار اندیس دیگر $v_1 v_2 v'_1 v'_2$ است که حدودشان در بالا تعریف گشته است. بالاخره سه ارزش $D(\gamma\gamma'', \rho)$ بقرار زیرند :

$$D(\gamma\gamma'', 0) = 4\lambda''_1\lambda_2 \quad \text{و} \quad D(\gamma\gamma'', 1) = 2[\lambda''_1(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_2(\lambda''_1 - \lambda''_2)]$$

$$D(\gamma\gamma'', 2) = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda''_1 - \lambda''_2) \qquad (۴۰)$$

در رابطه (۳۷) τ و σ_0 بقرار زیر تعریف میشوند.

$$\tau = \lambda_1 + \lambda''_2 + 2 \quad \text{و} \quad \sigma_0 = \mu + (\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda''_1 - \lambda''_2) \qquad (۴۱)$$

λ_1 و λ_2 در روابط بالا قبلاً تعریف گشته‌اند.

روابط بالا برای $D(\gamma\gamma'', \sigma)$ و τ و σ_0 درصورتی اعتبار دارند که $\lambda_1 - \lambda_2 \leqslant \lambda''_1 - \lambda''_2$ باشد. اگر $\lambda_1 - \lambda_2 > \lambda''_1 - \lambda''_2$ باشد بایستی تعویض $\lambda_2 \rightleftarrows \lambda_1$ و $\lambda''_2 \rightleftarrows \lambda''_1$ صورت گیرد.

همچنین بایستی توجه نمود که در (۳۷) T یک عامل جمع است و ۹ جمع که در T است بر τ و $\sigma_\circ$ اثر میکنند.

بالاخره پارامتر $B(nmn_1)$ با رابطه زیر داده میشود.

$$B(nmn_1)=8\left(\frac{M}{\mu}z\right)^2\left\{\sum_{n'\neq n}\left[\ln\frac{4\alpha\mu}{M(\alpha^2-\alpha'^2)}\right]\sum_{n'_1}|<n'mn'_1|z|nmn_1>|^2\right.$$

$$+\int_\circ^\infty R^2dR\ln\frac{4\alpha\mu}{M(\alpha^2+R^2)}\int d\hat{R}\;|<\mathbf{R}|z|nmn_1>|^2$$

$$\left.-T\left[s(2,\tau,-1)-\binom{\sigma_\circ}{2}s(1,\tau-1,o)-\sum_{\sigma=2}^{\sigma_\circ/2}\binom{\sigma_\circ}{2\sigma}s(o,\sigma-2-\tau+1)\right]\right\}$$

(۴۲)

در (۴۲) همه علائم تعریف گشته باستثنای $s(l,i,j)$ که با رابطه زیر داده میشود.

$$s(l,i,j)=\sum_{i'=1}^{i}\binom{i}{i'}\frac{(-1)^{i'}}{i'+j} \qquad (۴۳)$$

بآسانی میتوان در $A(nmn_1)$ و $B(nmn_1)$ جمع نسبت به m و n_1 بعمل آورد ، دراینصورت مقطع کل تصادم برای تراز انرژی n با رابطه زیر داده میشود.

$$Q(n)=(Mz/\mu Z)^2E^{-1}[A(n)\ln E+B(n)] \qquad (۴۴)$$

جائی که :

$$A(n)=\frac{1}{n^2}\sum_{m=\circ}^{n-1}(2-\delta_{m,o})\sum_{n_1=\circ}^{n-1-m}A(nmn_1) \qquad (۴۵)$$

$$B(n) = \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{n-1} (2-\delta_{m-0}) \sum_{n_1=0}^{n-1-m} B(nmn_1) \qquad (٤٦)$$

میباشند.

نتایج حاصله

نتایج محاسبات در دو جدول ١ و ٢ خلاصه میشوند. در جدول ١ مقادیر $A(nmn_1)$ و $B(nmn_1)$ برای تمام ارزشهای n و m و n_1 که متعلق به ٣ و ٢ و ١ = n میشوند محاسبه شده‌اند. میتوان $A=(nmn_1)$ و $B(nmn_1)$ را بطور غیر مستقیم بدست آورد بدین ترتیب که ضرایب A و B را برای تحریک و یونیزه شدن از تراز nmn_1 بهر تراز دیگری بطور جداگانه حساب نمود، وقتی این ضرایب برای همه ترازهای تحریک و یونیزه شدن با یکدیگر جمع گردند، حاصل جمع بایستی معادل $A(nmn_1)$ و $B(nmn_1)$ گردد. این محاسبات قبلاً بوسیله مؤلف انجام گردیده است[٢] و نتایج در جدول ٢ داده شده است و با Σ مشخص گردیده‌اند. همچنین این حاصل جمع بوسیله طریقه‌ای که در این مقاله داده شده محاسبه شده و با s نشان داده شده‌اند. بطوریکه دیده میشود اختلاف Σ و s بیش از چند درصد نیست. قسمتی از این اختلاف مربوط بانتقال ترازهای انرژی میشود که در Σ گنجانیده نشده‌اند و قسمت دیگر مربوط بکمبود دقت در محاسبات است.

جدول ١- ارزشهای A و B برای ترازهای انرژی nmn_1 و $\bar{n}$ جائیکه $\bar{n}$ میانگین ارزشهای A و B برای تراز n میباشد.

جدول ١

nmn_1	A	B	nmn_1	A	B	nmn_1	A	B
١٠٠	٤ر٠٠	٧ر١٨	٣١٠	٩٩ر٠	٤٢٠ر٨	٤١٠	٢٨٨	١٣٥١
٢٠٠	٢٨ر٠٠	١٠٦ر٣	٣١١	٩٩ر٠	٣٩٩ر٣	٤١١	٢٨٨	١٣٤٢
٢٠١	٢٨ر٠٠	٨٢ر٣	٣٢٠	٧٢ر٠	٣٢٩ر٨	٤١٢	٢٨٨	١٢٨٥
٢١٠	٢٤ر٠٠	٨٤ر٦	٣̅	٩٦ر٠	٤٠٢ر٣	٤٢٠	٢٤٠	١١٦٠
٢̅	٢٦ر٠٠	٨٩ر٤	٤٠٠	٣٠٤ر٠	١٤٩٩	٤٢١	٢٤٠	١١٦٠
٣٠٠	١٠٨ر٠	٤٩٠ر٠	٤٠١	٣٠٤ر٠	١٤١٤	٤٣٠	١٦٠	٨٧٠ر٣
٣٠١	١٠٨ر٠	٤٤٢ر٥	٤٠٢	٣٠٤ر٠	١٣٧٣	٤̅	٢٦٤	١٢٤٤
٣٠٢	١٠٨ر٠	٣٩٦ر٥	٤٠٣	٣٠٤ر٠	١٢٨٣			

جدول ۲- مقایسه مقاطع تصادم کل ترازهای انرژی مربوط با عداد کوانتوم ۳ و ۲ و ۱ = n جائیکه اتمی که در هریک از این ترازهای انرژی قرارگرفته باشد میتواند بهر ترازانرژی دیگر تحریک شده و یا یونیزه شود. n′ نمره کوانتوم اتم پس‌از تحریک و R مربوط به یونیزه شدن اتم میباشد. تعاریف A و B درمتن داده شده است. Σ حاصل جمع اعداد مربوط بارزشهای مختلف n′ و R میباشد.

s معادل Σ بوده ولی با طریقه‌ای که دراین مقاله ذکر گردیده است محاسبه گردیده است.

جدول ۲

n ╲ n′	۱		۲		۳	
	A	B	A	B	A	
۱			٠ر٥٥	٠ر٣٨	٠ر٠٤	٠ر٠٤
۲	٢ر٢٢	١ر٥٣			٨ر٢٠	٢٠ر١٨
۳	٠ر٣٥٦	٠ر٣٩٧	١٨ر٤٥	٤٥ر٤		
٤	٠ر١٢٤	٠ر١٥٧	٢ر٥٥	٨ر٨	٦٩ر٣٠	٢٣٧ر٧
٥	٠ر٠٥٨	٠ر٠٧٨	٠ر٨٥	٣ر٤	٨ر٤٧	٤١ر١٦
٦	٠ر٠٣٢	٠ر٠٤٤	٠ر٤٠	١ر٧	٢ر٦٨	١٥ر٣٨
۷	٠ر٠١٩٧	٠ر٠٢٨	٠ر٢٢	٠ر٩٩	١ر٢٢	٧ر٦٩
۸	٠ر٠١٢٩	٠ر٠١٨	٠ر١٤	٠ر٦٣	٠ر٦٧٢	٤ر٤٩
۹			٠ر٠٩١	٠ر٤٣	٠ر٤١٥	٢ر٨٨
۱۰			٠ر٠٦٤	٠ر٣٠	٠ر٢٧٦	١ر٩٧
۱۱			٠ر٠٤٧	٠ر٢٢	٠ر١٩٤	١ر٤٢
۱۲			٠ر٠٣٥	٠ر١٧	٠ر١٤٣	١ر٠٥
R	١ر١٣٤	٥ر٠٢٦	٢ر٤٣	٢٥ر٠	١ر٠٤	٥٤ر٥
Σ	٣ر٩٦	٧ر٠٢٨	٢٥ر٨٢٧	٨٧ر٤٢	٩٢ر٦١٠	٣٨٨ر٤٦
s	٤ر٠٠	٧ر١٨	٢٦ر٠٠	٨٨ر٣١	٩٦ر٠٠	٤٠٢ر٣

تشکرـ تمام محاسبات بوسیله کمپیوتر آی ، بی ، ام ۳۶۰ مدل ۴۰ شرکت ملی نفت انجام گرفته و پروگرام نمودن در روی کمپیوتر بوسیله ابوالحسن خطیب دانشجوی دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران انجام یافته است. زبان پروگرام فورتران ۴ بوده است و مقدار زیادی از عملیات محاسباتی برای مثال محاسبات بوسیله اعداد موهومی برای اولین بار در روی کمپیوتر ذکر شده انجام گرفته است.

در خاتمه از اولیای شرکت ملی نفت که تسهیلات محاسباتی را برای انجام محاسبات دراین مقاله در اختیار مؤلف گذارده‌اند تشکر وقدردانی میشود.

منابع (Reference)

1— H. A. Bethe , Ann. Phys. (Leipzig) 5 , 325 (1930) .

2- K. Omidvar , Phys. Rev. **188** , 140 (1969)