مجله علوم دانشگاه تهران
جلد سی‌ام (۱۳۸۳) شماره ۱ (۱۳۱-۱۱۱)

روشی نو برای تقریباً حل پذیری حاصلضرب گروههای تقریباً مرکزی

محمدرضا رجب زاده مقدم
دانشکده علوم ریاضی – دانشگاه فردوسی مشهد
(دریافت: ۸۱/۱۱/۱۴ ؛ پذیرش:۸۲/۵/۲۷)

چکیده

فرض کنید $G = AB$ حاصلضرب دو گروه A و B باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر A و B دو گروه تقریبا مرکزی باشند، آنگاه G تقریباً حل پذیر است. یادآور می‌شود که در سال ۱۹۸۱ ، چرنیکف (Cernikov) در مقاله ای بسیار فشرده اثباتی برای آن آورده است، ولی اثباتی که ما در اینجا ارائه میدهیم با آنچه که وی بیان کرده کاملاً متفاوت و قابل استفاده برای عموم علاقه مندان خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: *حاصلضرب گروهها، گروههای تقریبا مرکزی، گروههای تجزیه شدنی، گروههای تقریبا حل پذیر.*

مقدمه

فرض کنید G گروهی دلخواه و A و B دو زیرگروه از آن باشند، به طوری که $G = AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ در این صورت G را حاصلضرب دو زیر گروه A و B نامیم. یا به عبارتی دیگر G گروهی تجزیه شدنی است. مساله ای که توجه تعداد زیادی از ریاضی دانان را در چند دهه اخیر به خود جلب کرده ، بدین صورت است: «چگونه ساختار زیر گروههای A و B به ساختار گروه حاصلضرب $G = AB$ تاثیر گذار است؟»

تنها نتیجه جامعی که تاکنون شناخته شده است به ایتو (۱۹۹۵) منتسب است. در واقع وی نشان داده است که : اگر A و B دو زیرگروه آبلی باشند، آنگاه $G = AB$ گروهی دو آبلی است (یعنی G حل پذیر و از طول مشتق ۲ می‌باشد). البته در حالت گروههای متناهی، کگل در سال ۱۹۶۱ ثابت کرده است که: اگر A و B دو زیرگروه پوچتوان باشند، آنگاه $G = AB$ حل پذیر است. در اوایل دهه ۱۹۸۰ چرنیکف با ضعیف کردن مفروضات، قضیهٔ ایتو را تعمیم داده است. وی نتیجه خود را در مقاله ای بسیار فشرده اعلام کرده که اثباتش حتی برای متخصصین نیز مشکل است. ما در این مقاله سعی داریم اثباتی جامع و کاملاً متفاوت از روش چرنیکف ارائه کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر از موضوع گروههای تجزیه شدنی، خواننده را به مراجع فهرست شده در آخر مقاله ارجاع می‌دهیم. مسالهٔ باز دیگری که در مورد گروههای تجزیه شدنی مطرح می‌باشد، پاسخ به این سوال است که: «چه گروههایی را می‌توان به صورت حاصلضرب دو زیرگروه سره خود تجزیه کرد؟»

مطالعات و تحقیقات نسبتاً گسترده‌ای در مورد این سوال به ویژه تجزیه‌پذیری گروههای متناهی انجام شده است. به عنوان مثال اگر G گروهی نامتناهی باشد که تمام زیرگروههای سره آن متناهی است، آنگاه: G تجزیه ناپذیر است. همچنین گروههای دوری از مرتبهٔ عدد اول، تارسکی p– گروهها و بعضی از گروههای ساده پراکنده هیچ تجزیهٔ سره‌ای ندارند. درحالی که برخی دیگر از گروههای ساده پراکنده دارای تجزیهٔ سره هستند: به عنوان نمونه می‌توان به گروههای ساده ماتیو اشاره نمود. $M_{12} = M_{11}M_{11}$ و $M_{23} = F_{23}^{11}M_{22}$، که درآن F_{23}^{11} گروه فرابینیوس با هستهٔ یکریخت با $\mathbb{Z}_{23}$ و متم یکریخت با $\mathbb{Z}_{11}$ است.

به ویژه درفشه (Darafsheh, 2004) ساختار گروههایی را مورد بررسی قرار داده است که حاصلضرب گروهی متناوب در یک گروه متقارن است. همچنین درسال۱۹۹۲, والز گروههای تجزیه پذیر $G = AB$ را مشخص کرده است، که درآن A گروهی ساده و B تقریباً ساده می‌باشد.

نمادگذاری و نتایج مقدماتی

فرض کنید G گروهی دلخواه باشد و $x, y \in G$ دراین صورت: $x^y = y^{-1}xy$ و $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ به ترتیب مزدوج x به وسیلهٔ y و تعویضگر x و y نامیده می‌شوند. تعویضگرهای از وزن بالاتر به وسیلهٔ استقرا تعریف می‌شوند.

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ ، آنگاه: $[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n]$ تعویضگر از وزن nاست. اگر H و K دو زیرگروه از G باشند، آنگاه:

$$[H, K] = <[h, k] \mid h \in H,\ k \in K>$$

زیرگروه تعویضگر H و K نامیده می‌شود. در حالت خاص $G' = [G, G]$ زیرگروه مشتق G است. اگر G' را با $\gamma_2(G)$ نشان دهیم، آنگه سری مرکزی پایینی به روش استقرار و به صورت زیر تعریف می‌شود. $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$, $n \geq 1$ در نتیجه سری مرکزی پایینی گروه G به صورت زیر خواهد بود:

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) = G' \supseteq \gamma_3(G) \supseteq \dots \supseteq \gamma_n(G) \supseteq \dots$$

همچنین سری مشتق گروه G بدین صورت تعریف می‌شود.

$$G \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq G^{(3)} \supseteq \dots \supseteq G^{(n)}, \supseteq \dots$$

که در آن $G^{(n+1)} = (G^{(n)})' = [G^{(n)}, G^{(n)}]$. گروه G را پوچتوان (حل پذیر) نامند.

هرگاه به ترتیب سری مرکزی پایینی (سری مشتق) آن موجود و متناهی باشد. اگر $G'' = 1$ آنگاه G را دوآبلی نامیم. گروه G تقریبا مرکزی نامیده می‌شود، اگر اندیس مرکز، $Z(G)$ در G متناهی باشد؛ یعنی: $[G : Z(G)] < \infty$.

گروه G را تقریباً حل پذیر نامیم، اگر G دارای زیرگروهی نرمال و حل پذیر مانند N باشد به طوری که گروه خارج قسمت G/N متناهی است. فرض کنید K زیرگروهی از G باشد (که آن را با $K \leq G$ نشان می‌دهیم)، در این صورت $<K>^G$ بستار نرمال K در G نامیده می‌شود. اگر A و S دو زیرگروه از G باشند، به طوری که $A \subseteq S$، آنگاه S را فوق گروه A نامیم. فرض کنید A ، B و S سه زیرگروه از G باشند به طوری که $A \subseteq S$ ، دراین صورت: $S \cap AB = A(S \cap B) = (S \cap B)A,$ که به عنوان قانون ددکیند معروف است (رابینسون (۱۹۹۶) را ملاحظه کنید). نتایج زیر برای محاسبه با تعویضگرها کاربرد زیادی خواهند داشت.

لم ۱.۲ فرض کنید G گروهی دلخواه و $x, y, z \in G$. در این صورت

(الف) $x^y = x[x, y]$ ؛

(ب) $[x, y] = [y, x]^{-1}$ ؛

(ج) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$؛

(د) $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}}$; $[x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$؛

(ه) $[x, y] = 1 \Leftrightarrow xy = yx \Leftrightarrow x^y = x$؛

(و) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$؛

(ز) $[x, yx] = [x, z][x, y]^z$

اثبات. به کمک تعریف تعویضگر به آسانی تحقیق می‌شوند.

حاصلضرب گروههای تجزیه شدنی

در این بخش به معرفی گروههای تجزیه شدنی می‌پردازیم و بعضی از خواص آنها را که در فصولی آتی بدانها نیاز است مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. جهت کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به کتاب آمبرگ, فرانسیسو و جیووانی (۱۹۹۲) رجوع نمود.

تعریف ۱.۳ فرض کنید $G = AB$ حاصلضرب دو زیرگروه A و B باشد. در این صورت زیر مجموعهٔ S از G تجزیه‌شدنی نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $ab \in S$، که $a \in A$ و $b \in B$ نتیجه دهد $a \in S$.

لم ۲.۳. فرض کنید $G = AB$ و S زیرگروهی از G باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

(الف) S تجزیه‌شدنی است؛

(ب) $S = (A \cap S)(B \cap S)$، که $A \cap B \subseteq S$.

اثبات. **(الف)** $\Leftarrow$ (ب). بنابر فرض، S تجزیه‌شدنی است و از این رو اگر $ab \in S$، آنگاه: $a \in S$. چون S زیرگروه است، $ab = s$ ایجاب می‌کند $b = a^{-1}s \in S$ ؛ یعنی: $ab \in (A \cap S)(B \cap S)$. لذا $S \subseteq (A \cap S)(B \cap S)$ و در نتیجه: $S = (A \cap S)(B \cap S)$. حال فرض کنید: $x \in A \cap B$. ملاحظه می‌شود که $1 = xx^{-1}$ ولی چون S تجزیه‌شدنی است، در نتیجه $x \in S$. بنابراین: $A \cap B \subseteq S$.

(**ب**) $\Leftarrow$ (آ). فرض کنید $s = ab \in S$، که $a \in A$ و $b \in B$. بنابر فرض $s = a_1b_1$، که $a_1 \in A \cap S$ و $b_1 \in B \cap S$، یعنی $ab = a_1b_1$. از این رو $a_1^{-1}a = b_1b^{-1} = x \in A \cap B \subseteq S$، در نتیجه: $a = a_1x \in S$،که بنابر تعریف ۱.۳، که تجزیه‌شدنی است.

نتیجه ۳.۳. هر فوق گروه از A یا B در $G = AB$ تجزیه‌شدنی است.

اثبات: فرض کنید مثلاً S زیرگروهی از $G = AB$ باشد به طوری که $A \subseteq S$. در این صورت بنابر قانون ددکیند، $S = A \cap AB = A(B \cap S)$ از این رو S تجزیه شدنی است.

تبصره: فرض کنید S زیرگروهی از $G = AB$ باشد که $A \cap B \subseteq S$، و قرار دهید $Y = Y(S) = (A \cap S)(B \cap S)$، که زیر مجموعه‌ای از G است. اگر Y زیر گروه G باشد، آنگاه: Y بزرگترین زیرگروه تجزیه شدنی از $G = AB$است، که $Y \subseteq S$؛ زیرا اگر Z زیرگروهی تجزیه شدنی از G باشد، که $Y \subseteq Z \subseteq S$؛ آنگاه $Z = (A \cap Z)(B \cap Z)$. بنابراین $S \subseteq (A \cap S)(B \cap S) = Y$. درنتیجه: $Z = Y$.

لم ۴.۳. فرض کنید $G = AB$ حاصلضرب دو زیرگروه A و B باشد. در این صورت

(**الف**) اشتراک و اجتماع هر تعداد از زیرمجموعه‌های تجزیه شدنی G، تجزیه شدنی است.

(**ب**) فرض کنید $N \lhd G$ و S/N زیر مجموعه‌ای تجزیه شدنی از G/N باشد، در این صورت S نیز زیرمجموعه‌ای تجزیه شدنی از $G = AB$است.

(**ج**) حاصلضرب دو زیرگروه تجزیه شدنی M و N از G تجزیه شدنی است، به شرط آنکه:

$$MN = NM \quad \text{و} \quad M(B \cap N) = (B \cap N)M$$

اثبات. (**الف**) فرض کنید S_i $(i \in I)$ زیر مجموعه‌های تجزیه شدنی از G باشند و $ab \in \bigcap_{i \in I} S_i = S$ ، که $a \in A$ و $b \in B$. در این صورت به ازای هر i، $ab \in S_i$ و از این رو به ازای هر $i \in I$، $a \in S_i$ در نتیجه $a \in S$؛ یعنی: S تجزیه شدنی است.

حال اگر $ab \in \bigcup_{i \in I} S_i = V$، که $a \in A$ و $b \in B$. آنگاه: به ازای $i \in I$ ای، $ab \in S_i$ و از این رو چون S_i تجزیه شدنی است، در نتیجه $a \in S_i$، و لذا $a \in V$. بنابراین: V تجزیه‌شدنی است.

(**ب**) فرض کنید $N \lhd G$ و S/N زیر مجموعه‌ای تجزیه شدنی از: $\frac{G}{N} = \frac{AB}{N} = (\frac{AN}{N})(\frac{BN}{N})$ باشد. اگر $ab \in S$ که $a \in A$ و $b \in b$، آنگاه: $abN = (aN)(bN) \in \frac{S}{N}$ بنابر تعریف $aN \in S/N$، که از آنجا $a \in S$؛ یعنی S تجزیه‌پشدنی است.

(**ج**) فرض کنید M و N دو زیرگروه تجزیه شدنی از $G = AB$ باشد. بنابر لم ۲.۳.:

$$M = (A \bigcap M)(B \bigcap M), \quad A \bigcap B \subseteq M$$
$$N = (A \bigcap N)(B \bigcap N), \quad A \bigcap B \subseteq N$$

واضح است که $A \bigcap B \subseteq MN$. بعلاوه:

$$\begin{aligned} MN &= (A \bigcap M)(B \bigcap M)N = (A \bigcap M)N(B \bigcap M) \\ &= (A \bigcap M).(A \bigcap N)(B \bigcap N).(B \bigcap M) \subseteq (A \bigcap MN)(B \bigcap MN) \end{aligned}$$

شمولیت در جهت دیگر به وضوح دیده می‌شود. بنابراین داریم:

$$MN = (A \bigcap MN)(B \bigcap MN)$$

لم ۵.۳. اگر S زیر گروهی تجزیه شدنی از گروه $G = AB$ باشد، آنگاه $S = AS \bigcap BS$.

اثبات. واضح است که $S \subseteq AS \bigcap BS$. فرض کنید $x \in AS \bigcap BS$، در این صورت $x = as = bt$، که $a \in A$، $b \in B$ و $s,t \in S$. حال داریم: $a^{-1}b = st^{-1} \in S$، که از آنجا: $a^{-1}, a^{-1} \in S$، درنتیجه: $x = ax \in S$. یعنی $AS \bigcap BS \subseteq S$ ولذا: $S = AS \bigcap BS$.

تعریف ۶.۳. فرض کنید N زیر گروهی از $G = AB$ باشد به قسمی که $NA = AN$ و $NB = BN$. دراین صورت کوچکترین زیرگروه تجزیه شدنی از G را که شامل N باشد تجزیه‌گر N در G نامند، که آن را با $X(N)$ نشان می‌دهیم. به وضوح دیده می‌شود که $X(N) = \bigcap U$، که در آن U روی زیرگروههای تجزیه شدنی G تغییر می‌کند و $N \subseteq U$.

قضیه ۷.۳. فرض کنید N زیرگروهی تجزیه شدنی از گروه $G = AB$ باشد، به طوری که $NA = AN$ و $NB = BN$ دراین صورت $X = X(N) = NA^* = NB^* = A^*B^*$ که درآن: $A^* = A \cap BN$ و $B^* = B \cap AN$.

اثبات. با استفاده از لم ۵.۳، $X(N)AN\cap BN$. همچنین بنابر قانون ددکیند:

$$X(N)=N(A\cap BN)=AN\cap BN=N(B\cap AN).$$

از طرفی واضح است که $(A\cap BN)(B\cap AN)\subseteq AN\cap BN.$ بعکس، فرض کنید $x\in X$ که $x=ab$، که در آن $a\in A$ و $b\in B$. در این صورت:

$$a=xb^{-1}\in A\bigcap BN, b=a^{-1}x\in B\bigcap AN,$$

یعنی $N\subseteq(A\bigcap BN)(B\bigcap AN)$ از این رو

$$AN\bigcap BN=N((B\bigcap AN)\subseteq(A\bigcap BN)(B\bigcap AN).(B\bigcap AN)$$
$$=(A\bigcap BN)(B\bigcap AN)$$

بنابراین تساوی برقرار است.

نتیجه ۸.۳. فرض کنید N زیرگروهی نرمال و تجزیه شدنی از گروه $G=AB$ باشد. دراین صورت:

(الف) $\frac{G}{N}=(\frac{AN}{N})(\frac{BN}{N})$ با شرط $\frac{AN}{N}\bigcap\frac{BN}{N}=<\bar{1}>$

(ب) اگر زیر گروه A یا B در G نرمال باشد، آنگاه $X=X(N)$ نیز در G نرمال است.

اثبات. (الف) بنابر لم ۵.۳، $N=AN\bigcap BN$ و از این رو:

$$\frac{AN}{A}\bigcap\frac{BN}{N}=\frac{AN\bigcap BN}{N}=\frac{N}{N}=<\bar{1}>.$$

(ب) بنابر قضیهٔ ۷.۳، $X=X(N)=N(A\bigcap BN)=N(B(B\bigcap AN)$

چون N در G نرمال است، داریم:

$$\frac{X}{N}=\frac{N(A\bigcap BN)}{N}=\frac{N(B\bigcap AN)}{N},$$

که در $G/N=(AN/N)(BN/N)$ نرمال است . در نتیجه $X\lhd G$.

قضیه ۹.۳. فرض کنید N زیرگروهی نرمال و تجزیه شدنی از گروه $G=AB$ باشد و $X=X(N)$ در این صورت:

(الف) اگر $N\subseteq M\lhd X$، آنگاه $X(M)=X$؛

(ب) اگر $H\lhd X$، آنگاه $X(\frac{NH}{H})=\frac{X}{H}$

اثبات. بنابر قضیهٔ ۷.۳، $X=X(N)=AN\bigcap BN=NA^{*}=NB^{*}=A^{*}B^{*}$ ،

که درآن $A^* = A\bigcap BN$ و $B^* = B\bigcap AN$. فرض کنید $X^* = X(M)$، دراین صورت:

$$A^*\bigcap B^* = A\bigcap BN\bigcap AN\bigcap B = A\bigcap B$$

$$A\ \bigcap X^* = A\bigcap(A^*M\bigcap B^*N)\subseteq A\bigcap A^*M = A^*(A\bigcap M)$$

$$\subseteq A^*(A\bigcap X) = A^*(A\bigcap A^*\ N) = A^*(A\bigcap N)\subseteq A^*$$

در نتیجه $A\bigcap X^* = A^*\bigcap X^* = A^*$ و از این رو داریم:

(**ب**) فرض کنید: $\bar{H}\lhd X$,$\bar{X} = X/H$,$\overline{A}^* = A^*H/H$ و $\overline{B}^* = B^*H/H$. در این صورت $\bar{A} = \dfrac{A^*B^*}{H} = (\dfrac{A^*H}{H})(\dfrac{B^*H}{H}) = \overline{A}^*\overline{B}^*$. واضح است که: $\bar{N} = NH/H\lhd\bar{X}$.

از این رو تجزیه گر $\bar{N}$ در $\bar{X} = \overline{A}^*\overline{B}^*$ به صورت زیر است.

$$X(\bar{N}) = \overline{A}^*\ \bar{N}\bigcap\overline{B}^*\ \bar{N} = (\frac{A^*H}{H})(\frac{NH}{H})\bigcap(\frac{B^*H}{H})(\frac{NH}{H})$$

$$= \frac{A^*NH}{H}\bigcap\frac{B^*NH}{H} = \frac{A^*NH\bigcap B^*NH}{H} = \frac{X}{H}.$$

حاصلضرب گروههای تقریبا مرکزی

در این بخش سعی می‌کنیم به منظور کوتاه کردن اثبات قضیه اصلی و همچنین روشن نمودن مطلب، نخست به بیان و اثبات چند لم به پردازیم. نهایتا اثباتی جامع و کاملا متفاوت از آنچه که چرنیکف درسال ۱۹۸۱ بیان داشته، ارائه می‌دهیم.

ایتو درسال ۱۹۵۵ ، قضیه‌ای جامع دربارهٔ حاصلضرب گروههای تجزیه شدنی اثبات کرده است، که در اینجا ما به ارائه صورت آن اکتفا می‌کنیم و خوانندگان علاقه مند را به صفحهٔ ۶۷۵ کتاب هوپرت(۱۹۶۷) ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱.۴ (ایتو، ۱۹۵۵). فرض کنید گروه $G = AB$ حاصلضرب دو زیرگروه آبلی A و B باشد. دراین صورت G دو آبلی است، یعنی $G'' =<1>$.

لم ۲.۴ فرض کنید. $G = \bigcup_{i=1}^{n} S_i g_i$، که S_i ها زیرگروههای G هستند (S_i ها لزوما جدا از هم نیستند). در این صورت حداقل یک S_i از اندیس متناهی در G موجود است.

اثبات. فرض کنید تعداد m زیر گروه جدا از هم $S_1,...,S_m$ وجود داشته باشد. در این صورت به روش استقرا روی m عمل می‌کنیم. اگر $m=1$ آنگاه $G=\bigcup_{i=1}^{n} S_1 g_i$. به وضوح دیده می‌شود که $[G:S_1]<\infty$.

حال فرض کنید $m>1$ و حکم به ازای m برقرار باشد. بدون اینکه به کلیت خللی وارد آید، فرض می‌کنیم تعداد همرده‌های جد از هم که برابرند با $m+1$، به صورت زیر باشند.

$$S_n \neq S_1,S_2,...,S_m,S_{m+1}=...=S_n$$

حال چنانچه $G=\bigcup_{i=m+1}^{n} S_n g_i$، آنگاه $[G:S_n]<\infty$ و درنتیجه حکم برقرار است. در غیر این صورت $x\in G$ ای وجود دارد به قسمی که $x\notin \bigcup_{i=m+1}^{n} S_n g_i$. از این رو به ازای چنین x ایی داریم $(S_n x)\bigcap(\bigcup_{i=m+1}^{n} S_n g_i)=\phi,$ در نتیجه $S_n x\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_n g_i$ و لذا به ازای هر $m+1\leq j\leq n$.

$$S_n g_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_i g_i x^{-1} g_j \qquad (۱)$$

این ایجاب می‌کند که گروه G اجتماع جدا از هم تعداد متناهی از همرده‌های راست $S_1,S_2,...,S_m$ است. از (۱) نتیجه می‌شود که تعداد همرده‌های جدا از هم m تاست. بنابر فرض استقراء، حداقل یک زیر گروه از اندیس متناهی در G وجود دارد.

لم ۳.۴ فرض کنید $G=AB$، $A^*\subseteq A$ و $B^*\subseteq B$ به قسمی باشند که $[A:A^*]<\infty$ و $[B:B^*]<\infty$. دراین صورت زیرگروه $S=<A^*,B^*>$ دارای اندیس متناهی در G است.

اثبات. چون A^* و B^* به ترتیب دارای اندیسهای متناهی در A و B هستند، می‌توان نوشت:

$$A=\bigcup_{i=1}^{m} a_i A^* \qquad , \qquad \mathrm{B}=\bigcup_{j=1}^{\mathrm{n}} B^* b_j$$

از این رو:

$$G=AB=\bigcup_{i,j} a_i A^* B^* b_i=\bigcup_{i,j} a_i S b_j=\bigcup k_{ij}(b_j^{-1} S b_j),$$

که در آن $k_{ij}=a_i b_j$، $1\leq i\leq m$ و $1\leq j\leq n$. بنابراین ملاحظه می‌شود که G اجتماع تعداد متناهی از همرده‌های مزدوج S^{b_j} است. بنابر لم ۲.۴، یک S^{b_j} دارای اندیس متناهی در Gاست و در نتیجه S دارای اندیس متناهی در G خواهد بود.

لم ۴.۴ فرض کنید $G = AB$ و $a,\ a_1 \in Z(A)$ و $b,\ b_1 \in Z(B)$ به قسمی باشند که $b^{a^{-1}} = a_1b_1$. در این صورت به ازای هر $b^* \in B$، تعویضگرهای $[a,b]^{b^*}$ و $[a,b]$ تعویض پذیرند.

اثبات. قرار دهید $a^{b^*} = b_2a_2$، $a_2^b = b_3a_3$ که $a_2, a_3 \in A$ و $b_2, b_3 \in B$. به آسانی دیده می‌شود که $(b_2a_2)^{-1} = b^{*-1}a^{-1}b^*$ و چون $a_1 \in Z(A)$ می‌توان نوشت: $b = (b^{a^{-1}})^a = (a_1b_1)^a = a_1b_1^a$. در این صورت با استفاده از نمادگذاری فوق، رابطه زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
[a,b]^{b^*[a,b]} &= (b^{*-1}(a^{-1}b^{-1}ab)b^*)^{[a,b]}\\
&= (b^{*-1}a^{-1}b^*.b^{*-1}b^{-1}abb^*)^{[a,b]}\\
&= (b^{*-1}a^{-1}b^*.b^{-1}b^{*-1}ab^*b)^{[a,b]} \qquad (\text{چون } b \in Z(B))\\
&= ((b_2a_2)^{-1}.b^{-1}.b_2a_2.b)^{[a,b]}\\
&= (a_2^{-1}b_2^{-1}.b^{-1}b_2a_2b)^{[a,b]} = [a_2,b]^{[a,b]}\\
&= [a_2,b_1]^{b^{-1}ab} = [a_2^{b^{-1}},b_1]^{ab} = [b_3a_3,b_1]^{ab}\\
&= [a_3,b_1]^{ab} = [a_3,b_1^a]^b = [a_3,a_1^{-1}b]^b\\
&= [a_3,b]^b = [a_3^b,b] = [b_3^{-1}a_2,b] = [a_2,b]\\
&= [b_2a_2,b] = [a^{b^*},b] = [a,b]^{b^*}
\end{aligned}
$$

از این رو بنا بر لم ۱.۲ (ه) ملاحظه می‌شود که $[a,b]$ و $[a,b]^{b^*}$ تعویض پذیرند.

لم زیر در قضیهٔ اصلی به کار گرفته خواهد شد.

لم ۴.۵ فرض کنید (t_{ij}) که $1 \le i,j \le \infty$ ماتریسی نامتناهی باشد، که در آن $t_{ij} \in \{1,2,\dots,n\}$. در این صورت اندیسهای i_1، i_2، j_1 و j_2 با شرایط $i_1 \neq i_2$ و $j_1 \neq j_2$ وجود دارند به قسمی که $t_{i_1j_1} = t_{i_2j_1} = t_{i_2j_2} = t_{i_1j_2}$.

اثبات. واضح است که در ماتریسی نامتناهی با تعداد متناهی از درایه ها، همواره می‌توان درایه ها را طوری اختیار کرد که شرایط فوق برقرار باشند.

لم زیر و نتیجه آن کمک قابل توجهی به اثبات قضیهٔ اصلی نموده و اثبات آن را کوتاهتر می‌کند.

لم ۶.۴ فرض کنید $G = AB$ حاصلضرب دو زیرگروه نامتناهی A و B باشد و $A_\cdot \le Z(A)$ و $B_\cdot \le Z(B)$ به طوری که $[A:A_\cdot] < \infty$ و $[B:B_\cdot] < \infty$. در این

صورت عناصر نابدیهی $a \in A_\circ$ و $b \in B_\circ$ وجود دارند به قسمی‌که به ازای $a_\circ \in A_\circ$ و
$b^{a^{-1}} = a_\circ b_\circ \ldots b_\circ \in B_\circ$

اثبات. اگر $A_\circ \bigcap B_\circ \neq <1>$، آنگاه $1 \neq a \in A_\circ \bigcap B_\circ$ وجود دارد به قسمی‌که به ازای هر $b_\circ \in B_\circ$، $b^{a^{-1}} = aba^{-1} = b$، زیرا $a \in A_\circ \bigcap B_\circ \subseteq Z(A) \bigcap Z(B)$.
ازاین رو فرض کنید $A_\circ \bigcap B_\circ = <1>$. به آسانی ملاحظه می‌شود که $A_\circ$ (به همین نحو $B_\circ$) نامتناهی است، زیرا در غیر این صورت چون $A / A_\circ$ گروهی است متناهی، در نتیجه A نیز متناهی خواهد شد که خلاف فرض است.

فرض کنید $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$، $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ و $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_\circ \bar{b}_i$ ، $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_\circ \bar{a}_i$
که در آن $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ و $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$ به ترتیب دستگاه نمایش $A_\circ$ در A و $B_\circ$ در B هستند. می‌نویسیم $b_j^{a_i} = \bar{a}_k a_i' b_j' \bar{b}_l$ که $\bar{a}_k$ و $\bar{b}_k$ به ترتیب نمایش $a_i' \in A_\circ$ و $b_j' \in B$ می‌باشند. حال هر جفت از نمایشهای $(\bar{a}_k, \bar{b}_l)$ را با اعداد ۱ تا mn مرتب و متناظر با هر $b_j^{a_i}$ عدد t_{ij}را نسبت می‌دهیم . از این رو بنابر لم۵.۴، اندیسهای i_1، i_2، j_1 و j_2 وجود دارند (بدون اینکه به کلیت خللی وارد آید می‌توان فرض کرد $i_1 = j_1 = 1$ و $i_2 = j_2 = 2$) به قسمی‌که $t_{11} = t_{22} = t_{12} = t_{21}$، در نتیجه عناصر $\bar{a}_r$ و $\bar{b}_s$ موجودند به طوری که:

$$\text{(i)} \qquad b_1^{a_1} = \bar{a}_r \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \bar{b}_s \quad , \quad b_1^{a_2} = \bar{a}_r \tilde{a}_2 \tilde{b}_2 \bar{b}_s$$

$$\text{(ii)} \qquad b_2^{a_1} = \bar{a}_r \tilde{a}_3 \tilde{b}_3 \bar{b}_s \quad , \quad b_2^{a_2} = \bar{a}_r \tilde{a}_4 \tilde{b}_4 \bar{b}_s ,$$

که در آن $\tilde{a}_i \in A_\circ$ و $\tilde{b}_i \in B_\circ$، $1 \leq i \leq 4$.
از (i) و (ii) روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\text{(iii)} \qquad b_1 b_2^{-1} = ((\bar{a}_r \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \bar{b}_s)(\bar{a}_r \tilde{a}_3 \tilde{b}_3 \bar{b}_s)^{-1})^{a_1^{-1}}$$
$$= ((\bar{a}_r \tilde{a}_2 \tilde{b}_2 \bar{b}_s)(\bar{a}_r \tilde{a}_4 \tilde{b}_4 \bar{b}_s ,)^{-1})^{a_2^{-1}}$$

همچنین:

$$a_1 \tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_3^{-1} a_1^{-1} = a_2 \tilde{a}_2 \tilde{b}_2 \tilde{b}_4^{-1} \tilde{a}_4^{-1} a_2^{-1}$$

یا:

$$\tilde{a}_1 \tilde{b}_1 \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_3^{-1} a_1^{-1} a_2 = a_1^{-1} a_2 \tilde{a}_2 \tilde{b}_2 \tilde{b}_4^{-1} \tilde{a}_4^{-1}$$

ازضـــرب طـــرف راســـت عبـــارت فـــوق در $a_2^{-1}a_1\tilde{a}_3$ و طـــرف چـــپ در $\tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_4\tilde{a}_2^{-1}$ و بـــا درنظرگرفتن $\tilde{a}_i \in A_0$، داریم:

$$(\text{iv})\qquad (\tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_4\tilde{a}_2^{-1}\tilde{a}_1)\tilde{b}_1\tilde{b}_3^{-1} = (\tilde{a}_3^{-1}a_1^{-1}a_2\tilde{a}_4)\tilde{b}_2\tilde{b}_4^{-1}(\tilde{a}_4^{-1}a_2^{-1}a_1\tilde{a}_3)$$

از روابط (ii) حاصل می‌شود:

$$(\text{v})\qquad b_2a_1 = a_2\bar{a}_r\tilde{a}_4\tilde{b}_4\bar{b}_s = a_1\bar{a}_r\tilde{a}_3\tilde{b}_3\bar{b}_s$$

در نتیجه:

$$a_1^{-1} = \bar{b}_s^{-1}\tilde{b}_3^{-1}\tilde{a}_3^{-1}\bar{a}_r^{-1}a_1^{-1}b_2 \quad , \quad a_2 = b_2^{-1}a_2\bar{a}_r\tilde{a}_4\tilde{b}_4\bar{b}_s$$

لذا:

$$(\text{vi})\qquad a_1^{-1}a_2 = \bar{b}_s^{-1}\tilde{b}_3^{-1}(\tilde{a}_3^{-1}a_1^{-1}a_2\tilde{a}_4)\tilde{b}_4\bar{b}_s$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\tilde{a}_3^{-1}a_1^{-1}a_2\tilde{a}_4 = a \in A_0 \quad , \quad \tilde{b}_2\,\tilde{b}_4^{-1} = b \in B_0$$
$$\tilde{a}_3^{-1}\tilde{a}_4\tilde{a}_2^{-1}\tilde{a}_1 = a_0 \in A \quad , \quad \tilde{b}_1\tilde{b}_s^{-1} = b_0 \in B_0.$$

رابطه (iv) نتیجه می‌دهد که $a_0b_0 = aba^{-1} = b^{a^{-1}}$. حال اگر $b=1$ یعنـــی $b = \tilde{b}_2\tilde{b}_4^{-1}$، آنگاه از(iii) نتیجه می‌شود:

$$b_1b_2^{-1} = a_2\bar{a}_r\tilde{a}_2.1.\tilde{a}_4^{-1}\bar{a}_r^{-1}a_2^{-1} = \tilde{a}_2\tilde{a}_4^{-1} \in A_0 \cap B_0 = <1>,$$

که یک تناقض است. لذا $b_1 \neq b_2^{-1}$ و در نتیجه $b \neq 1$. به همین نحو $a \neq 1$. از این رو حکـــم برقرار است.

نتیجه ۷.۴. فرض کنید $G = AB$ حاصلضرب دو زیر گروه نامتناهی تقریبا مرکـزی A و B باشد. در این صورت عناصر نابدیهی مانند $a \in Z(A)$ و $b \in Z(B)$ وجود دارنـد بـه قـسمی که زیر گروه $R = <[a,b]^g \;;\; g \in A>$ آبلی است.

اثبات. بنابر لم های ۴.۴ و ۶.۴ ، عناصر نابدیهی $a \in Z(A)$ و $b \in Z(B)$ وجود دارنـد بـه طوری که به ازای هر $g \in A$، تعویضگرهای $[a,b]^g$ و $[a,b]$ تعویض پذیرند. بنابر ایـن بـه ازای هر $g,h \in A$،

$$\begin{aligned}[a,b][a,b]^h &= g^{-1}[a,b]gh^{-1}[a,b]h\\ &= h^{-1}(hg^{-1}[a,b]gh^{-1})[a,b]h\\ &= h^{-1}[a,b]^{gh^{-1}}[a,b]h\\ &= h^{-1}[a,b][a,b]^{gh^{-1}}h\\ &= h^{-1}[a,b]hg^{-1}[a,b]gh^{-1}h\\ &= [a,b]^h[a,b]^g.\end{aligned}$$

یعنی R آبلی است. حال تمام ابزارهای لازم جهت اثبات قضیه اصلی فراهم می‌باشد. اثبات قضیه را به ده مرحله تقسیم کرده‌ایم که به ترتیب به اثبات هریک از انها می‌پردازیم.

قضیه ۸.۴. اگر $G = AB$ حاصلضرب دو زیرگروه تقریبا مرکزی A و B باشد، آنگاه G تقریبا حل پذیر است.

اثبات. به روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد. در این صورت $G = AB$ را به عنوان مثالی نقض درنظر می‌گیریم به شرط آنکه مجموع $\left|\frac{A}{Z(A)}\right|+\left|\frac{B}{Z(B)}\right|$ حداقل ممکن باشد (هر دو عامل بنابه فرض متناهی هستند).

اگر $A = Z(A)$ و $B = Z(B)$، آنگاه بنابر قضیه ایتو، G دو آبلی است، که متناقض با فرض است. از این رو فرض کیم که A یا B آبلی نباشند.

اینک به بیان و اثبات ده مرحله به صورت زیر می‌پردازیم:

(۱) *تنها زیرگروه نرمال* G *که مشمول در* $A \cap B$ *است، زیرگروه بدیهی* $<1>$ *می‌باشد.* به ویژه $<1> = Z(A) \cap Z(B) \lhd Z(G)$

فرض کنید $<1> \neq N \lhd G$ به طوری که $N \subseteq A \cap B$. بنابر لم زرن N را می‌توان طوری در نظر گرفت که بیشین باشد. واضح است که N تقریبا مرکزی است. حال ملاحظه می‌شود که $G/N = (A/N)(B/N)$ نمی‌تواند تقریبا حل پذیر باشد. از طرفی:

$$\left[\frac{A}{N} : Z(\frac{A}{N})\right] \leq \left|\frac{A}{Z(A)}\right|,$$

$$\left[\frac{B}{N} : Z(\frac{B}{N})\right] \leq \left|\frac{B}{Z(B)}\right|.$$

در نتیجه A/N و B/N هر دو تقریباً حل پذیرند. چون $N \subseteq A \cap B$ بیشین اختیار شده است، از این رو تنها زیر گروه G/N که مشمول در:

$$\frac{A}{N} \cap \frac{B}{N} = \frac{A \cap B}{N}$$

است، زیرگروه بدیهی $<\bar{1}>$ از G/N می‌باشد. از این رو بدون اینکه به کلیت خللی وارد آید می‌توان G را با خاصیت (۱) در نظر گرفت.

(۲) *اگر S فوق گروه تقریبا مرکزی از A باشد، به قسمی که $[S:A]$ متناهی است. آنگاه $S \cap B$ نیز متناهی است. به خصوص $A \cap B$ متناهی می‌باشد.*

فرض کنید $D = S \cap B$، در این صورت

$$\frac{D}{D \cap Z(S)} \cong \frac{DZ(S)}{Z(S)} \leq \frac{S}{Z(S)},$$

که متناهی است. از این رو چنانچه D متناهی باشد، بایستی:

$$D \cap Z(S) = B \cap Z(S) = D^*$$

نیز متناهی می‌باشد. حال چون $B/Z(B)$ متناهی است، در نتیجه:

$$\frac{D^*}{D^* \cap Z(B)} \cong \frac{D^* Z(B)}{Z(B)} \leq \frac{B}{Z(B)}$$

نیز متناهی است. بنابراین بایستی $D^* \cap Z(B)$ نامتناهی باشد، ولی:

$$D^* \cap Z(B) = D(S) \cap Z(B) \leq Z(G).$$

از طرف دیگر $G = SB$ و در نتیجه $Z(S) \cap Z(B)$ زیر گروه نرمال نامتناهی از G مشمول در $S \cap B$ است، که بنابر (۱)، بایستی زیر گروه بدیهی $<1>$ باشد، از این رو $S \cap B$ متناهی است و به خصوص $A \cap B$ نیز نامتناهی است.

(۳) *فرض کنید S فوق گروه تقریبا مرکزی از A باشد. در این صورت $S \cap B \subseteq S \cap Z(B)$ و بعلاوه $A \cap B = <1>$.*

بنابر فرض $S/Z(S)$ متناهی است و واضح است که $Z(S) \subseteq C_S(S \cap B)$ (زیرا $A \subseteq S \leq G = AB$). بنابر این $[S : C_S(S \cap B)]$ متناهی است. به همین نحو، $[B : C_B(S \cap B)]$ نیز متناهی می‌باشد. چون S فوق گروه از A است، در نتیجه

$L=(S\cap B)^G$ ، زیرگروه نرمال و متناهی در G است و در نتیجه G/L نمی‌تواند تقریباً حل پذیر باشد. از فرض کمین بودن $|A/Z(A)|+|B/Z(B)|$ نتیجه می‌شود که:

$$\left|\frac{A}{Z(A)}\right|=\left[\frac{AL}{A}:Z(\frac{AL}{A})\right]=\left[\frac{A}{A\cap L}:Z(\frac{A}{A\cap L})\right].$$

قرار دهید $Z(A/A\cap L)=N/A\cap L$، که N زیرگروهی نرمال در A است. واضح است که $Z(A)\subseteq N$ و $|A/Z(A)|=[A:N]$ که متناهی است و از آنجا $Z(A)=N\supseteq A\cap L$. به همین نحو، $Z(B)\supseteq B\cap L$. به خصوص، $S\cap B\supseteq S\cap Z(B)$. حال بنابر قسمت (۱)، داریم:

$$A\cap B=L\cap A\cap B\subseteq Z(A)\cap Z(B)=<1>.$$

فرض کنید $B_*=\cap X$ اشتراک تمام زیر گروههای X از B باشد، که $B'\subseteq X$ و با A تعویض پذیرند. چون $A\cap B=<1>$ ، در نتیجه AX زیرگروه تجزیه شدنی از G است و بنابر لم ۴.۳، $AB_*=B_*A$. واضح است که $B_*\leq B$ و $B'\subseteq B_*$. قرار دهید $L_*=B_*^G$، در این صورت به ازای هر $g\in G$، $L_*^g=L_*^{ba}\subseteq B_*A.$ از طرفی چون $B\cap A=<1>$، در نتیجه بنابر قانون ددکیند، $B_*\subseteq B\cap L_*\subseteq B\cap AB_*=(B\cap A)B_*=B_*,$

یعنی $B_*=B\cap L_*$ و لذا: $\dfrac{BL_*}{L_*}\cong\dfrac{B}{B\cap L_*}=\dfrac{B}{B_*}$

آبلی است، زیرا $B'\subseteq B_*$. حال گروه خارج قسمت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{G}{L_*}=(\frac{AL_*}{L_*})(\frac{BL_*}{L_*}).$$

از کمین بودن $|A/Z(A)|+|B/Z(B)|$ نتیجه می‌شود که G/L_* تقریبا حل پذیر است. از آبلی بودن BL_*/L_* نتیجه می‌شود که L_* تقریبا حل پذیر نیست. حال فرض کنید $C<B_*$، که $AC=CA$. بنابر تعریف B_*، داریم $B'\not\subset C$ و از آنجا $CZ(B)\neq B$. در نتیجه:

$$\left|\frac{C}{Z(C)}\right|\leq\left|\frac{C}{(C\cap Z(B))}\right|=\left|\frac{CZ(B)}{Z(B)}\right|<\left|\frac{B}{Z(B)}\right|.$$

مجدداً بنابر کمین بودن $|A/Z(A)|+|B/Z(B)|$، گروه AC تقریباحل پذیر است. با استفاده از مطالب فوق به قسمت زیر دست می‌یابیم.

(۴) *اگر $C<B$ که $AC=CA$، آنگاه AC تقریبا حل پذیر است.*

ادعا می‌کنیم که $B_* = B$، زیرا اگر $B_* \subset B$، بنابر (۴)، B_*A تقریبا حل پذیر است. چون $B_* \lhd B$ در نتیجه $B_*A \lhd AB$. از این رو با استفاده از قانون ددکیند و قضیه یکریختی:

$$\frac{BA}{B_*A} = \frac{BAB_*}{AB_*} \cong \frac{B}{B \cap AB_*} = \frac{B}{B_*(A \cap B)} = \frac{B}{B_*},$$

که B / B_* آبلی است و لذا $G = AB$ تقریبا حل پذیر می‌باشد، ولی G حل ناپذیر فرض شده بود، در نتیجه این یک تناقض است.

حال فرض کنید:

$$\overline{B}_0 = \frac{Z(B)}{Z(B)} \ , \ \overline{B}_1 = \frac{B_1 Z(B)}{Z(B)} \ , \ \dots \ , \ \overline{B}_m = \frac{B}{Z(B)} \ ,$$

$(m \geq 1)$ مجموعه ای از تمام تصویر همریختی های جدا از هم زیر گروهها B در $B/Z(B)$ باشد، که با A تعویض پذیرند.

قرار دهید $L_i = (B_i \cap Z(B))^G$، که بستار نرمال در G است. چون به ازای هر $g \in G$، $a \in A$ و $b \in B$، $L_i^g \subseteq L_i^{ab} \subseteq B_i^{ab} \subseteq B_iA$ در نتیجه $L_i \subseteq B_iA$.
همچنین بنابر (۴)، به ازای $i < m$، هر AB_i تقریباً حل پذیر است، که از آنجا L_i نیز تقریباً حل پذیر می‌باشد. بنابر این $N =< l_0, l_1, \dots, l_{m-1} >$ زیر گروهی نرمال و تقریباً حل پذیر در G است. بنابر لم زرن، می‌توان زیر گروه نرمال بیشین M / N از G / N را در AN / N در نظر گرفت. از این رو M / N (به عنوان زیر گروهی از $AN / N \cong A / A \cap N$) تقریبا مرکزی و لذا تقریباً حل پذیر است. در نتیجه M تقریباً حل پذیر است، ولی G / M نمی‌تواند تقریبا حل پذیر باشد. حال ملاحظه می‌شود که $Z(BM / M) = Z(B)M / M$ (*)، زیرا به کمک استقرا بر روی $[BM / M : Z(BM / M)] = |B / Z(B)|$، واضح است که $Z(B)M / M \subseteq Z(BM / M)$ و بعلاوه داریم:

$$|B / Z(B)| = [BM / M : Z(B)M / M].$$

از این رو (*) برقرار است. حال به بیان و اثبات مرحله پنجم می‌پردازیم.

(۵) *اشتراک $Z(B)M / M$ با هر زیر گروه سره ای از BM / M که با AM / M تعویض پذیر باشد، بدیهی است.* فرض کنید $UM / M < BM / M$، که با AM / M تعویض پذیر است. از این رو بنابر قانون ددکیند $U = U \cap BM = M(U \cap B) = M\widetilde{B},$

که $\tilde{B} = U \cap B$. ملاحظه می‌شود که $\tilde{B} \subset G$، زیرا $U < B$. بنابر (۴)، تمام زیر گروههای گروه $G/M = (AM/M)(BM/M)$ را در نظر می‌گیریم، که نتیجه می‌دهد $\tilde{B}AM/M = A\tilde{B}M/M$ تقریباً حل پذیر است. از این رو $\tilde{B}AM = A\tilde{B}M = \tilde{B}MA$ زیر گروهی تقریباً حل پذیر از G است، که $\tilde{B}M$ و A تعویض پذیرند. با فرض $\hat{B} = A\tilde{B}M \cap B$ ملاحظه می‌شود که $\hat{B} \subset B$، زیرا اگر $\hat{B} = B$ آنگاه $B \subseteq A\tilde{B}M$ و در نتیجه $G = A\tilde{B}M$ تقریبا حل پذیر است، که یک تناقض است. به وضوح دیده می‌شود که $\hat{B}$ با A تعویض پذیر است.

حال بنابر تعریف N، داریم $\hat{B} \cap Z(B) \subseteq N$ و از طرف دیگر $\tilde{B} \subseteq \hat{B}$، لذا $\tilde{B} \cap Z(B) \subseteq N \subseteq M$، و نتیجه می‌دهد

$$\frac{Z(B)M}{M} \cap \frac{\tilde{B}M}{M} = \frac{M}{M} = <\bar{1}>$$

که قسمت (۵) حاصل می‌شود.

(۶) *هر زیر گروه سره از G/M، که شامل AM/M باشد درای اشتراکی متناهی با BM/M است.* فرض کنید $D/M \subset G/M$ به قسمی‌که $AM/M \subseteq D/M$. در این صورت

$$\frac{D}{M} = \frac{D}{M} \cap (\frac{AM}{M})(\frac{BM}{M}) = \frac{AM}{M}(\frac{BM}{M} \cap \frac{D}{M}).$$

واضح است که $BM/M \cap D/M \subset BM/M$، زیرا در غیر این صورت $BM/M \subseteq D/M$ و بنابر فرض $AM/M \subseteq D/M$. از این رو $G/M = D/M$، که یک تناقض است. حال اگر $BM/M \subseteq D/M$ نامتناهی باشد، آنگاه $Z(BM/M \cap D/M)$ نیز نامتناهی است، زیرا تقریبا مرکزی است. از طرفی داریم

$$\frac{Z(\frac{BM}{M})Z(\frac{BM}{M} \cap \frac{BM}{M})}{Z(\frac{BM}{M})} \subseteq \frac{\frac{B}{M}}{Z(\frac{BM}{M})},$$

که متناهی است. حال بنابر قضیه یکریختی، سمت چپ عبارت فوق را گروه خارج قسمتی

$$\frac{Z(\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M})}{Z(\frac{BM}{M})\cap Z(\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M})},$$

که بنابر (۵)، مخرج کسر فوق بدیهی است و از این رو $Z(BM/M\cap D/M)$ و در نتیجه $BM/M\cap D/M$ متناهی است.

(۷) $AM/\grave{M}$ *زیرگروه بیشین تقریباً مرکزی از* G/M *است.*

فرض کنید زیر گروهی تقریباً مرکزی مانند $D/M\subset G/M$ وجود داشته باشد به قسمی‌که: $\frac{AM}{M}\subseteq\frac{D}{M}\subset\frac{G}{M}$

بایستی نشان دهید که $D/M=AM/M$. واضح است که بنابر استدلال قسمت (۶)،

که از (۵) نتیجه می‌شود: $$\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M}\subset\frac{BM}{M},$$

$$(\frac{D}{M}\cap\frac{BM}{M})\cap Z(\frac{BM}{M})=\frac{M}{M}\qquad(**)$$

حال قسمت (۶) ایجاب می‌کند که:

$$[\frac{D}{M}:\frac{AM}{M}]=[\frac{AM}{M}(\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M}):\frac{AM}{M}]\leq\left|\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M}\right|<\infty.$$

رابطه (**) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{AM}{M}\cap\frac{BM}{M}\cap Z(\frac{BM}{M})=\frac{M}{M}$$

همچنین:

$$Z(\frac{AM}{M})\cap Z(\frac{BM}{M})=Z(\frac{G}{M})=<1>.$$

حال بنابر مرحله (۳)، داریم:

$$\frac{D}{M}\cap\frac{BM}{M}\subseteq\frac{D}{M}\cap Z(\frac{BM}{M})=\frac{M}{M},$$

$$\frac{AM}{M}\cap\frac{BM}{M}\subseteq Z(\frac{AM}{M})\cap Z(\frac{BM}{M})=<1>,$$

در نتیجه بنابر قانون ددکیند:

$$\frac{D}{M}=\frac{AM}{M}(\frac{BM}{M}\cap\frac{D}{M})=\frac{AM}{M}.$$

از این رو (۷) برقرار است.

حال بدون اینکه به کلیت مطلب خللی وارد آید، می‌توان فرض کرد $M=<1>$ (همچنین $N=<1>$). در این صورت $<1>$ تنها زیر گروه نرمال G است، که مشمول در A میباشد. بدیهی است که A و B نامتناهی اند، زیرا در غیر این صورت A یا B دارای اندیس متناهی در G است و از آنجا G تقریبا حل پذیر خواهد بود، که خلاف فرض است.

(۸) *به ازای هر* $d\in Z(B)$، $[<A,A^d>:A^d]=[<A,A^d>:A]$، زیرا:

$$\left|\frac{<A,A^d>}{A^d}\right|\overset{(1)}{=}[<A^{d^{-1}},A>:A]\overset{(2)}{=}|<A^{d^{-1}},A>\cap B|$$

$$\overset{(3)}{=}|<A,A^d>\cap B|\overset{(4)}{=}[<A,A^d>:A]$$

تساویهای (۱) و (۲) از خودریختیهای داخلی:

$$\alpha:G\to G$$
$$g\mapsto g^d$$

حاصل می‌شوند. می‌توان دید که $\alpha(A^d)=A$ و $\alpha(A^{d^{-1}})=A$. استدلال زیر تساویهای (۲) و (۴) را نتیجه می‌دهد. زیرا اگر $H\leq G$ که $A\subseteq H$، آنگاه $H=H\cap AB=A(H\cap B).$ چون $A\cap B=<1>$، در نتیجه به ازای هر $b,b'\in B$ با شرط $b\neq b'$، داریم $bA\neq b'A$. بنابر این $[H:A]=|H\cap B|$. با فرض $H=<A,A^d>$ نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

(**۹**) *عناصر نابدیهی* $a\in Z(A)$ *و* $b\in Z(B)$ *وجود دارند به قسمی که*

$$R=<[a,b]^{a^*}\ ;\ a^*\in A>$$

آبلی است. این قسمت از نتیجه ۷.۴، حاصل می‌شود.

(**۱۰**) *در بخش پایانی استدلال سعی می‌شود که با مفروضات فوق به تناقضی دست یابیم، که از آنجا نتیجه می‌گیریم فرض مثال نقض در آغاز اثبات باطل بوده و لذا حکم قضیه برقرار است.* بنابر تعریف R در قسمت (۹)، ملاحظه می‌شود که $A\subseteq N_G(R)$. همچنین $1\neq a\in Z(A)$ و لذا $C_G(a)\subset G$ و A شامل هیچ زیرگروه نرمال نابدیهی از G نمی‌باشد. واضح است که $A\subseteq C_G(a)$، از این رو بنابر قانون ددکیند:

$C_G(a)=C_G(a)\cap AB=A(B\cap C_G(a))$، که بنابر قسمت (۶)، $B\cap C_G(a)$ متناهی است. در نتیجه $[C_G(a):A]$ نیز متناهی می‌باشد. چون R آبلی است و A تقریبا مرکزی است، در نتیجه AR تقریبا حل پذیر می‌باشد. حال داریم:
$AR=AR\cap AB=A(AR\cap B)$، که مجددا بنابر قسمت (۶)، $(AR\cap B)$ متناهی است و از آنجا $[R:A\cap B]=[AR:R]<\infty$. اگر R نامتناهی باشد، از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که $A\cap R$ نیز نامتناهی است. اگر R متناهی باشد چنین است $A/C_A(R)$ و لذا $C_A(R)$ بایستی نامتناهی باشد. ولی R آبلی است و در نتیجه $S=C_A(R)$ نامتناهی می‌باشد، که $Z(A\cap R)\subseteq S$. حال فرض کنید $c\in S$، در این صورت $c^{[a,b^{-1}]}=c$، $ba^{-1}b^{-1}(aca^{-1})bab^{-1}=c$ چون $a\in Z(A)$، در نتیجه و از این رو به ازای هر $c\in S$، $c^{ab}=c^b$ یعنی $S^b\subseteq C_G(a)$. بنابه آنچه در فوق بیان شد $[C_G(a):A]$ متناهی و $|S|=|S^b|$ نامتناهی است. از این رو بنابر قضیه یکریختی

$$[S^b:S^b\cap A]=[S^bA:A]\leq[C_G(a):A]<\infty.$$

بنابر این $S^b\cap A$ نامتناهی و در نتیجه $A^b\cap A$ نیز نامتناهی است. همچنین $Z(A^b)\cap Z(A)$ نامتناهی می‌باشد، در این صورت $Z(<A^b,A>)\neq<1>$ و از آنجا بنابر قسمت (۶)، $<A^b,A>\neq G$. با استفاده از قانون ددکیند $<A^b,A>=AB\cap<A^b,A>=A(B\cap<A^b,A>)$، که بر طبق قسمت (۶)، $B\cap<A^b,A>$ متناهی است. در نتیجه بنابر قسمت (۸)، $[<A^b,A>:A^b]<\infty$, $[<A^b,A>:A]<\infty$ در این صورت $Z(A)$ و $Z(A^b)$ هر دو دارای اندیس متناهی در $<A^b,A>$ هستند. از این رو $Z(A)\cap Z(A^b)$ دارای اندیس متناهی در $<A^b,A>$ می‌باشد. چون $Z(A)\cap Z(A^b)\subseteq Z(<A^b,A>)$، در نتیجه $Z(<A^b,A>)$ از اندیس متناهی در $<A^b,A>$ است و لذا $<A^b,A>$ تقریبا مرکزی است. حال از قسمت (۷) نتیجه می‌شود که $<A^b,A>=A$. همچنین قسمت (۸) ایجاب می‌کند که $[A:A^b]=[A:A]=1$ و از آنجا $A^b=A$، یعنی زیرگروه $<b>$ از $Z(B)$ با A تعویض پذیر است. بدیهی است که $<b>\subset B$، زیرا B آبلی نیست، پس $<b>\subseteq B_i\cap Z(B)\subseteq L_i\subseteq N\subseteq M=<1>$، یعنی $b=1$ که یک تناقض آشکار است و لذا فرض خلف باطل و چنین مثال نقضی وجود ندارد.

در پایان می‌توان این سوال را مطرح کرد که آیا حاصلضرب دو گروه تقریبا آبلی A و B تقریبا حل پذیر یا تقریبا دو آبلی است. بنابر تعریف، گروه A را تقریبا آبلی نامیم اگر $[A : A']$ متناهی باشد.

Reference

Amberg, B. (1976) *Artinian and Noetherian factorized groups*. rend. Sem. Math. Univ. Padova **55**, 105-122.

Amberg, B. (1984) *Factorized groups with Max, min and min-p*, Canada. Math. Bull. **27**, 7-17.

Amberg, B., Franciosi, S., and De Giovanni, F. (1992) *Products of Groups*,Oxford Univ. Press.

Amberg , B., and Moghaddam, M. R. R. (1986) *Products of locally finite groups with min-p*, J. Austral. Math Soc. (Series A) **41**, 352-360.

Cernikov, N.S. (1981) *Product of almost abelian groups*, Ukrain. Math. Zh. **33**, 136-138.

Darafsheh, M.R. (2004) *Finite groups which factor as product of an alternating group and a symmetric group*, Communications in Algebra. **32(2),** 637–647.

Huppert, B. (1967) *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, New York.

Ito, N. (1955) *Uber das product von zwei abelschen Gruppen*,Math. Z. **62**, 400-401

Kegel, O.H. (1961) *Produkte nilpotenter Gruppen*, Arch. Math. (Basel) **12** (1961), 90-93.

Robinson, D. J. S. (1996) *A Course in the Theory of Groups* ,Springer-Verlag, 2nd ed.

Walls, G.L. (1992) *Product of simple groups and symmetric groups*,Arch. Math. (Basel) **58**, 313-321.

رجب زاده مقدم، محمد رضا؛ (۱۳۷۴) *گروههای تجزیه پذیر* فرهنگ و اندیشه ریاضی شماره **۱۵**، صص ۲۷-۳۴