

محاسبات عددی انتقال حرارت هدایتی در پره‌های حلقوی از جنس مواد

ارتوتروپیک^۱

فرشاد کوثری

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

امیر رضا فراهانی

دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۷۶/۱۲/۲۶، تاریخ تصویب: ۷۸/۲/۱۱)

چکیده

در این مقاله به منظور بررسی انتقال حرارت در پره‌های حلقوی از جنس مواد ارتوتروپیک و با اشکال مختلف ابتدا با استفاده از سیستم معادلات پواسون شبکه‌بندی مناسبی ایجاد می‌گردد و پس از انتقال معادلات به محیط محاسباتی به حل معادلات در محیط محاسباتی پرداخته می‌شود و اثرات وجود چشمه حرارتی، تغییرات ضریب انتقال حرارت جابجائی و دمای غیر یکنواخت پایه پره بررسی می‌گردد و در نهایت انتقال حرارت برای پروفیل‌های مختلف پره (تحت قیدهای وزن و ضخامت پایه و نوک ثابت) بررسی می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: انتقال حرارت هدایت، پره‌ها، سطوح گسترده، مواد ارتوتروپیک

مقدمه

هستند). در این زمینه آقایان Tan [۴] و Lau یک راه حل کاملاً تحلیلی دوبعدی برای یک پره با دمای پایه ثابت و ضریب انتقال حرارت جابجائی یکسان در اطراف پره ارائه کرده‌اند. در برخی کارهای صورت گرفته اجازه داده شده است تا ضریب انتقال حرارت جابجائی در اطراف پره متفاوت باشد که مقالات آقایان Sfeir [۸] و Look [۵] از جمله این کارها هستند. معادلات و آنالیزها بر روی سطوح اولیه و پره‌ها نشان داده است که اثرات هدایت دوبعدی بر روی سطح اولیه باعث می‌شود که دمای پایه پره در راستای عمود بر طول پره یکنواخت نباشد. در این راستا آقایان Look, Kang [۶] نتایج آنالیز خود در مرجع [۵] را با در نظر گرفتن یک تابع کسینوسی برای دمای پایه پره اصلاح نمودند. همچنین آقای Aziz [۱] نیز مسئله هدایت دوبعدی پره مستطیلی و مستقیم که از جنس مواد ارتوتروپیک باشد را حل نموده است و اثرات وجود چشمه حرارتی، دمای غیر یکنواخت پایه پره و تغییرات ضریب انتقال حرارت جابجائی را بررسی نموده است. در این مقاله انتقال حرارت در پره‌های حلقوی از جنس مواد ارتوتروپیک و با اشکال مختلف بررسی می‌گردد و اثرات وجود

در بررسی انتقال حرارت سطوح گسترش یافته، فرض معمولی که برای ساده‌سازی بکار می‌رود، فرض یکبعدی بودن انتقال حرارت در داخل جسم است که برطبق این فرض تنها انتقال حرارت هدایتی در راستای طول پره وجود دارد. اگرچه در سالهای اخیر مواردی در صنعت پیش آمده است که تنها با فرض دوبعدی بودن انتقال حرارت قابل بررسی دقیق هستند.

این موضوع ثابت شده است که هنگامی که ضریب انتقال حرارت جابجائی h در مقایسه با ضریب هدایت حرارتی جسم بزرگ باشد، فرض یکبعدی بودن انتقال حرارت چندان صحیح نیست. تنها در محدوده‌ای می‌توان انتقال حرارت را یکبعدی فرض کرد که عدد بیو (که براساس نیمی از ضخامت پره بیان می‌گردد) خیلی کوچکتر از یک باشد. وضعیت دیگری که معمولاً فرض یکبعدی بودن در آن صورت نیز صحیح نیست هنگامی است که ضریب انتقال حرارت جابجائی در سطوح مختلف پره یکسان نباشد. یک مثال ساده از این وضعیت یک پره افقی در محیطی با جابجائی طبیعی است، که در این حالت همواره ضریب جابجائی در سطوح بالائی بزرگتر از سطوح پائینی است (در بهترین شرایط برابر

۱ - مواد ارتوتروپیک (Orthotropic) موادی هستند که در نانسور هدایت حرارتی آنها به غیر از مؤلفه‌هایی که بر روی قطر اصلی قرار دارند بقیه

مؤلفه‌ها برابر صفر هستند.

$$\text{at } r=r_b \quad T=T_b + a \cos(\pi z/w) \quad (2)$$

$$\text{at } r=r_t \quad -k_1 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(r_t,z)} = h_t [T(r_t,z) - T_\infty] \quad (3)$$

$$\text{at } z=w/2 \quad -k_2 \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(r,w/2)} = h_u [T(r,w/2) - T_\infty] \quad (4)$$

$$\text{at } z=-w/2 \quad +k_2 \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(r,-w/2)} = h_d [T(r,-w/2) - T_\infty] \quad (5)$$

به منظور مقایسه نتایج بدست آمده با مرجع [۱] سعی شده تا از پارامترهای بدون بعدی که در این مرجع بکار گرفته شده است برای بی‌بعدسازی معادلات فوق استفاده گردد، بدین منظور پارامترهای بدون بعد به شرح زیر معرفی می‌گردند:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty}, \quad R = \frac{r}{L}, \quad Z = \frac{z}{w/2}$$

$$R_b = \frac{r_b}{L}, \quad R_t = \frac{r_t}{L}$$

$$A = \frac{a}{T_b - T_\infty}, \quad Bi_t = \frac{h_t L}{k_1}, \quad Bi_d = \frac{h_d w}{2k_2}$$

$$Bi_u = \frac{h_u w}{2k_2}, \quad K = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\alpha = \frac{2L}{W}, \quad Q^* = \frac{q \cdot L^2}{k_1 (T_b - T_\infty)} \quad (6)$$

که در این روابط L برابر با $(T_t - T_b)$ می‌باشد. با جایگزینی پارامترهای فوق در معادلات (۱) تا (۵) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + K \alpha^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + Q^* = 0 \quad (7)$$

$$\text{at } R=R_b \quad \theta = 1 + A \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot Z\right) \quad (8)$$

$$\text{at } R=R_t \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial R} \right|_{(R_t,Z)} = -Bi_t * \theta \Big|_{(R_t,Z)} \quad (9)$$

$$\text{at } Z=1 \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right|_{(R,1)} = -Bi_u * \theta \Big|_{(R,1)} \quad (10)$$

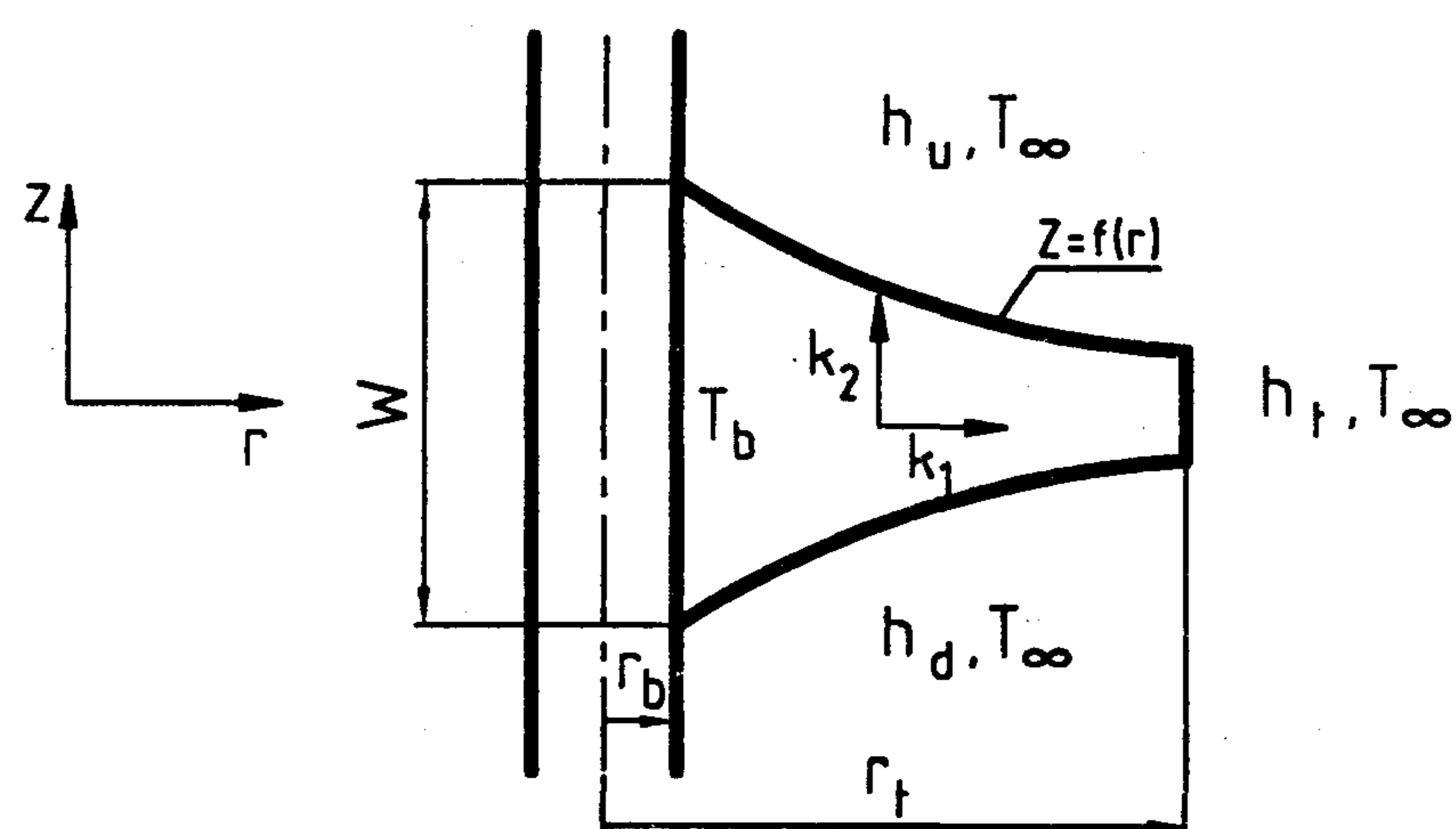
$$\text{at } Z=-1 \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right|_{(R,-1)} = Bi_d * \theta \Big|_{(R,-1)} \quad (11)$$

نرخ انتقال حرارت کلی از پره را می‌توان از مجموع انتقال حرارت هدایتی از پایه پره و حرارت تولیدی در داخل پره بدست آورد. این

چشمه حرارتی، تغییرات ضریب جابجائی و دمای غیر یکنواخت پایه پره بررسی می‌گردد و با مقایسه با نتایج مرجع [۱] در مورد اختلافات در نتایج موجود بررسی بیشتری صورت می‌گیرد و در نهایت سعی می‌گردد تا انتقال حرارت برای پروفیل‌های مختلف پره (تحت قیدهای وزن و ضخامت پایه و نوک ثابت) بررسی گردد.

فرمولاسیون انتقال حرارت در پره حلقوی ارتوتروپیک

یک پره حلقوی به طول L ، ضخامت W (در پایه پره) و پروفیل مشخصه $Z=f(r)$ را که در داخل آن تولید حرارت q (بر واحد حجم) وجود دارد، در نظر می‌گیریم؛ پره از جنس ارتوتروپیک بوده و در آن ضریب هدایت حرارتی در جهت طولی k_1 با ضریب هدایت حرارتی در جهت عمود بر آن k_2 برابر نمی‌باشد. پره در محیطی با دمای T_∞ قرار گرفته و با محیط اطراف خود تبادل حرارتی از نوع جابجائی دارد و از اثرات تشعشع صرف‌نظر می‌گردد. مقادیر ضریب انتقال حرارت جابجائی در بالا، پائین و نوک پره هر یک می‌توانند مقدار مستقلی دارا باشند. در ضمن دمای پره در پایه آن بصورت $T(r_b, z) = T_b + a \cos\left(\frac{\pi z}{W}\right)$ نشان دهنده ماکزیمم انحراف دمای پایه پره از دمای T_b است.



شکل ۱: نیم مقطعی از یک پره حلقوی.

مدل ریاضی فوق را که براساس مشخصات فیزیکی بنا نهاده شده است می‌توان بدین صورت بیان کرد:

$$\frac{k_1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q = 0 \quad (1)$$

که در آن k_1 و k_2 ضرایب هدایت حرارتی در جهات r, z هستند. شرایط مرزی را می‌توان بدین صورت بیان نمود:

$$C_1 = \frac{z_\eta}{rJ} + \frac{z_\eta z_{\xi\eta} - z_\xi z_{\eta\eta}}{J^2} + \frac{z_\xi z_\eta J_\eta - z_\eta^2 J_\xi}{J^3}$$

$$C_2 = \frac{r_\eta r_{\xi\eta} - r_\xi r_{\eta\eta}}{J^2} + \frac{r_\xi r_\eta J_\eta - r_\eta^2 J_\xi}{J^3}$$

$$C_3 = -\frac{z_\xi}{rJ} + \frac{z_\xi z_{\xi\eta} - z_\eta z_{\xi\xi}}{J^2} + \frac{z_\xi z_\eta J_\xi - z_\xi^2 J_\eta}{J^3}$$

$$C_4 = \frac{r_\xi r_{\xi\eta} - r_\eta r_{\xi\xi}}{J^2} + \frac{r_\xi r_\eta J_\xi - r_\xi^2 J_\eta}{J^3} \quad (15)$$

اکنون برای نوشتن شرایط مرزی لازم است که گرادیان درجه حرارت در راستای عمود بر مرزها را بدست آورد. بنابراین در جهت عمود بر مرز η ثابت (در راستای ξ ثابت) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial N} \Big|_{\xi=\text{const}} = \frac{(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) T_\xi + (\eta_r^2 + \eta_z^2) T_\eta}{(\eta_r^2 + \eta_z^2)^{1/2}} \quad (16)$$

و در راستای عمود بر مرز ξ ثابت (در راستای η ثابت) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial N} \Big|_{\eta=\text{const}} = \frac{(\xi_r^2 + \xi_z^2) T_\xi + (\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) T_\eta}{(\xi_r^2 + \xi_z^2)^{1/2}} \quad (17)$$

و با وجود شرایط تعامد در مرزها خواهیم داشت:

$$\Delta \xi \cdot \Delta \eta = \xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z = 0$$

بنابراین شرایط مرزی در مرزهایی که با محیط بصورت جابجائی در تبادل حرارتی است را می توان بدین صورت بیان نمود:

$$\text{at } \eta = \eta_{\max} \quad -k_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi=\text{const}} = h_u (T - T_\infty) \quad (18)$$

$$\text{at } \eta = 0 \quad k_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\xi=\text{const}} = h_d (T - T_\infty) \quad (19)$$

$$\text{at } \xi = \xi_{\max} \quad -k_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\eta=\text{const}} = h_t (T - T_\infty) \quad (20)$$

که در روابط فوق k_n از رابطه زیر بدست می آید [۲]:

$$k_n = \frac{r_z^2 k_2 + k_1}{1 + r_z^2} \quad (21)$$

موضوع را می توان به فرم بدون بعد بیان کرد:

$$Q = \frac{q\alpha}{2k_1(T_b - T_\infty)} = Q^* - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=R_b} dZ \quad (12)$$

شبکه بندی و حل معادلات در محیط محاسباتی

در این پروژه برای اینکه بتوان پروفیل های مختلف از $z=f(r)$ برای پره در نظر گرفت از سیستم مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز استفاده شده است و شبکه ای مناسب به روش حل معادلات دیفرانسیل بیضوی ایجاد می گردد. از عمده ترین مزیت های این روش حل مسائل با هندسه پیچیده، کنترل نقاط شبکه از لحاظ تعامد در مرزها و تجمع در مکانهایی که فیزیک مسئله ایجاب می کند و همچنین ساده تر شدن شرایط مرزی است.

بدین ترتیب معادلات حاکم بر مسئله را در یک سیستم مختصات منحنی الخط (ξ, η) و در یک میدان محاسباتی مستطیل شکل بیان می کنیم و پس از حل این معادلات با استفاده از یکی از روشهای عددی مناسب می توان نتایج را به سیستم مختصات اولیه در ناحیه فیزیکی برگرداند. جهت تبدیل معادلات از سیستم مختصات اولیه به سیستم مختصات منحنی الخط استفاده از روابط انتقال الزامی است. پس از استفاده از روابط تبدیل معادله (۱) را می توان در محیط محاسباتی بدین صورت بیان نمود: ([۳] و [۹])

$$E_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + E_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + E_3 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + E_4 \frac{\partial T}{\partial \xi} + E_5 \frac{\partial T}{\partial \eta} + Q^* = 0 \quad (13)$$

که در آن ضرایب E_1 تا E_5 بدین صورت تعریف می شوند:

$$E_1 = \frac{k_1 z_\eta^2 + k_2 r_\eta^2}{J^2}$$

$$E_2 = \frac{k_1 z_\xi^2 + k_2 r_\xi^2}{J^2}$$

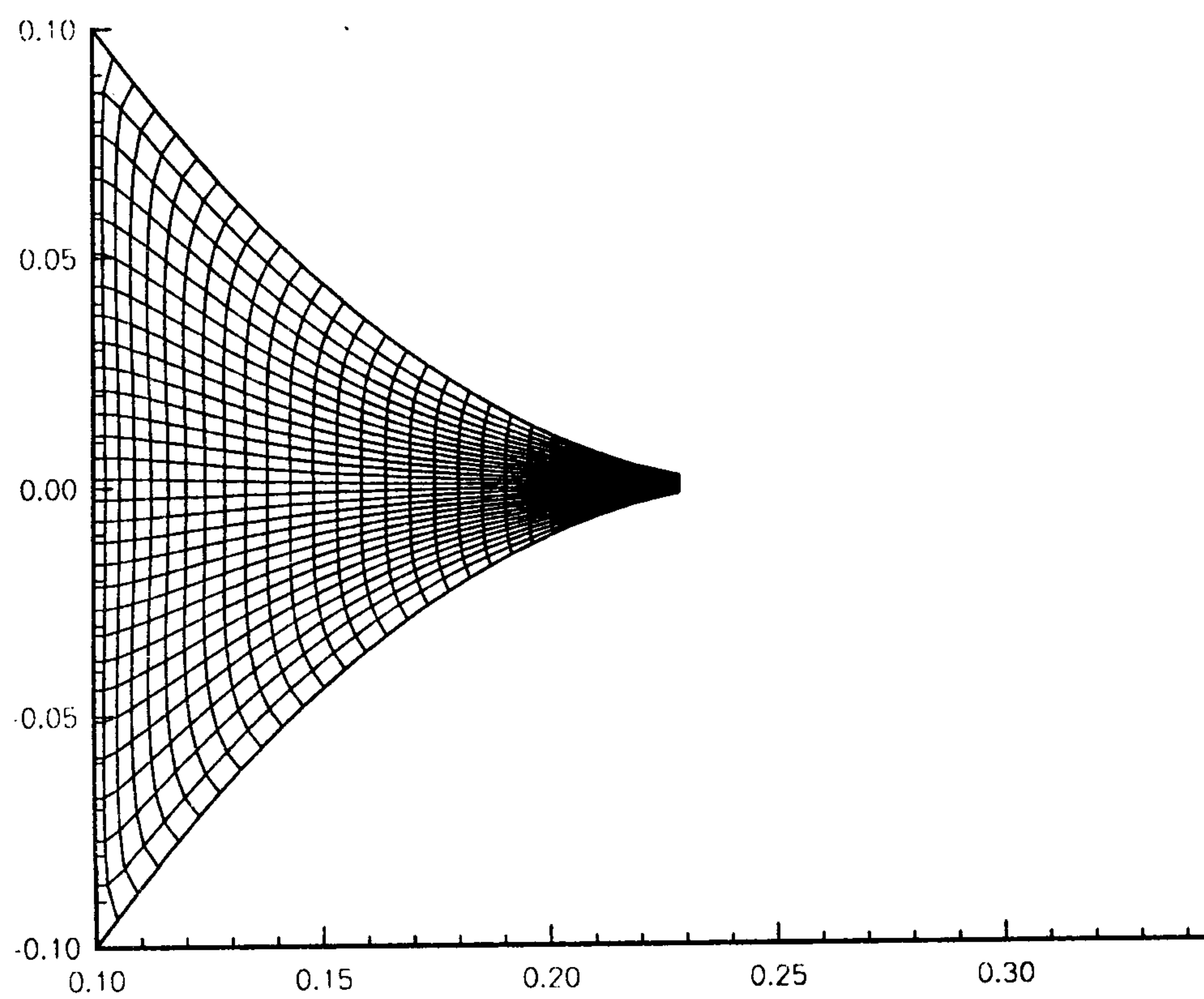
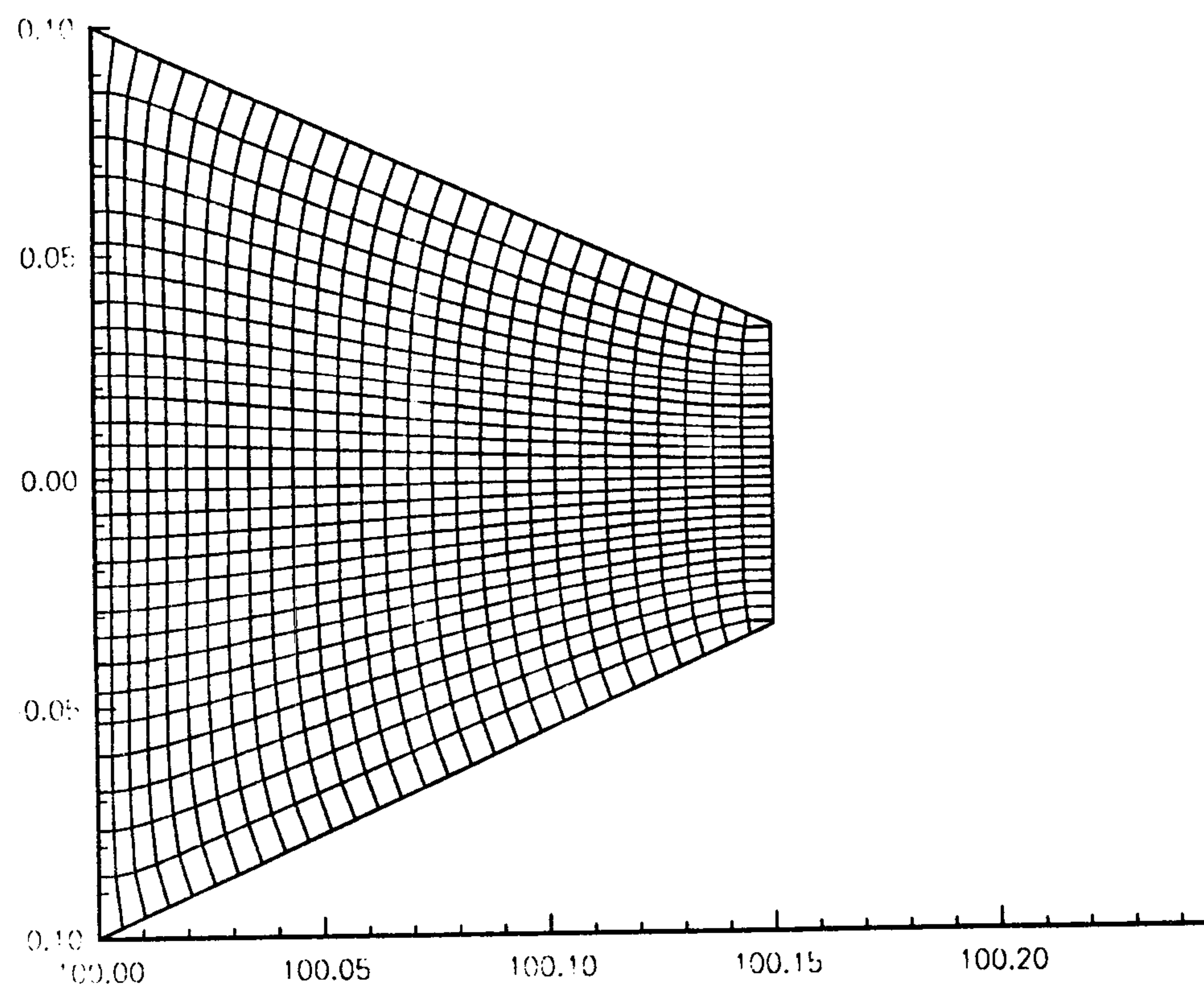
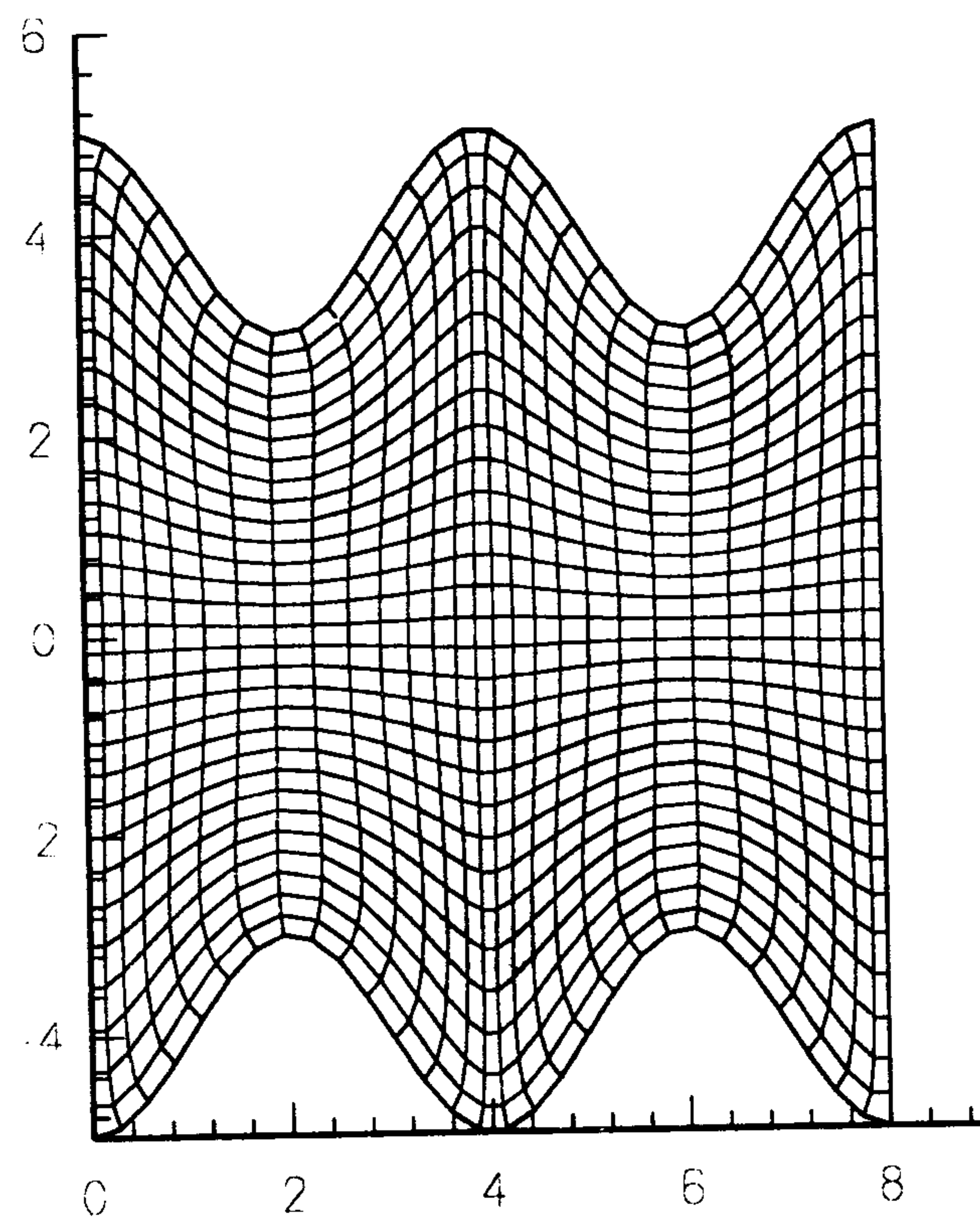
$$E_3 = \frac{-2(k_1 z_\xi z_\eta + k_2 r_\xi r_\eta)}{J^2}$$

$$E_4 = k_1 C_1 + k_2 C_2$$

$$E_5 = k_1 C_3 + k_2 C_4$$

(۱۴)

و ضرایب C_1 تا C_4 عبارتند از:



شکل ۲: نمونه‌ای از شبکه‌های ایجاد شده بوسیله روشی که در این مقاله شرح داده شده است.

در شکل (۴) نیز حرارت انتقال یافته از پره در مقابل α نشان داده شده است که در این شکل نیز تطابق خوب نتایج عددی و تحلیلی قابل مشاهده است. این درحالی است که نتایج فوق (شکل (۳) و (۴)) در مقادیر $Bi > 0.1$ با نتایج بدست آمده توسط [۱] Aziz اختلاف قابل ملاحظه‌ای دارد. نتایج موجود در مرجع [۱] تنها در محدوده Bi های کوچک با نتایج تحلیلی [۴] و نتایج عددی موجود تطبیق می‌یابد. این انحراف در اعداد Bi بزرگ می‌تواند نتیجه فرضیات احتمالی باشد که در مرجع [۱] بکار گرفته شده است که این فرضیات عملاً تنها در اعداد Bi کوچک (که فرض یکبعدی بودن انتقال حرارت صحیح است) برقرار می‌باشد.

برای بررسی غیر ایزوتروپیک بودن پره، شکل (۵) ارائه شده است. در این نمودار نرخ انتقال حرارت Q بصورت تابعی از k_1/k_2 در اعداد Bi_u مختلف نشان داده شده است. این شکل در حالتی که $h_u = h_d = h_t$ باشد ترسیم شده است که در این حالت داریم:

$$Bi_t = Bi_u \alpha \left(\frac{k_1}{k_2} \right) = Bi_d \alpha \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \quad (22)$$

بنابراین در این شکل بطور ضمنی نتایج مربوط به Bi_t نیز وجود دارد.

همانطوری که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت k_1/k_2 مقدار Q کاهش می‌یابد و این امر قابل توجیه است چون افزایش k_1/k_2 باعث افزایش هدایت حرارتی در جهت طول پره و کاهش هدایت حرارتی در جهت عمود بر آن می‌شود. بنابراین انتقال حرارت جابجائی از سطوح بالائی و پائینی پره کاهش می‌یابد هر چند که انتقال حرارت جابجائی از نوک پره زیاد می‌شود اما چون $\alpha=2$ می‌باشد واضح است که انتقال حرارت از سطوح بالائی و پائینی پره اثر بیشتری بر نرخ کلی انتقال حرارت دارند. همچنین ملاحظه می‌شود که در اعداد بیو کوچک با افزایش عدد بیو تغییر قابل ملاحظه‌ای در مقدار حرارت انتقال یافته Q بوجود می‌آید اما در اعداد بیو بزرگ این تغییرات بسیار کمتر می‌باشند.

در شکل (۶) سعی شده است تا اثرات وجود نایکنواختی در دمای پایه پره بر روی انتقال حرارت بررسی گردد. همانطوری که مشاهده می‌شود وقتی $A > 0$ باشد مقدار حرارت انتقال یافته از پره افزایش می‌یابد که این امر بعلاوه افزایش حرارتی است که از پایه پره وارد آن می‌گردد و در نهایت بصورت جابجائی به محیط منتقل می‌گردد و در صورتی که $A < 0$ باشد عکس روند فوق صورت می‌گیرد.

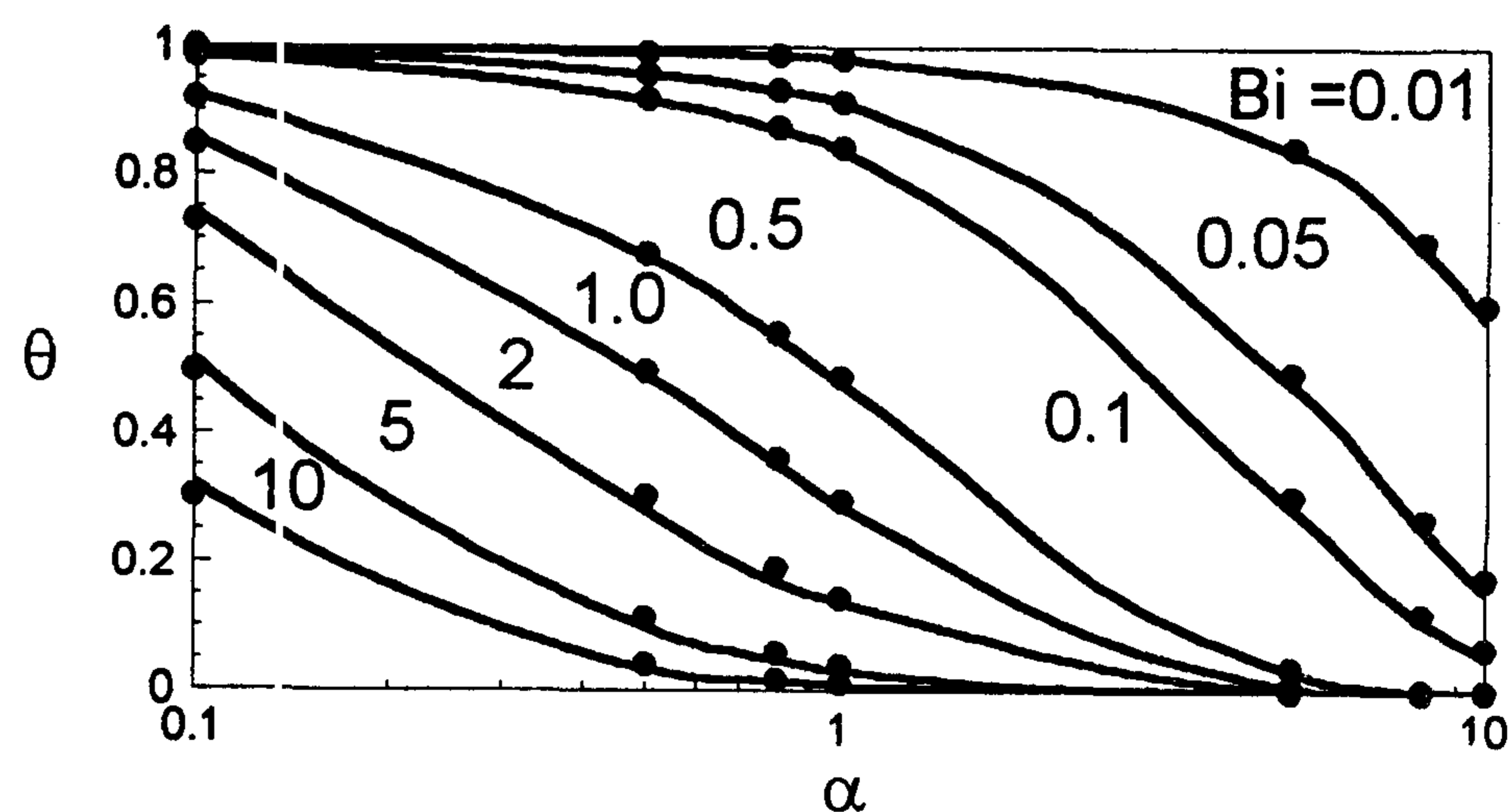
که در این رابطه T_z شیب پروفیل در هر نقطه از سطح است. اکنون می‌توان معادلات حاکم بر مسئله در محیط محاسباتی را به روش ADI^1 حل نمود و برای اینکه سریعتر به جوابهای مورد نظر برسیم از روش $SORL^2$ استفاده شده است و برای افزایش نرخ همگرایی می‌توان معادلات را یکبار در جهت i و یکبار در جهت j حل نمود. توضیحات بیشتر و جزئیات مربوط به شبکه بندی در مراجع [۳] و [۹] آمده است. در شکل (۲) نمونه‌ای از شبکه ایجاد شده به روش فوق نمایش داده شده است.

بررسی نتایج

در ضمیمه (الف) نتایج تحلیلی مربوط به یک پره ایزوتروپیک ($K=1$)، بدون چشمه حرارتی با دمای پایه یکنواخت و همچنین ضرایب انتقال حرارت جابجائی یکسان $h_u = h_t = h_d$ ارائه شده است و به منظور آزمایش صحت و دقت برنامه نوشته شده با نتایج عددی مقایسه می‌گردند.

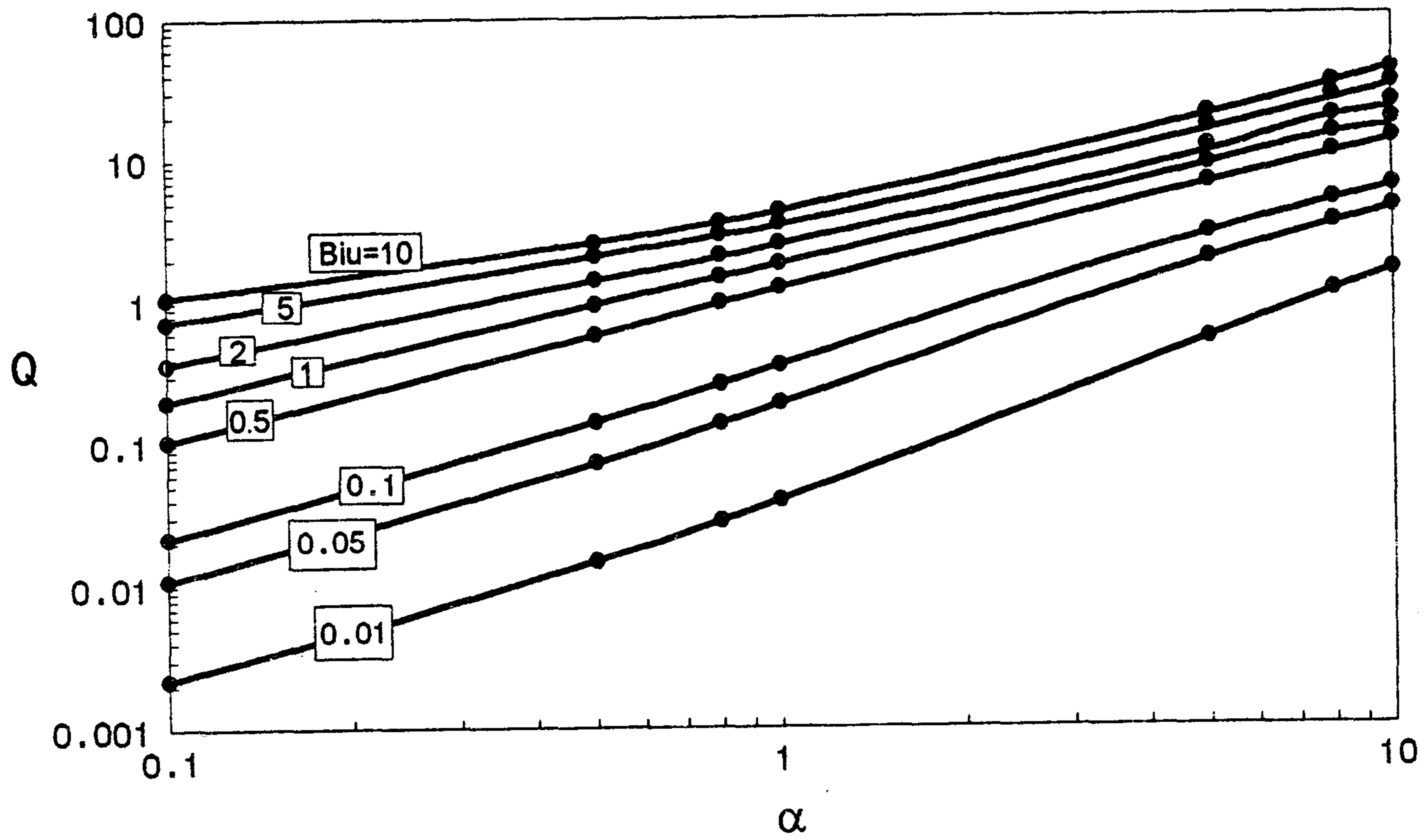
از آنجائی که نتایج موجود در مرجع [۱] برای یک پره مستقیم و با مقطع مستطیلی می‌باشد، برای اینکه بتوان نتایج عددی حاضر را با این نتایج نیز مقایسه کرد شعاع پره حلقوی را در مقایسه با دیگر پارامترها بسیار بزرگ در نظر می‌گیریم ($R \rightarrow \infty$) تا بدین ترتیب ترم $\frac{k_1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$ از معادله (۱) حذف گردد.

در شکل (۳) دمای گوشه بالای سمت راست پره حلقوی با شعاع زیاد ($R \rightarrow \infty$) برای مقادیر مختلف α و Bi ارائه شده است و در همین شکل نتایج تحلیلی (ضمیمه الف) نیز در کنار نتایج عددی آمده است که دقت قابل ملاحظه روش موجود را با ثبات می‌رساند. (نقاط و خطوط به ترتیب نمایانگر نتایج تحلیلی و عددی هستند)



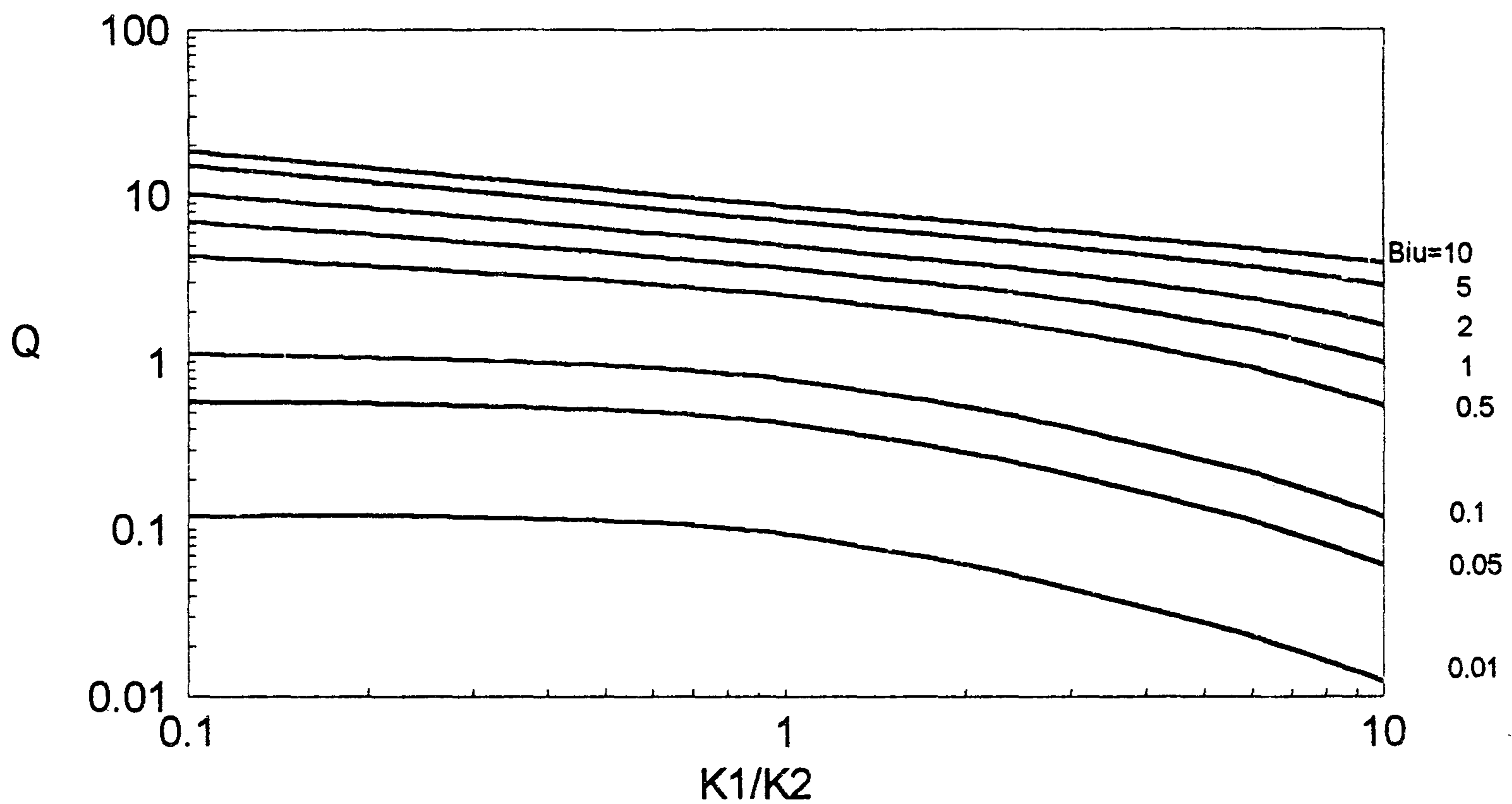
شکل ۳: نمایش دمای گوشه بالای سمت راست پره حلقوی با شعاع ($R \rightarrow \infty$) و مقایسه نتایج عددی و تحلیلی.

$$(A=0, Q^* = 0, h_u = h_d = h_t, K = 1, R \rightarrow \infty)$$



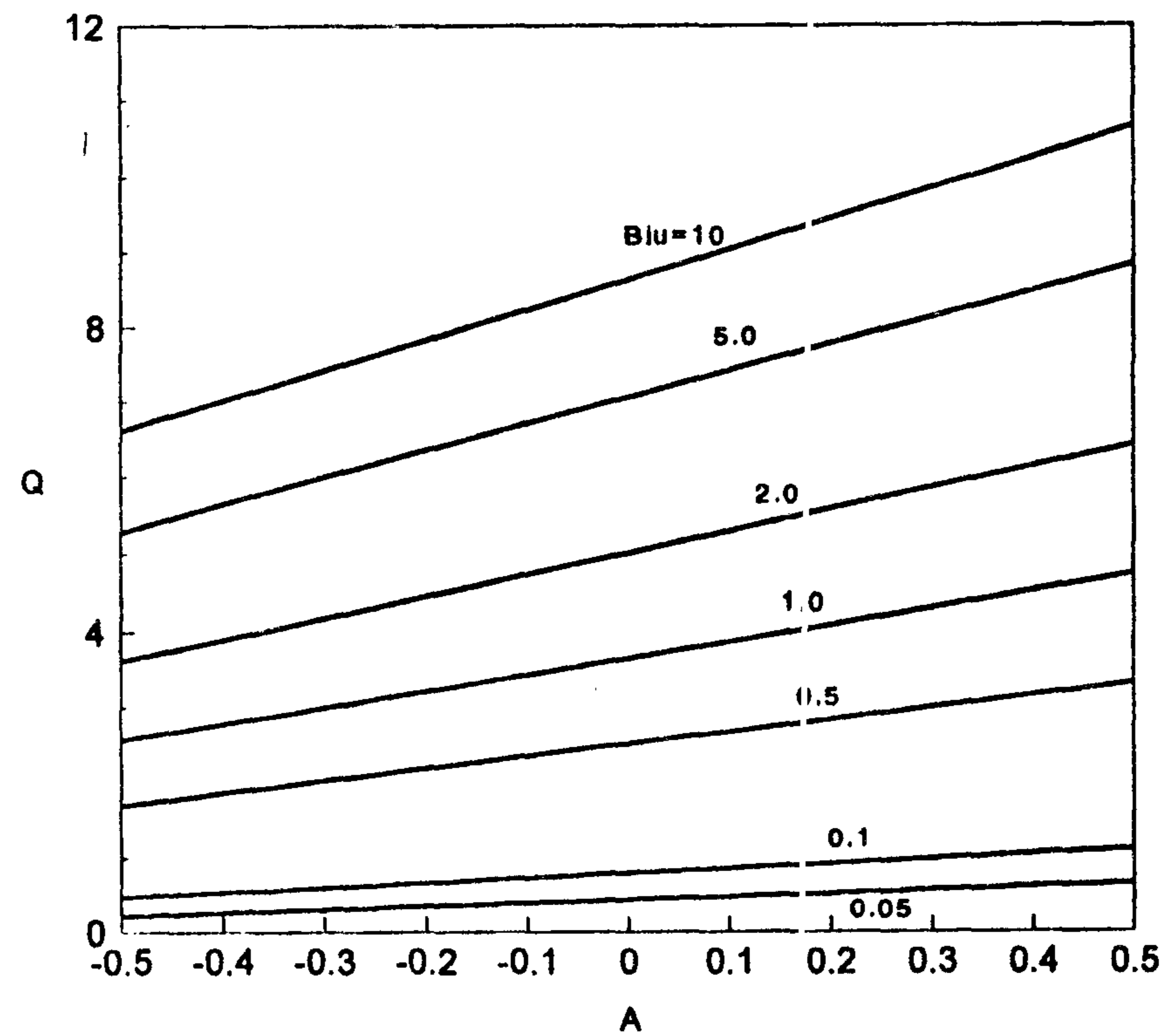
شکل ۴: نمایش حرارت انتقال یافته از پره و مقایسه نتایج عددی و تحلیلی.

$$(A=0, Q^{\circ}=0, h_u=h_d=h_t, K=1, R \rightarrow \infty)$$

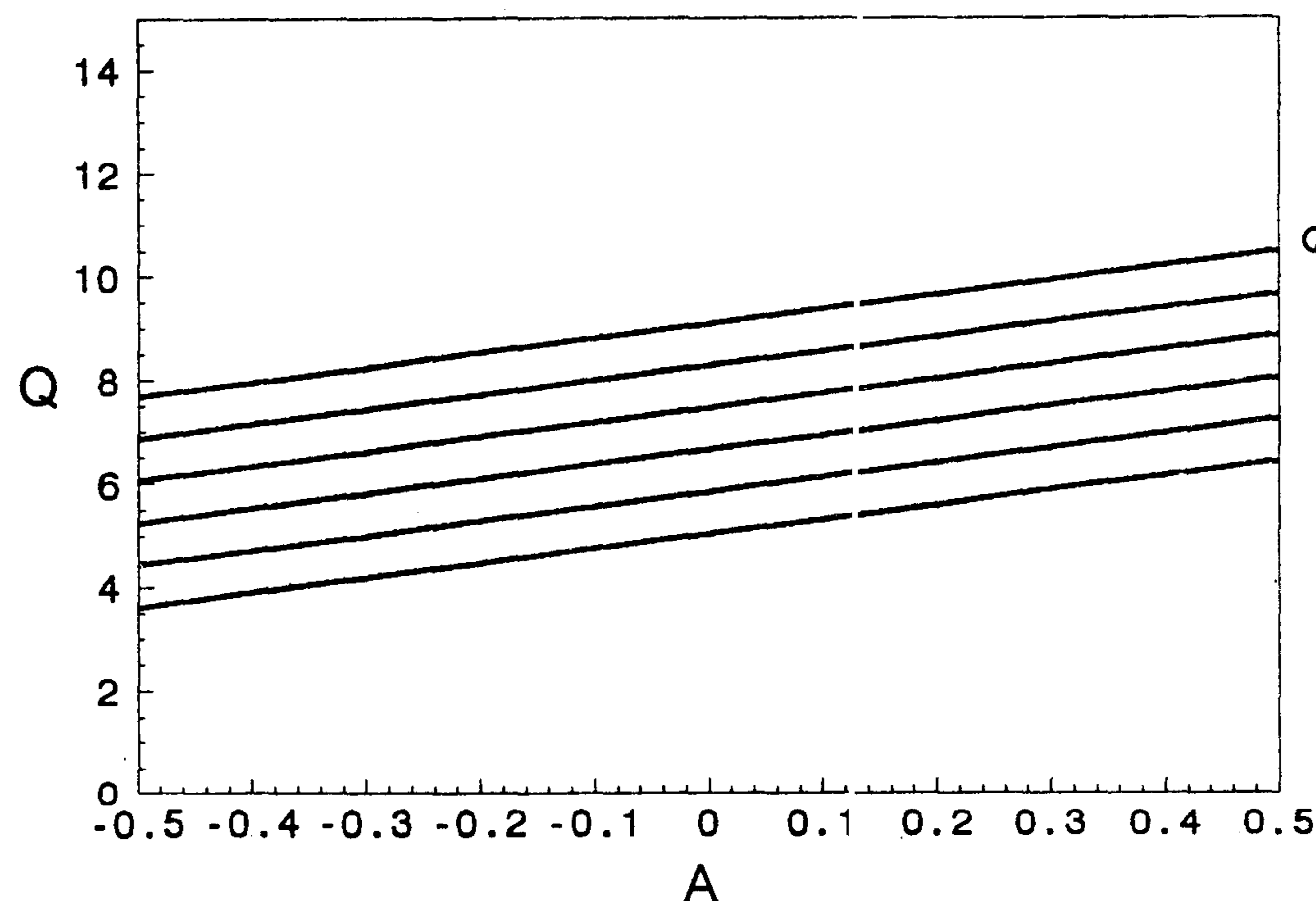


شکل ۵: بررسی اثر غیر ایزوتروپیک بودن جنس پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.

$$(A=0, Q^{\circ}=0, h_u=h_d=h_t, \alpha = 2W_t=0.02, W=0.1, r_t=0.35, r_b=0.25)$$



شکل ۶: بررسی اثر نایکنواختی دمای پایه پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.
 $(Q^{\circ}=0, \alpha=2, Bi_t=0, Bi_u=Bi_d, W_t=0.02, W=0.1, r_t=0.35, r_b=0.25)$



شکل ۷: بررسی اثر وجود چشمه حرارتی و نایکنواختی دمای پایه پره.
 $(\alpha=2, Bi_t=0, Bi_u=Bi_d, W_t=0.02, W=0.1, r_t=0.35, r_b=0.25)$

جزء تشکیل شده است. جزء اول حرارتی است که از پایه پره وارد پره می‌شود و جزء دوم همان حرارتی است که در داخل پره تولید می‌شود. اما در صورتی که $Q < Q^{\circ}$ باشد $\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}$ مثبت خواهد بود و این بدین معنی است که مقداری از حرارت تولیدی در پره از طریق پایه پره به داخل سطح اولیه نفوذ می‌کند.

در شکل (۸) مقادیر بحرانی در برخی حالات نشان داده شده است. اگر α از این مقدار بحرانی بزرگتر باشد، $Q > Q^{\circ}$ خواهد بود،

همچنین در شکل (۷) مشاهده می‌شود که وجود چشمه حرارتی نیز در رابطه خطی که بین Q و A وجود دارد خللی وارد نمی‌کند و همچنان این رابطه برقرار است.

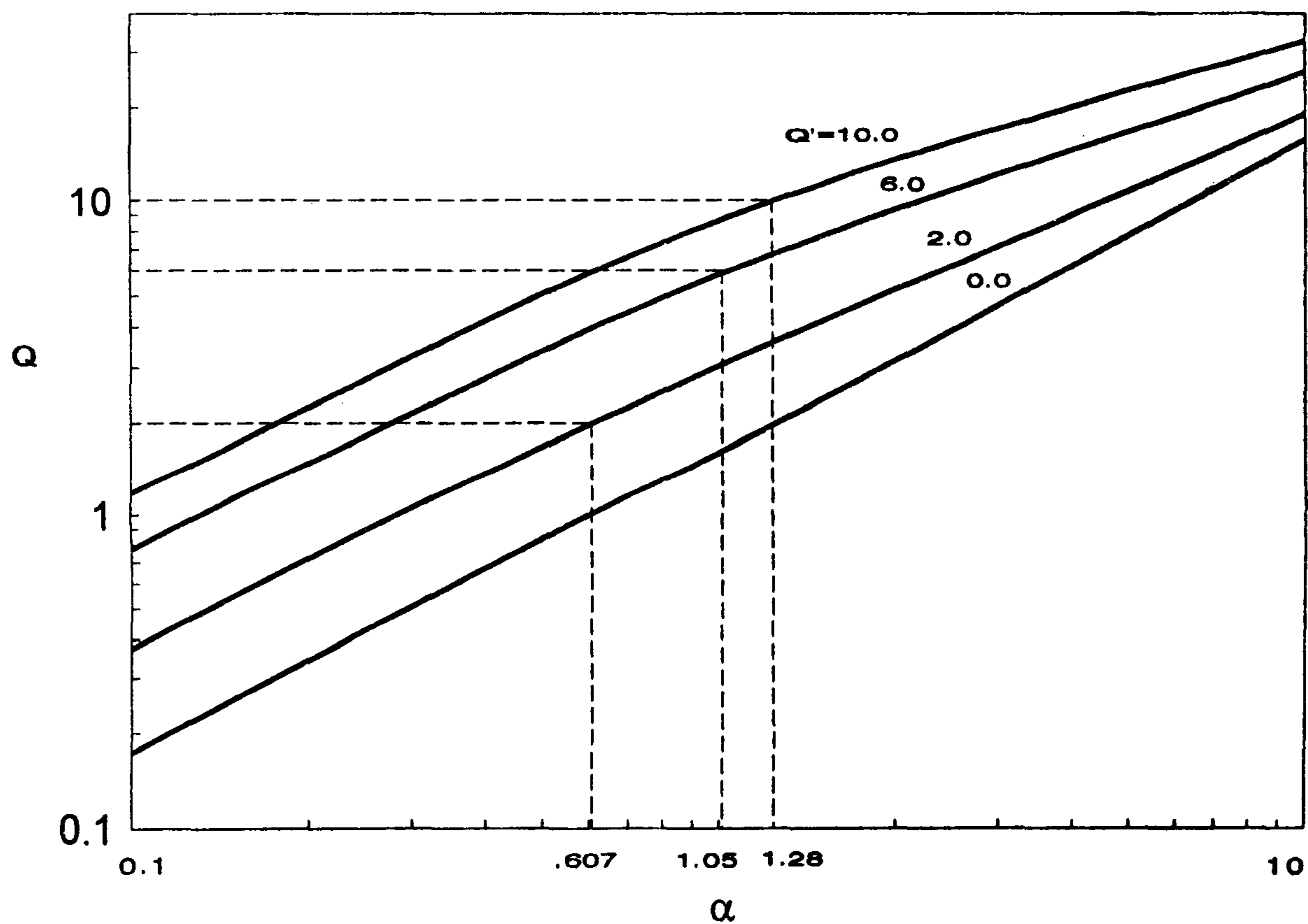
در صورتی که در پره چشمه حرارتی (Q°) وجود داشته باشد و $\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}$ منفی گردد مقدار حرارت انتقال یافته از پره بیشتر از حرارت تولیدی در داخل پره می‌باشد $Q > Q^{\circ}$ این بدین معنی است که در حالت دائم مقدار حرارتی که از پره خارج می‌شود از دو

برای بررسی اثرات شکل پروفیل پره بر روی انتقال حرارت با وزن معینی آزماده که برای ساخت پره بکار می‌رود چندین پره با پروفیل‌های متفاوت ایجاد می‌کنیم و نرخ انتقال حرارت در هر یک را بدست می‌آوریم. (در این پره ضخامت پایه و نوک را ثابت فرض می‌کنیم) توابعی که برای پروفیل پره در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از:

$$Z = a(r-b)^n \quad (n \text{ عدد صحیح است}) \quad (23)$$

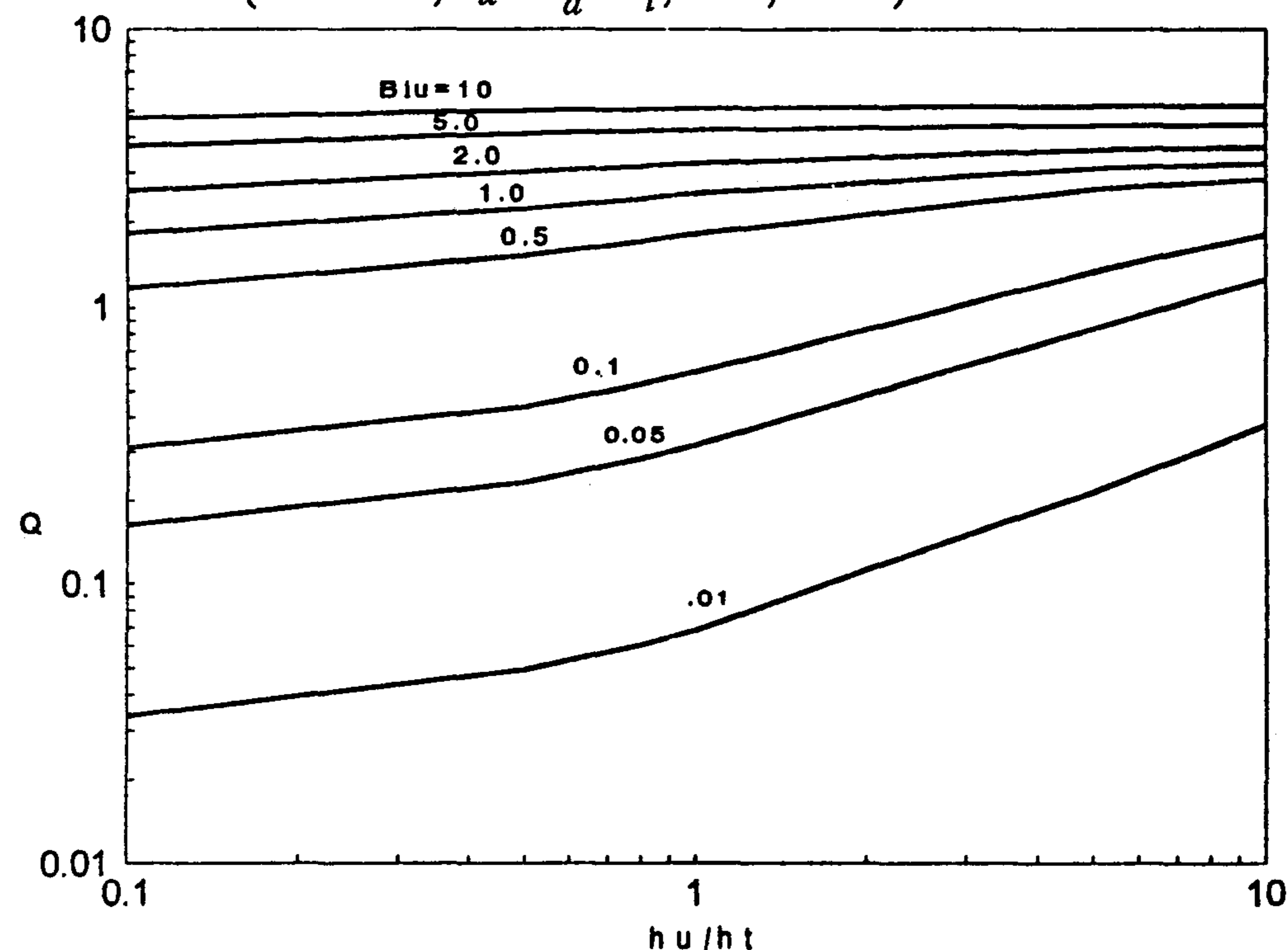
$$Z = a \cdot r^n + b \quad (n \text{ عدد اعشاری کوچکتر از ۱ است}) \quad (24)$$

اما اگر α از مقدار بحرانی کوچکتر باشد $Q < Q_c$ خواهد بود. به منظور بررسی اثر نایکنواختی ضرایب انتقال حرارت جابجائی در اطراف پره شکل (۹) ارائه شده است. همانطوری که مشاهده می‌شود در اعداد Bi کوچکتر از 0.1 با افزایش نسبت h_u/h_t مقدار حرارت انتقال یافته از پره افزایش می‌یابد، اما در اعداد Bi بزرگ سرعت افزایش حرارت انتقال یافته کاهش می‌یابد. چون در اعداد Bi بزرگ مقدار ضریب هدایتی کوچک است و این امر باعث می‌شود که مقدار حرارت کمی از طریق هدایت به سطح پره برسد. بنابراین در این حالت افزایش ضریب انتقال حرارت جابجائی نمی‌تواند تأثیر چندانی بر نرخ انتقال حرارت کلی از پره داشته باشد.



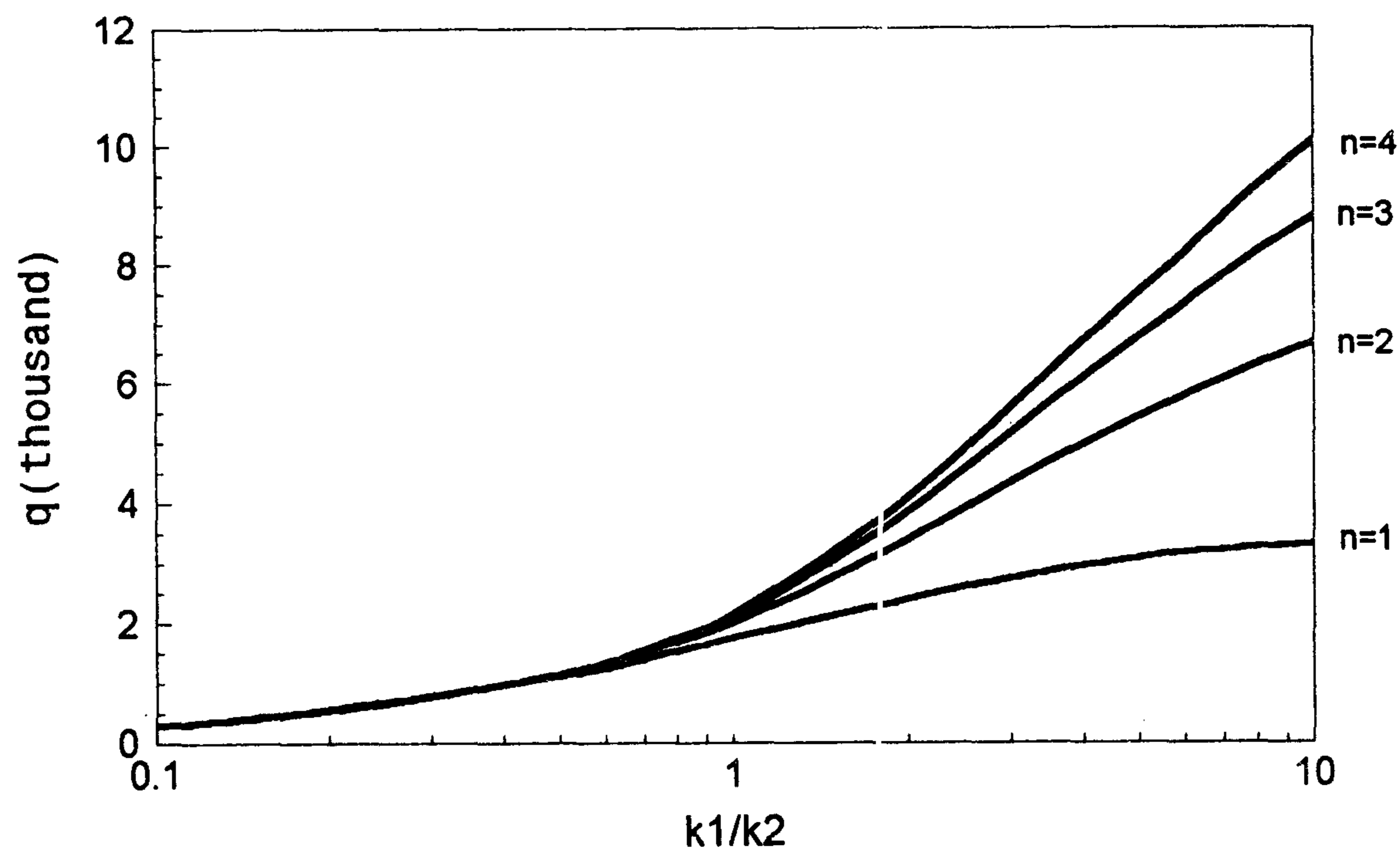
شکل ۸: بررسی اثر وجود چشمه حرارتی در پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.

$$(A = 0.23, h_u = h_d = h_t, k = 1, R \rightarrow \infty)$$

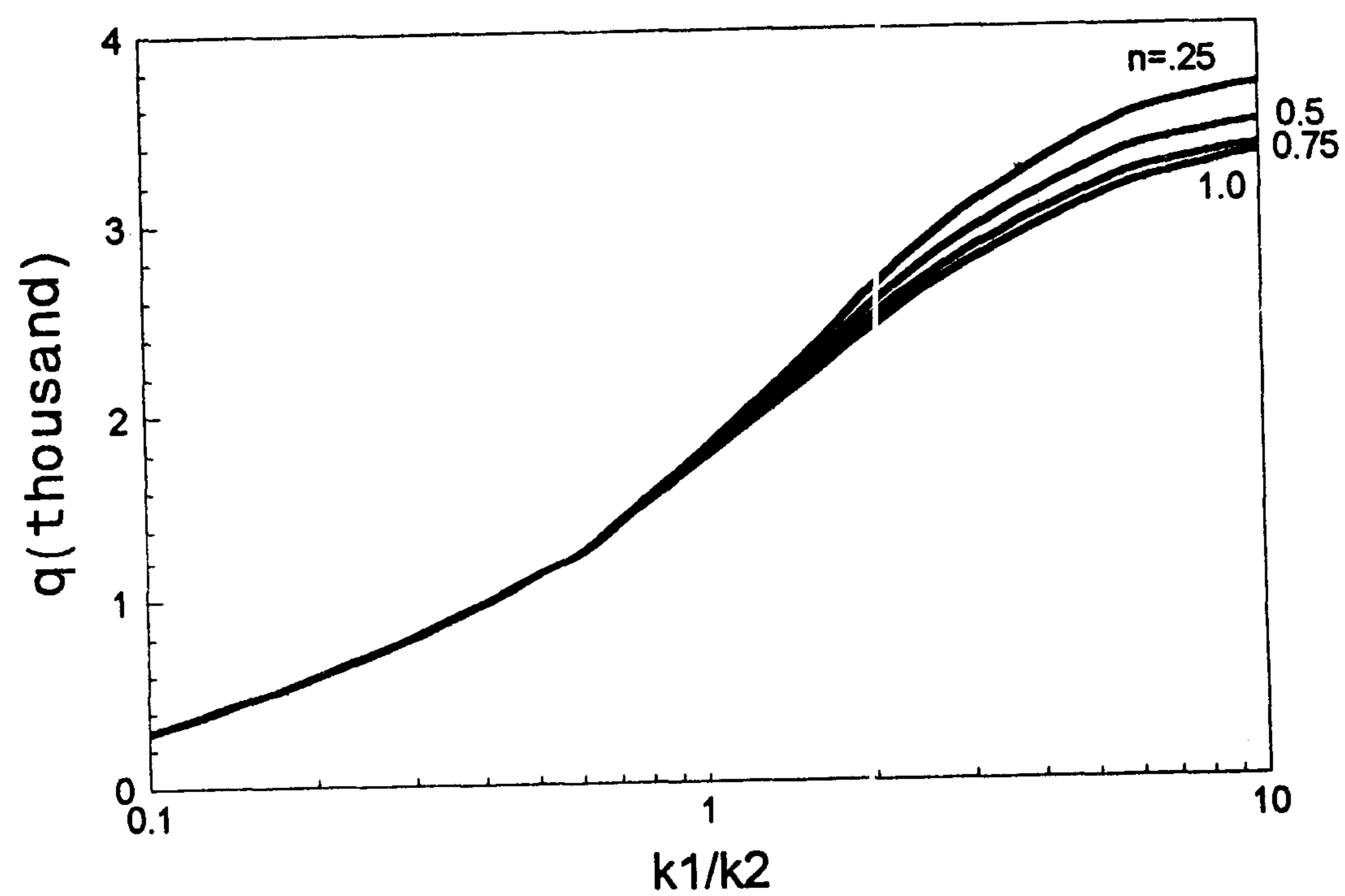


شکل ۹: بررسی اثر نایکنواختی ضرایب انتقال حرارت جابجائی در اطراف پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.

$$(\alpha = 1, A = 0, Q_c = 0, k = 1, R \rightarrow \infty)$$



شکل ۱۰: بررسی اثر شکل پروفیل پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.
 $(A=0, Q^*=0, W_t=0.02, W=0.2, r_t=0.2, r_b=0.1)$



شکل ۱۱: بررسی اثر شکل پروفیل پره بر روی میزان انتقال حرارت از پره.
 $(A=0, Q^*=0, W_t=0.02, W=0.2, r_t=0.2, r_b=0.1)$

حرارت نیز افزایش می‌یابد و این به دلیل افزایش سطح در تماس با محیط اطراف پره‌ها و در نتیجه افزایش انتقال حرارت جابجایی به محیط است.

در شکل (۱۱) پروفیل‌های با درجات ۰/۲۵ و ۰/۵ و ۰/۷۵ و ۱

پره‌هایی که در شکل (۱۰) بررسی شده‌اند از پروفیل‌های با درجات صحیح ۱ و ۲ و ۳ و ۴ تشکیل شده‌اند که در این پره‌ها نرخ انتقال حرارت از پره برای مقادیر مختلف k_1/k_2 مشخص شد، است و چنانکه ملاحظه می‌گردد با افزایش درجات پروفیل پره نرخ انتقال

پره مشاهده گردید که تغییر در این پارامتر در اعداد بیو بزرگ اثری بر روی انتقال حرارت نمی‌گذارد، اما در اعداد بیو کوچکتر از یک با افزایش نسبت h_{II} / h_I نرخ انتقال حرارت بصورت قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. در نهایت در حالتی که دمای پایه پره یکنواخت نباشد $T = T_b + a \cos(\pi z/w)$ با افزایش پارامتر $A = a / (T_b - T_\infty)$ مقدار انتقال حرارت بطور خطی افزایش می‌یابد که این مورد در اعداد بیو بزرگ قابل ملاحظه است اما در اعداد بیو کوچک چندان قابل توجه نیست.

ضمناً نتایج بدست آمده و برنامه کامپیوتری موجود می‌تواند بعنوان ابزاری برای بدست آوردن پروفیل بهینه پره در خدمت طراح قرار گیرد.

ضمیمه الف

اکنون نتایج مربوط به حل تحلیلی پره مستقیم و ایزوتروپیک ($K=1$)، بدون چشمه حرارتی، با دمای پایه یکنواخت و همچنین ضرایب انتقال حرارت جابجائی یکسان $h_{II} = h_I = h_d = h$ به شرح زیر ارائه می‌گردد. [۱]

$$\theta(x,y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \alpha_n \cos(\alpha_n Y)}{\alpha_n + \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \right\} \left\{ \frac{Bi \sinh[\alpha_n K(1-X)] + \alpha_n \cosh[\alpha_n K(1-X)]}{Bi \sinh(\alpha_n K) + \alpha_n \cosh(\alpha_n K)} \right\} \quad (الف-۱)$$

$$\frac{q}{K(T_b - T_\infty)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha_n}{\alpha_n + \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \right\} \left\{ \frac{Bi \cosh(\alpha_n K) + \alpha_n \sinh(\alpha_n K)}{Bi \sinh(\alpha_n K) + \alpha_n \cosh(\alpha_n K)} \right\} \quad (الف-۲)$$

همچنین در پره حلقوی با شرایط فوق خواهیم داشت:

$$\theta(R,Y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \alpha_n \cos \alpha_n Y}{\alpha_n + \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \right\} \left\{ \frac{K_0(\alpha_n \gamma R) [Bi I_0(\alpha_n \gamma) + \alpha_n I_1(\alpha_n \gamma)] - I_0(\alpha_n \gamma R) [Bi K_0(\alpha_n \gamma) - \alpha_n K_1(\alpha_n \gamma)]}{K_0(\alpha_n \gamma R_b) [Bi I_0(\alpha_n \gamma) + \alpha_n I_1(\alpha_n \gamma)] - I_0(\alpha_n \gamma R_b) [Bi K_0(\alpha_n \gamma) - \alpha_n K_1(\alpha_n \gamma)]} \right\} \quad (الف-۳)$$

$$\frac{q}{2K\pi r_b(T_b - T_\infty)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin^2 \alpha_n}{\alpha_n + \sin \alpha_n \cos \alpha_n} \right\} \left\{ \frac{K_1(\alpha_n \gamma R_b) [Bi I_0(\alpha_n \gamma) + \alpha_n I_1(\alpha_n \gamma)] + I_1(\alpha_n \gamma R_b) [Bi K_0(\alpha_n \gamma) - \alpha_n K_1(\alpha_n \gamma)]}{K_0(\alpha_n \gamma R_b) [Bi I_0(\alpha_n \gamma) + \alpha_n I_1(\alpha_n \gamma)] + I_0(\alpha_n \gamma R_b) [Bi K_0(\alpha_n \gamma) - \alpha_n K_1(\alpha_n \gamma)]} \right\} \quad (الف-۴)$$

بررسی شده‌اند که در این پره‌ها نیز هر قدر درجه پروفیل از یک کوچکتر شود نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد این امر نیز به دلیل افزایش سطح در تماس با محیط در پره‌ها می‌باشد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک پره حلقوی از جنس مواد ارتوتروپیک به وسیله یک مدل دو بعدی تحلیل گردید و در این راستا اثرات غیر ایزوتروپیک بودن جنس پره، نایکنواختی دمای پایه پره، تغییرات ضرایب انتقال حرارت جابجایی در اطراف پره و وجود چشمه حرارتی بر روی میزان انتقال حرارت از پره بررسی شد و نتایج آنها در نمودارهای بحث شده ارائه گردید که در بررسی رفتار حرارتی پره کمک شایانی می‌نماید. نکات برجسته موجود در نتایج بدست آمده را می‌توان بطور خلاصه به شرح زیر بیان نمود:

در بررسی اثرات غیر ایزوتروپیک بودن جنس پره مشاهده شد که در اعداد بیو بزرگ ($Bi_{II} > 1$) در اثر افزایش نسبت K نرخ انتقال حرارت Q بطور یکنواخت کاهش می‌یابد اما در اعداد بیو کوچک ($Bi_{II} < 1$) این کاهش تنها در مقادیر $K > 1$ قابل ملاحظه است. با بررسی اثر نایکنواختی ضرایب انتقال حرارت جابجائی در اطراف

که در روابط فوق K_1, K_0, I_1, I_0 توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم هستند و پارامترهای بدون بعد بکار رفته در این روابط بدین صورت تعریف می‌شوند:	h_t : ضریب انتقال حرارت جابجائی در نوک پره
	h_u : ضریب انتقال حرارت جابجائی در بالای پره
	k_1 : ضریب هدایت حرارتی در راستای طول پره
	k_2 : ضریب هدایت حرارتی در راستای عمود بر طول پره
	K : نسبت ضرایب هدایت حرارتی k_1/k_2
	L : طول پره $(r_t - r_b)$
	Q : مقدار حرارت انتقال یافته از پره به محیط اطراف
	Q° : انرژی بدون بعد تولیدی در داخل پره
	q° : تولید انرژی در داخل پره در واحد حجم
	r_b : شعاع داخلی پره
	r_t : شعاع خارجی پره
	r, z : متغیرهای سیستم مختصات استوانه‌ای
	T_b : دمای پایه پره
	T_{∞} : دمای محیط
	w_t : ضخامت نوک پره
	w : ضخامت پایه پره
	α : پارامتر مشخصه پره $(\frac{2L}{w})$
	θ : دمای بدون بعد
	ξ, η : متغیرهای سیستم مختصات منحنی الخط
	$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{(w/2)}, K = \frac{L}{w/2}, \gamma = \frac{r_t}{(w/2)}$
	$R = \frac{r}{r_t}, R_b = \frac{r_b}{r_t}, B_i = \frac{hw}{2k}$
	(۵الف)
	α_n ها مقادیر ویژه هستند که از رابطه زیر بدست می‌آیند:
	$\alpha_n \tan \alpha_n = Bi$
	(۶الف)

فهرست علائم

A :	دامنه تغییرات بدون بعد دمای پایه پره
a :	ماکزیمم انحراف دمای پایه پره از دمای T_b
Bi_d :	عدد بیو در پائین پره $h_d W / 2k_1$
Bi_t :	عدد بیو در نوک پره $h_t W / k_1$
Bi_u :	عدد بیو در بالای پره $h_u W / 2k_1$
h_d :	ضریب انتقال حرارت جابجائی در پائین پره

مراجع

- 1 - Aziz, A. (1993). "The effects of internal heat generation, anisotropy and base temperature nonuniformity on heat transfer from two dimensional rectangular fins." *Heat Transfer Engineering*, Vol. 14, No. 2.
- 2 - Friedman, H. A. and Mcforland, B. L. (1968). "Two-dimensional transient ablation and heat conduction analysis for multimaterial thrust chamber walls." *J. Spacecraft & Rockets*, Vol. 5, No. 7, PP.753-761.
- 3 - Hsu, K. Lee, S. L. (1991). "A numerical technique for two-dimensional grid generation with grid control at all of the boundaries." *J. Computational Physics* 96, PP. 451-469.
- 4 - Lau, W. and Tan, C. W. (1973). "Errors in one-dimensional heat transfer in analysis straight and annular fins." *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 95, PP.549-551.
- 5 - Look, D. C. Jr. (1988). "2-D fin performance : Bi (Top Surface), Bi (Bottom Surface)." *ASME. J. Heat Transfer*, Vol. 110, PP.780-782.
- 6 - Look, D. C. Jr. and Kang, H. S. (1991). "Effects of variation of root temperature on heat lost from a

-
- thermally non-symmetric fin." *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, PP.1059-1065.
- 7 - Ozisik, M. N. (1985). *Heat transfer-a basic approach*. P. 437. McGraw Hill, NewYork.
- 8 - Sfeir, A. A. (1976). "The heat balance integral in steady - state conduction." *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 98, PP.466-470.
- 9 - Steger, J. L. and Sorenson, R. L. (1979). *J. Computational Physics* 33, 405.
-

برگ تقاضای اشتراک نشریه

● نام و نام خانوادگی مشترک:

● نام موسسه یا شرکت:

● نشانی:

● تلفن:

● وضعیت اشتراک: جدید تجدید اشتراک

● مدت اشتراک: شش ماه یک سال

اصل فیش بانکی به مبلغ ریال پیوست می‌باشد.

آدرس: میدان انقلاب، دانشگاه تهران، نشریه دانشکده فنی،

صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵، تلفن ۶۱۱۳۲۱۱

بهای اشتراک

● یک ساله ۵۰۰۰ ریال

● شش ماهه ۲۵۰۰ ریال

وجه اشتراک را به حساب شماره

۴۰۰۵۰۵۵۸، بانک تجارت، شعبه

طالقانی غربی واریز نمایید.

نشریه دانشکده فنی

دانشگاه تهران

برگ تقاضای اشتراک مقالات تخصصی

● نام و نام خانوادگی مشترک:

● نام موسسه یا شرکت:

● نشانی:

● تلفن:

● رشته تخصصی مورد نظر:

اصل فیش بانکی به مبلغ ریال پیوست می‌باشد.

آدرس: میدان انقلاب، دانشگاه تهران، نشریه دانشکده فنی،

صندوق پستی ۴۵۶۳-۱۱۳۶۵، تلفن ۶۱۱۳۲۱۱

بهای اشتراک یک ساله

مقالات تخصصی

۲۵۰۰ ریال

وجه اشتراک را به حساب شماره

۴۰۰۵۰۵۵۸، بانک تجارت، شعبه

طالقانی غربی واریز نمایید.

نشریه دانشکده فنی

دانشگاه تهران