**مجله علوم دانشگاه تهران**
**جلد سی‌ام (۱۳۸۳) شماره ۱ (۱۱۰-۹۹)**

# مطالبی درباره گروه های n- تجزیه‌پذیر

***محمدعلی سلحشور و علی‌رضا اشرفی***
*گروه ریاضی ـ دانشگاه کاشان*
(دریافت: ۸۱/۴/۹ ؛ پذیرش: ۸۲/۳/۲۶)

## چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی و $N_G$ نشان دهنده مجموعه تمام زیرگروه‌های نرمال سره و غیربدیهی G باشد. یک عضو K از $N_G$ را n– تجزیه‌پذیر گوییم، هرگاه K اجتماع n کلاس تزویج متمایز از G باشد. G را n– تجزیه پذیر نامیم، هرگاه $N_G \neq \phi$ و هر عضو $N_G$، n- تجزیه‌پذیر باشد.

در این مقاله ساختار گروه‌های متناهی n– تجزیه‌پذیر را برای $n \leq 6$ بررسی کرده و این گروه‌ها را در کلاس گروه‌های متناهی غیرکامل رده‌بندی می‌کنیم.

***واژه‌های کلیدی:*** *گروه های n- تجزیه‌پذیر، گروه‌های متناهی، گروه‌های متناهی غیرکامل.*

## مفاهیم اولیه و نتایج مقدماتی

در این بخش ما به بررسی مطالبی خواهیم پرداخت که در سراسر مقاله آنها را مورد استفاده قرارمی‌دهیم. تمامی گروه‌های مورد بررسی متناهی خواهند بود و برای تعاریف ومفاهیم مقدماتی می‌توان به مراجع استاندارد نظریه گروه‌ها مراجعه نمود.

مجموعه همه زیرگروه‌های نرمال سره وغیر بدیهی G را با $N_G$ نشان داده و عضوی مانند K از $N_G$ را n-تجزیه‌پذیر گوییم، هرگاه K اجتماع n کلاس تزویج متمایز ازG باشد. G را n- تجزیه‌پذیر گوییم، هرگاه $N_G \neq \phi$ و هر عضو $N_G$، n-تجزیه‌پذیر باشد. $E(p^n)$ نشان دهنده گروه آبلی مقدماتی از مرتبه $p^n$ است که در آن $p$ یک عدد اول می‌باشد. مجموعه اعداد اولی که مرتبه G را می‌شمارند ومجموعه همه مرتبه‌های عناصر در G را به ترتیب با $\pi(G)$ و $\pi_e(G)$ نشان می‌دهیم. $\pi'_e(G)$ معرف مجموعه تمام اعداد اول در $\pi_e(G)$ و $\pi''_e(G)$ مجموعه تمام اعداد مرکب در $\pi_e(G)$ باشد. بنابراین $\pi_e(G) = \{1\} \bigcup \pi'_e(G) \bigcup \pi''_e(G)$. گروه ساده G را- $K_3$ گروه گوییم، هرگاه $|\pi(G)| = 3$ و درصورتی که $G' \neq G$، G را غیر کامل می‌نامیم. قضیه زیر از شی و یانگ گروه متناوب $A_5$ را برحسب مرتبه عناصرآن مشخص می‌سازد.

**قضیه ۱ (شی و یانگ، ۱۹۸۴)**. خواص مشخصه‌ای $A_5$ عبارت است از:

۱) مرتبه گروه حداقل شامل سه عامل اول مختلف می‌باشد.

۲) مرتبه هر عنصر غیر همانی در گروه یک عدد اول است.

**نتیجه**: اگر G یک گروه ساده، متناهی غیرآبلی و مرتبه هر عنصر غیر همانی آن عددی اول باشد، آنگاه G با $A_5$ یکریخت است.

یکی از احکامی که در رده‌بندی گروه‌های ساده بسیار مورد استفاده واقع شد، قضیه زیر از مارسل‌هرزوگ می‌باشد. این قضیه تمام گروه‌های ساده غیرآبلی که مرتبه آنها حداکثر بر سه عدد اول قابل قسمت است را تعیین می‌کند.

**قضیه ۲ (هرزوگ ۱۹۶۸)**. اگر G یک- $K_3$ گروه ساده باشد، آنگاه با یکی از گروه‌های ساده $A_5$ ، $A_6$ ، $L_2(7)$ ، $L_2(8)$ ، $L_2(17)$ ، $L_3(3)$ ، $U_3(3)$ و $U_4(2)$ یکریخت است.

**قضیه ۳ (شی ویانگ ۱۹۹۲)**. فرض کنید G یک گروه ساده و متناهی با شرط $|\pi_e(G)|=1$ باشد، آنگاه G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

۱) $Z_p$ که $p$ یک عدد اول است.

۲) $L_2(q)$ که $q$ یکی از اعداد ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳ یا ۱۶ می‌باشد.

۳) $L_3(4)$ و $Sz(8)$.

۴) $L_2(3^n)$ که $(3^n-1)/2$ و $(3^n-1)/4$ اعدادی اولند.

۵) $L_2(2^n)$ که $2^n-1$ و $(2^n-1)/3$ اعدادی اولند.

ما برای رده‌بندی کردن گروه‌های متناهی ۶-تجزیه‌پذیر نیاز به کلاس‌های تزویج گروه‌های خطی $L_2(2^n)$ و $L_2(3^n)$ داریم. کلاس‌های تزویج گروه خطی $L_2(2^n)$ توسط کالینز (۱۹۹۰) مشخص شده است. لم زیر کلاس‌های تزویج گروه $L_2(3^n)$ را مشخص می‌کند.

**لم۱)**. گروه $G=L_2(q)=\dfrac{SL(2,q)}{Z(SL(2,q))}$ دقیقاً $3+\dfrac{q-1}{2}$ کلاس تزویج زیر دارد:

۱) $Z$

۲) $(a^iZ)^{L_2(q)}$ به طول $q(q+1)$ که $1\le i\le \dfrac{q-3}{4}$

۳) $(b(0,\tau)Z)^{L_2(q)}$ به طول $q(q-1)/2$

۴) $(b(0,\tau)Z)^{L_2(q)}$ به طول $q(q-1)$ و

۵) $(cZ)^{L_2(q)}$ و $(dZ)^{L_2(q)}$ به طول $(q^2-1)/2$

که ν مولد گروه ضربی $GF(q)^*$ ، $Z=Z(SL(2,q))$.
برای $\varepsilon_0\in GF(q)-GF(q)^2$ ، $\sigma^2-\varepsilon_0\tau^2=1$. بعلاوه

$$a=\begin{pmatrix}\upsilon & 0\\ 0 & \upsilon^{-1}\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \upsilon & 1\end{pmatrix},\ b(\sigma,\tau)=\begin{pmatrix}\sigma & \tau\\ \varepsilon_0\tau & \sigma\end{pmatrix}$$

دراین مقاله، زیرگروه مشتق ومرکز G را به ترتیب با $G'$ و $Z(G)$ و کلاس تزویج G با نماینده $x$ را با $x^G$ نمایش می‌دهیم. همچنین $SmallGroup(n,i)$ معرف i-امین گروه از مرتبه $n$ در کتابخانه GAP می‌باشد.

## نتایج و قضایای اصلی

ابتدا دو لم مقدماتی زیر را می‌آوریم که دریافتن ساختارگروه‌های n-تجزیه‌پذیر بسیار مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

**لم ۲.** اگر G، n- تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه هر دو عضو متمایز$H$ و$K$ از $N_G$، غیرقابل مقایسه هستند.

**اثبات:** فرض کنیم $H \subset K$ ، چون $H, K \in N_G$، لذا $H, K \lhd G$. حال فرض می‌کنیم $r_G(H)$ و $r_G(K)$معرف تعداد کلاس‌های تزویج $H$ و$K$ درG باشند. چون $H \subset K$، پس $r_G(H) > r_G(K)$. از طرف دیگر از n-تجزیه‌پذیر بودن G نتیجه می‌شود که $r_G(H) = r_G(K) = n$. از دو رابطه اخیر به دست می‌آید که $n<n$ و این تناقض است.

**نتیجه:** به ازای هردو عضو متمایز $H$ و$K$ از $N_G$، $H \bigcap K = 1$.

**لم ۳.** اگرG یک گروه آبلی متناهی بوده و هر زیرگروه نرمال، سره و غیر بدیهی آن n-تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه $n$ عددی اول وG دارای مرتبه $n^2$ است.

**اثبات:** بنابر قضیه اساسی گروه‌های آبلی G یک n-گروه است که درآن $n$ یک عدد اول است. در واقع اگر $p$ و $q$ دو عامل اول متمایز G باشد، آنگاه بنابر قضیه کشی و آبلی بودن G، G دارای زیرگروه‌های نرمالی چون $H$ و$K$ است به طوری که $|H|=p$ و $|K|=q$. حال بنابر n-تجزیه‌پذیر بودن G، $p = |H| = n = |K| = q$ که تناقض است. به علاوه چون G، n-تجزیه‌پذیر است، پس مرتبه G نمی‌تواند از $n^2$ بزرگتر باشد.

در این مقاله ما فقط گروه‌های غیر کامل را مطالعه می‌کنیم و با این شرط ساختار G را در حالت‌های مختلف بررسی می‌نماییم. در قضیه زیر ساختار گروه غیرآبلی، غیرکامل و n-تجزیه‌پذیر G بررسی می‌شود.

**قضیه ۴.** فرض کنید G یک گروه غیر آبلی، غیر کامل n-تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه احکام زیر برقرار است:

۱) هر عضو $N_G$ در $N_G$ ماکسیمال و مینیمال است.

۲) $Z(G) = 1$ یا $|Z(G)| = n$ که $n$ یک عدد اول است.

۳) اگر $H$ و $K$ دو عضو متمایز از $N_G$ باشند، آنگاه $G \cong H \times K$.

۴) اگر $H$ یک عضو حل‌پذیر از $N_G$ باشد، آنگاه $H$ آبلی مقدماتی خواهد بود.

۵) اگر هر عضو $N_G$ حل‌پذیر باشد، آنگاه $N_G$ شامل فقط یک عنصر است.

۶) G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر $G'$ آبلی باشد. در این حالت $N_G = \{G'\}$، $G' \cong E(p^r)$ و $G'$ در G ماکسیمال است. به علاوه G یک گروه فروبنیوس با هسته $G'$ بوده که متمم آن یک گروه دوری از مرتبه عدد اول $q$ با شرط $p^r - 1 = (n-1)q$ می‌باشد.

**اثبات:** (۱)، (۲) و(۳) بدیهی است. برای اثبات (۴) می‌توان دید که $H$ به طور مشخصه‌ای ساده است، زیرا اگر $K$ یک زیرگروه مشخص غیر بدیهی $H$ باشد، آنگاه $K \lhd G$ و این با لم ۲ در تناقض است. همچنین چون $H$ حل پذیر است در نتیجه $H$ آبلی مقدماتی بوده وحکم برقرار است. برای اثبات (۵) فرض می‌کنیم که $H$ و $K$ دو عضو مختلف از $N_G$ باشند. چون طبق فرض $H$ و $K$ حل‌پذیرند، لذا بنابر قسمت (۴) هر دو آبلی می‌باشند و در نتیجه طبق قسمت (۳)، G آبلی خواهد بود و این با فرض مسئله در تناقض است.

نهایتاً برای اثبات (۶) فرض می‌کنیم G حل‌پذیر باشد. لذا بنابر مفروضات مسئله و قسمت (۵)، $N_G = \{G'\}$. در نتیجه G حل‌پذیر است و طبق قسمت (۴)$G'$ آبلی می‌باشد. برعکس اگر G آبلی باشد، آنگاه حل‌پذیر بوده وچون $G/G'$ آبلی است، لذا G حل‌پذیر است. از طرف دیگر بنابر قسمت (۱)، $G'$ یک زیرگروه ماکسیمال G می‌باشد، لذا $|G:G'|=q$ که $q$ یک عدد اول است. همچنین چون $G'$ حل‌پذیر می‌باشد، پس بنابر قسمت (۴)، $G'$ یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه $p^r$ است، لذا $|G| = p^r q$. از طرفی چون G غیر آبلی است، لذا $q \neq p$ و برای هر $1 \neq x \in G'$، $C_G(x) = G'$. بنابراین طبق قضیه ۱,۲ از کارپلوفسکی(۱۹۹۲)، G یک گروه فروبنیوس با هسته $G'$ می‌باشد. چون $G'$ آبلی است، لذا بنابر قضیه ۱,۵ از کارپلوفسکی(۱۹۹۲)، $n - 1 = (|G'| - 1)/q$. در نتیجه $p^r - 1 = (n-1)q$ و حکم برقرار است.

**لم ۴.** اگر G یک گروه غیر کامل، غیر حل‌پذیر و n-تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه $G'$ در G ماکسیمال و غیرآبلی است.

**اثبات:** چون G یک گروه غیر کامل و غیر حل‌پذیر است، لذا $1 \neq G' \neq G$. حال فرض می‌کنیم که H زیرگروهی از G باشد به طوری که $G' \leq H \leq G$. در این صورت به سادگی می‌توان دید $H \lhd G$. بنابراین $H \in N_G$ و $G' \subset H$، که با لم ۲ در تناقض است. لذا $G'$ در

G ماکسیمال است. حال اگر فرض کنیم $G'$ آبلی باشد، آنگاه با توجه به آبلی بودن $G/G'$، G نیز حل‌پذیر خواهد بود و این با فرض در تناقض است، پس $G'$ غیر آبلی است.

**لم ۵.** اگر G یک گروه غیر کامل، غیر حل‌پذیر و n-تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه برای $n \leq 6$، $G'$ساده است.

**اثبات:** ما اثبات را برای حالتی که $n = 6$ ارائه می‌دهیم. باقی حالات به روش مشابه و به سادگی بدست می‌آیند. چون $1 \neq G' \neq G$ و $G' \lhd G$، لذا $G' \in N_G$. همچنین بنابر قضیه۴، $G'$ یک زیرگروه مینیمال نرمال است، پس بنابر نتیجه۳ از سوزوکی (۱۹۸۲)، $G' \cong H_1 \times \cdots \times H_k$ که $H_i$ها ($1 \leq i \leq k$) همگی ساده و یکریخت‌اند. از طرفی بنابر لم ۴ چون $G'$ غیر آبلی است، در نتیجه $H_i$ها همگی غیر آبلی خواهند بود. حال چون $H_i$ها ساده و غیرآبلی‌اند، پس برای هر $1 \leq i \leq k$، $2 \in \pi(H_i)$ و $|\pi(H_i)| \geq 3$. بنابراین چون $H_i$ها دوبه‌دو یکریخت‌اند، لذا برای هر $1 \leq i \leq k$ می‌توان فرض کرد $\pi(H_i) = \{2, p, q, \ldots\}$ که در آن q, p و ... اعداد اولند. حال با فرض $k \geq 2$، $a_1, b_1, c_1, \in H_1$ و $a_2, b_2, c_2, \in H_2$ یافت می‌شوند به طوری که $o(a_1) = o(a_2) = 2$، $o(b_1) = o(b_2) = p$ و $o(c_1) = o(c_2) = q$. حال واضح است:

$$\{(e,e),(a_1,e),(b_1,e),(c_1,e),(a_1,b_2),(a_1,c_2),(b_1,c_2)\} \subseteq H_1 \times H_2$$

به علاوه:

$$o(e,e) = 1 \text{، } o(a_1,e) = 2 \text{، } o(b_1,e) = p \text{، } o(c_1,e) = q \text{، } o(a_1,b_2) = 2p\text{،}$$
$$o(a_1,c_2) = 2q \text{ و } o(b_1,c_2) = pq\text{.}$$

چون مرتبه عناصر فوق متمایز است، لذا کلاس‌های تزویج آنها متمایز خواهندبود. در نتیجه تعداد کلاس‌های تزویج بیش از ۶ تا می‌شود که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین k=۱ و $G'$ ساده است.

**لم ۶.** فرض کنید G یک گروه غیر کامل، غیرحل‌پذیر و n-تجزیه‌پذیر باشد. به علاوه فرض کنیم $|N_G| \geq 2$. در این صورت $|N_G| = 2$ و $G \cong Z_N \times B$ که n یک عدد اول و B یک گروه ساده و غیر آبلی با دقیقاً n کلاس تزویج است.

**اثبات:** فرض کنیم $A$ و $B$ عناصری از $N_G$ باشند، در این صورت بنابر قضیه۴، $G \cong A \times B$. به راحتی می‌توان دید که $A$ و$B$ گروه‌هایی ساده هستند. بنابراین طبق رابینسون (۱۹۹۶)، $A$ و $B$

تنها زیرگروه‌های نرمال، غیر بدیهی و سره G می‌باشند. پس $|N_G| = 2$.حال اگر $A$ و $B$ هر دو گروهی ساده و غیر آبلی باشند، آنگاه $G' = G$ و این یک تناقض است. بنابراین یکی از $A$ یا $B$ مثلاً $A$ آبلی است. حال چون $A$ ساده است، پس $n$ یک عدد اول بوده و $A \cong Z_n$. یعنی $G \cong Z_n \times B$.

بررسی گروه‌های غیر کامل غیر حل‌پذیر با دقیقاً یک زیرگروه نرمال سره و غیر بدیهی مسئله‌ای نیست که به سادگی بتوان به آن جواب داد. حال در حالاتی خاص به مطالعه این گروه‌ها می‌پردازیم.

**قضیه۵.** اگر G یک گروه غیر کامل n-تجزیه‌پذیر برای $n =$ ۲, ۳ باشد، آنگاه G حل‌پذیر است.
**اثبات:** فرض کنیم G غیرحل‌پذیر باشد. لذا $1 \neq G' \neq G$ و بنابر لم ۴، $G'$ غیر آبلی است. ازطرفی طبق لم ۵، $G'$ ساده است. لذا چون $G'$ ساده وغیر آبلی است، پس $|\pi(G')| \geq 3$. از طرف دیگر چون G، ۲-تجزیه‌پذیر یا ۳-تجزیه‌پذیر است، لذا 2 یا $|\pi(G')| \leq 1$ که این تناقض است. پس G حل‌پذیر می‌باشد و حکم ثابت است.

در لم ۳ و قسمت (۶) از قضیه ۴ ساختار گروه‌های آبلی، حل‌پذیر و غیر آبلی بررسی شده است. لذا از این به بعد می‌توان فرض کرد که گروه‌های مورد بررسی غیر حل‌پذیر می‌باشند.

**قضیه ۶.** اگر G یک گروه غیر کامل، غیر حل‌پذیر و ۴-تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه $G \cong S_5$.
**اثبات:** بنابر لم ۶ می‌دانیم که 2 یا $|N_G| = 1$. ادعا می‌کنیم که $|N_G| = 1$. فرض کنیم $|N_G| = 2$ و$H$ و $K$دو عضو متمایز از $N_G$ باشند. چون $1 \neq G' \neq G$ و $G' \lhd G$، لذا $G' \in N_G$. پس یکی از دو گروه یعنی $H$ و $K$ باید $G'$ باشد. فرض کنیم $H = G'$. لذا بنابر قضیه ۴، $G \cong G' \times K$ و در نتیجه $G/G' \cong K$. از طرفی چون $G'$ در G ماکسیمال و نرمال است، $G/G' \cong Z_p$ که $p$ عددی اول است. یعنی $K \cong Z_p$. اما چون $K$، ۴-تجزیه‌پذیر است، لذا $p = |Z_p| = |K| = 4$ که تناقض است. پس $|N_G| = 1$ و $N_G = \{G'\}$.
از طرف دیگر چون $G'$، ۴-تجزیه‌پذیر است، لذا $3 \leq \pi(G') \leq 3$ و در نتیجه $\pi(G') = 3$. یعنی $G'$ یک $K_3$-گروه است. پس بنابر قضیه هرزوگ $G'$ با یکی از گروه های ساده $A_5$، $A_6$، $L_2(7)$، $L_2(8)$، $L_2(17)$، $L_3(3)$، $U_3(3)$ یا $U_4(2)$ یکریخت می‌باشد. با

استفاده از نرم افزار GAP و با بررسی تعداد کلاس‌های تزویج متمایز در $G'$ درمی‌یابیم که تنها حالت ممکن برای $G'$ وقتی است که $G' \cong A_5$. همچنین با بررسی کلیه گروه‌های موجود از مرتبه ۱۲۰ در کتابخانه GAP و با این شرط که $G' \cong A_5$ باشد، تنها یک حالت برای G بدست می‌آید و آن هم $S_5$ می‌باشد. بنابراین $G \cong S_5$. نهایتاً چون $A_5$ اجتماع چهار کلاس تزویج از $S_5$ است، حکم ثابت می‌شود.

**قضیه ۷.** یک گروه غیرکامل و غیرحل‌پذیر G، ۵-تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر G با یکی از گروه‌های $Z_5 \times A_5$، $A_6.2_3$ یا $Aut(L_2(q))$ برای ۸ یا ۷ =$q$ یکریخت باشد.

**اثبات:** بنابر لم ۶، 2 یا $1 = |N_G|$. حال اگر $|N_G| = 2$، آنگاه طبق لم ۶، $G \cong Z_5 \times A_5$. بنابراین ما می‌توانیم فرض کنیم که G دقیقاً دارای یک زیرگروه نرمال غیر بدیهی و سره یعنی $G'$ می‌باشد. از طرفی بنابر لم ۴ و۵ چون $G'$ ساده و غیر آبلی است $3 \le |\pi(G')| \le 4$. به علاوه چون $G'$ در G ماکسیمال و نرمال است لذا $|G : G'|$ بایستی عددی اول چون $p$ باشد. حال اگر $|\pi(G')| = p$، آنگاه بنابر نتیجه قضیه ۱، $G \cong A_5$ که این یک تناقض است، زیرا $|\pi(A_5)| = |\pi(G')| = 3$. بنابراین $|\pi(G')| = 4$ و $G'$ یک $K_3$ گروه است که بنابر قضیه هرزوگ $G'$ با $A_5$، $A_6$، $L_2(7)$ یا $L_2(8)$ یکریخت است. حال اگر $p \notin \pi(G')$ آنگاه $G \cong Z_p \times_\varphi G'$ که $\varphi : Z_p \to Aut(G')$ یک همریختی است. از طرف دیگر چون برای هر یک از حالت‌های فوق $|\pi(G')| = |\pi(Aut(G'))|$ لذا $p \notin \pi(Aut(G'))$ و در نتیجه همریختی $\varphi$ بدیهی است. بنابراین $G \cong Z_p \times G'$ که این نیزتناقض است. پس $p \in \pi(G')$. حال با عنایت به این که $|G| = p|G'|$ اثبات قسمت اصلی قضیه را برای چهار حالت زیر در نظر می گیریم:

**الف)** $G' \cong A_5$. در این حالت $|G'| = 60$ و $\pi(G') = \{2,3,5\}$ و لذا $|G| = 120,180,300$. حال با استفاده از کتابخانه GAP در می یابیم که تنها دو گروه SmallGroup(120,34) و SmallGroup(120,35) از مرتبه ۱۲۰ وجود دارند به طوری که مشتق آنها با $A_5$ یکریخت می‌باشد. اما چون $Z_2 \times A_5 \cong$ SmallGroup(120,35) لذا تناقض است، زیرا $|N_G| = 1$. ازطرف دیگر چون $S_5 \cong$ SmallGroup(120,35) و این که $A_5$ در $S_5$، ۴-تجزیه‌پذیر است، لذا این نیز غیر ممکن می‌باشد. به طریق مشابه برای حالت‌های دیگر یعنی $|G| = 180,300$ به یک تناقض می‌رسیم. لذا $G'$ نمی‌تواند با $A_5$ یکریخت باشد.

**ب)** $G' \cong A_6$. در جدول ۱ ما کلاس‌های تزویج $A_6$ را محاسبه کرده‌ایم. با توجه به این جدول $G'$ دقیقاً ۷ کلاس تزویج از مرتبه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ دارد. چون $G'$ اجتماع ۵ کلاس تزویج می‌باشد، لذا دو کلاس از مرتبه ۳ و دو کلاس از مرتبه ۵ موجود در $G'$ باید در G یکی شوند. این نشان می‌دهد که کلاس‌هایی به طول‌های ۱، ۴۵، ۸۰، ۹۰ و۱۴۴ در G یافت می‌شوند. حال فرض می‌کنیم که $x$ یک عنصر از مرتبه ۵ در $G'$ باشد. به راحتی دیده می‌شود $|G| = |x^G|.|C_G(x)| = 144.5t$ که $t$ عددی طبیعی است. اما چون $|G:G'|$ یک عدد اول است، بنابراین $t = 1$ و $|G| = 720$. حال با استفاده از کتابخانه GAP درمی‌یابیم که چهار گروه از این مرتبه و با این شرط که $G' \cong A_6$ وجود دارند. این چهار گروه عبارتند از: $S_6$، $Z_2 \times A_6$، SmallGroup(720,764) و SmallGroup(720,765). واضح است که $Z_2 \times A_6$ دارای دو زیرگروه نرمال غیر بدیهی و سره و $A_6$ اجتماع ۶ کلاس تزویج در $S_6$ می‌باشد، لذا این دو حالت غیر ممکن است. بنابراین:

$G \cong \mathrm{SmallGrop}(720,764) = A_6.2_2$ یا $\mathrm{SmallGrop}(720,765) = A_6.2_3$.

محاسبات انجام شده توسط GAP در جدول ۱ نشان می‌دهد که $A_6$ اجتماع ۶ کلاس تزویج در $A_6.2_2$ می‌باشد. لذا جواب مسئله نخواهد بود. اما $A_6.2_3$ یکی از جواب‌های مسئله ماست.

**پ)** $G' \cong L_2(7)$ طبق جدول ۱، $G'$ دقیقاً ۶ کلاس تزویج از مرتبه های ۱، ۲، ۳، ۴ و۷ دارد. چون $G'$ اجتماع ۵ کلاس تزویج در G می‌باشد. لذا دو کلاس تزویج از مرتبه ۷ موجود در $G'$ باید در G یکی شوند که این نشان می‌دهد یک کلاس به طول ۴۸ در G خواهیم داشت. حال $x$ را عنصری از مرتبه ۷ در نظر می‌گیریم. به راحتی دیده می‌شود که $|G| = |x^G|.|C_G(x)| = 48.7t$ که $t$ عددی طبیعی است. اما چون $|G:G'|$ یک عدد اول است، لذا $t = 1$ و $|G| = 336$ می‌باشد. با استفاده از کتابخانه GAP در می‌یابیم که فقط دو گروه $Z_2 \times L_2(7)$ و $Aut(L_2(7))$ از این مرتبه و با این شرط که $G' \cong L_2(7)$ وجود دارند. واضح است $Z_2 \times L_2(7)$ جواب نخواهد بود. اما طبق جدول ۱، $Aut(L_2(7))$ جواب دیگر مسئله می‌باشد.

**ت)** $G' \cong L_2(8)$. بنابر جدول۱، $G'$ دقیقاً ۹ کلاس تزویج از مرتبه های ۱، ۲، ۳، ۷ و ۹ دارد. چون $G'$اجتماع ۵ کلاس تزویج در G می‌باشد، لذا سه کلاس تزویج از مرتبه ۷ و سه کلاس تزویج از مرتبه ۹ موجود در $G'$ باید درG یکی شوند که این نشان می‌دهد یک کلاس تزویج به طول ۱۶۸ در G خواهیم داشت. حال x را عنصری از مرتبه ۹ در $G'$ در نظر می‌گیریم. به راحتی دیده می‌شود که $|G| = |x^G|.|C_G(x)| = 168.9t$ که مانند قبل t عددی طبیعی است.

بنابراین $|G:G'|=3$ و $|G|=1512$. حال با استفاده از GAP به راحتی دیده می‌شود که دو گروه $L_2(8)\times Z_2$ و $Aut(L_2(8))$ از این مرتبه و با این شرط که $G'\cong L_2(8)$ وجود دارند. محاسبات موجود در جدول ۱ نشان می‌دهد که $Aut(L_2(8))$ جواب دیگری از مسئله خواهد بود. لذا اثبات کامل است.

**قضیه ۸.** یک گروه غیر کامل و غیر حل پذیر G، ۶-تجزیه پذیر است اگر و تنها اگر G با $S_6$ یا $A_6.2_2$ یکریخت باشد.

**اثبات:** بنابر لم ۶، G دقیقاً یک زیرگروه نرمال غیر بدیهی و سره یعنی $G'$ دارد که طبق لم ۴ و ۵ ساده و غیر آبلی است. لذا $|\pi(G')|=3,4$. واضح است که $|\pi(G')|\neq 5$، زیرا در غیر این صورت بنابر نتیجه قضیه۱، $G'\cong A_5$. در نتیجه $5=|\pi(G')|=|\pi(A_5)|=3$ که این تناقض است. به طریق مشابه با قضیه ۷ می‌توان نشان داد $|G:G'|=p$ که p یک عدد اول است و $p\in\pi(G')$. حال قضیه را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

**الف)** فرض کنیم $|\pi(G')|=3$. در این حالت بنابر قضیه هرزوگ $G'$ با $L_2(7), A_6$ یا $L_2(8)$ یکریخت است.

**۱)** $G'\cong A_6$. فرض کنیم x یک عنصر از مرتبه ۵ در $G'$ باشد. چون $|G|=|x^G||C_G(x)|=p|G'|$، لذا طبق جدول ۱ داریم $|G|=144.5t=360.2t$. پس $p=2$. حال با استفاده از GAP و با توجه به کلاس‌های تزویج $A_6$ در می‌یابیم که $S_6$ و $SmallGroup(720,764)=A_6.2_2$ تنها گروه‌هایی هستند که در آنها $G'\cong A_6$ و $G'$ اجتماع ۶ کلاس تزویج از G است.

**۲)** $G'\cong L_2$ (۷). چون $\pi(G')=\{2,3,7\}$. لذا $|G|=366,504$ یا $1176$. حال با محاسباتی خسته‌کننده توسط GAP در می‌یابیم گروه متناهی G که در شرایط قضیه صدق کند، وجود ندارد.

**۳)** $G'\cong L_2$ (۸). با استفاده از جدول ۱ به راحتی دیده می‌شود که باید یا دو کلاس به طول ۷۲ و همه کلاس‌های به طول ۵۶ و یا دو کلاس به طول ۵۶ و همه کلاس‌های به طول ۷۲ در G یکی شوند که در هر یک از حالت های فوق به روش مشابه در قضیه ۷ به یک تناقض می‌رسیم.

**ب)** فرض کنیم $|\pi(G')|=4$. بنابر لم ۵، $\pi_e(G')=\{1,2,p,s,r,a\}$ که p، s و r اعدادی اول و $a$ یک عدد مرکب است. بنابر فرض‌های مسئله و قضیه۳، $G'$ با $L_2(3^n)$ که $(3^n-1)/2$ و $(3^n+1)/4$ اعدادی اول یا با $L_2(2^n)$ که $(2^n-1)$ و $(2^n+1)/3$ اعدادی اولند و یا با $Sz(8)$ یکریخت است. لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $G'\cong L_2(2^n)$ که $(2^n-1)$ و $(2^n+1)/3$ عددی اولند. در این حالت فرض می‌کنیم $q=2^n$ و U یک ۲-سیلو زیرگروه $G'$ باشد، آنگاه $N_{L_2(2^n)}(U)=HU$ که $|H|=2^n-1=p$. بنابراین $G'$ دقیقاً $p$ تا ۲-سیلو زیرگروه دارد.چون $p=2^n-1$ یک عدد اول است. لذا $G'$ دقیقاً $\frac{q-1}{2}-1$ کلاس از مرتبه $p$ دارد. فرض می‌کنیم $x\in G'$ از مرتبه $p$ باشد، آنگاه $\left|C_{L_2(2^n)}(x)\right|=p$ و $\left|x^{L_2(2^n)}\right|=q(q+1)$. چون هر عنصر از مرتبه $p$ از $L_2(2^n)$ در G یکی می‌شوند، لذا G دارای یک کلاس تزویج به طول $q(q+1)(q-4)/2$ است. پس $|G|=\left|L_2(2^n)\right|.(q-4)t/2$ که t عددی طبیعی است. در نتیجه $(q-4)=2^{n-1}-2$ اول است، بنابراین $n=3$ و این تناقض است.

۲) $G'\cong L_2(3^n)$ که $(3^n-1)/2$ و $(3^n+1)/4$ عددی اولند. حال با توجه به لم ۱ از اشرفی و صحرائی (۲۰۰۲) کلاس‌های تزویج $G'$ از مرتبه $p$ را در نظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان دید که G دارای یک کلاس تزویج به طول $q(q+1)(q-3)/4$ می باشد. بنابراین $(q-3)/4=1$ یک عدد اول است و از اینرو $(q-3)\in\{1,2,3,(q-1)/2,(q+1)/4\}$ که تناقض است.

۳) $G'\cong Sz(8)$ در این حالت $|G'|=29120$ و طبق جدول ۱ عناصر از مرتبه ۴، عناصر از مرتبه ۷ و عناصر از مرتبه ۱۳ بایستی در G یکی شوند. بنابراین $|G:G'|=3$ و $|G|=87360$. چون ۳ مرتبه $|G|$ را نمی‌شمارد، لذا $G\cong Z_3\times_\varphi Sz(8)$ که $\varphi$ یک همریختی از $Z_3$ به $Aut(Sz(8))$ می‌باشد. واضح است که $\varphi$ نمی‌تواند همریختی بدیهی باشد. بنابر اطلس گروه‌های متناهی (۱۹۸۵)، $Aut(Sz(8))$ دارای دو کلاس تزویج $3A$ و $3B=3A^{-1}$ از مرتبه ۳ است. بنابراین $Z_3\times_\varphi Sz(8)\cong Aut(Sz(8))$. در نتیجه بنابر جدول ۱، $Sz(8)$ اجتماع ۷ کلاس تزویج از $G'$ می‌باشد و این آخرین تناقض است که بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

**References**


Ashrafi, A. R., and Sahraei, H. (2002) *On finite Groups Whose Every Normal Subgroup is a Union of the Same Number of Conjugacy Classes*, J. Math. **30(3)**, 289-294.

Collins, M. J. (1990) *Representations and Characters of Finite Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Conway, J. H., curtis, R. T., Norton, S. R., Rarker, R. A., and Wilson, R. A. (1985) *ATLAS of finite groups*, Oxford univ. Press, Oxford.

Herzog, M. (1968) *On finite simple groups of order divisible by three primes only*, J. Algebra. **10**, 383-388.

Karpilovsky, G. (1992) *Group Representations,* Volume **1**, North-Holand Mathematical Studies, Vol. **175** Amesterdam.

Robinson. Derek J. S. (1996) *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Graduate Text in Mathematics; **80**, Springer-Verlag, NewYork.

Sahraei, H. (2000) *Subgroups which are a Union of Conjugacy Classes*, M.Sc. thesis, University of Kashan.

Suzuki, M. (1982) *Group Theory I*, Springer-Verlag, New York.

Shi, W. J. and Yang, W., (1984) *A new characterization of A5 and finite groups in which every nonidentiy element has prime order(Chinese)*, J. South-west Teachers College, **9(1)**, 36-40.

Shi, W. J., and Yang, C. (1992) *A class of special finite groups*, Chinese Science Bulletin, **37**., 252-253.