مجله علوم دانشگاه تهران
جلد بیست و هشتم (۱۳۸۱) شماره ۲ (۲۷۴-۲۵۹)

الگوریتمی برای مساله انتخاب با داده‌های کمی و کیفی

محمدعلی یعقوبی، حمیدرضا ملکی و ماشاله ماشین‌چی
دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان
(دریافت: ۳/ ۷ /۸۰ ؛ پذیرش: ۲۷/ ۸ /۸۱)

چکیده

یکی از روشهای برخورد با مساله انتخاب که شامل داده‌های کیفی است استفاده از برنامه ریزی کیفی می‌باشد. در نتیجه استفاده از برنامه ریزی کیفی، حل مساله انتخاب منجر به حل یک مساله برنامه ریزی صحیح می‌شود. اما در عمل دو ضعف عمده بر این نوع برخورد وجود دارد. ضعف اول زمانی است که داده‌های مساله زیاد باشند که در اینصورت با یک مساله برنامه ریزی با اندازه بزرگ مواجه می‌شویم و ضعف دیگر آن عدم توانایی بررسی وجود ناسازگاری در داده‌های مساله می‌باشد. در این مقاله الگوریتمی ارائه شده است که وقتی داده‌ها زیاد باشند از لحاظ محاسباتی و سرعت قابلیت بالایی دارد و علاوه بر آن وجود ناسازگازی در داده‌های ورودی را نیز تشخیص می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: *مساله انتخاب، برنامه ریزی صحیح، برنامه ریزی کیفی، مجموعه‌های فازی*

۱- مقدمه

زندگی روزانه ما با تصمیم‌گیری آمیخته است. یک نوع از این تصمیم‌گیری انتخاب یک گزینه از بین چند گزینه موجود می‌باشد. که معمولا این انتخاب تحت شاخصهای مختلفی صورت می‌گیرد. به عنوان مثال در انتخاب شغل ممکن است شاخصهای وجهه اجتماعی، حقوق، محل کار، شرایط محل کار، موقعیتهای پیشرفت در شغل مربوطه و غیره مد نظر قرار گیرند. اما مساله انتخاب تنها به همین خلاصه نمی‌شود بلکه در بسیاری از بخشهای جامعه از قبیل صنعت، اقتصاد، سیاست و غیره ما نیاز به انتخاب دقیق یک گزینه داریم. حل چنین مسائلی باعث به وجود آمدن شاخه‌ای به نام تصمیم‌گیری چندگانه یا MADM در علم تحقیق در عملیات شده است. روشهای مختلفی برای حل مسائل انتخاب وجود دارد که تعداد زیادی از آنها در (اصغرپور، ۱۳۷۷) و (Hwang and Yoon, 1981) بررسی شده‌اند. اما مسائل انتخابی که در عمل با آنها مواجه می‌شویم علاوه بر داده‌های کمی شامل داده‌های کیفی نیز می‌باشند. یک روش حل مساله انتخاب که شامل داده‌های کیفی است استفاده از برنامه ریزی کیفی می‌باشد. زاهدی (Zahedi, 1987) این برخورد را بررسی کرده است. روش برنامه‌ریزی کیفی در حل مساله انتخاب منجر به یک مساله برنامه ریزی صحیح می‌شود. اما از آنجایی که درعمل تعداد داده‌های ورودی مساله زیاد می‌باشند، برنامه ریزی صحیحی که از روش برنامه ریزی کیفی حاصل می‌شود به اصطلاح از اندازه بزرگ (Large Scale) یعنی با تعداد متغیرها و محدودیتهای زیاد می‌باشد. لذا الگوریتمی که جواب آن همان جواب برنامه ریزی کیفی و از لحاظ محاسباتی سریع و ساده باشد مفیدتر است. این الگوریتم توسط ملکی (Maleki, 2001) ارائه شده است. تمام مسائل انتخاب شامل داده‌های کیفی با استفاده از برنامه‌ریزی کیفی قابل حل نیستند بلکه در بعضی موارد برای برخورد با داده‌های کیفی نیاز به استفاده از مجموعه‌های فازی و روشهای فازی حل مساله انتخاب می‌باشد. در این زمینه روشهای متعددی در(اصغرپور، ۱۳۷۷) و (Chen and Hwang, 1992) موجود می‌باشد. اما هنوز یک مشکل دیگر وجود دارد و آن وجود ناسازگاری در داده‌های ورودی مساله می‌باشد که توسط هیچ یک از روشهای برنامه‌ریزی کیفی و الگوریتم ملکی بررسی نمی‌شود. در این مقاله الگوریتمی ارائه شده است که علاوه بر آنکه از سرعت و سادگی در محاسبه برخوردار است وجود ناسازگاری در داده‌های ورودی را نیز تشخیص می‌دهد.

۲- پیشنیازها

فرض‌کنید $A=\{A_1,\cdots,A_n\}$ یک مجموعه متناهی از گزینه‌ها باشد و $C_0=\{C_1,\cdots,C_m\}$ یک مجموعه متناهی از هدفها یا شاخصها باشد بطوریکه ارزش‌گذاری گزینه‌ها بر اساس این شاخصها صورت می‌گیرد. به علاوه ممکن است مجموعه $W=\{w_1,\cdots,w_m\}$ که بیانگر وزن شاخصها می‌باشد توسط تصمیم‌گیرنده مشخص شده باشد. هدف ازحل مساله انتخاب تعیین گزینه‌ای است که بیشترین ارزش را با توجه به همه شاخصها نسبت به بقیه گزینه‌ها داشته باشد. هر مساله انتخاب علاوه بر مجموعه‌های A ، C_0 و W دارای یک ماتریس داده‌های ورودی می‌باشد که با $C=[C_{ij}]$ نشان داده می‌شود. جدول۱ ماتریس داده‌های ورودی را در حالت کلی نشان می‌دهد.

جدول ۱- ماتریس داده‌های ورودی یک مساله انتخاب

شاخص / گزینه	C_1	C_2	$\cdots$	C_m
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1m}
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	C_{n1}	C_{n2}	$\cdots$	C_{nm}

عنصر ikام این ماتریس، یعنی C_{ik}، بیانگر ارزش گزینه iام نسبت به شاخص kام می‌باشد. داده‌های موجود در جدول ۱ و همچنین عناصر مجموعه W ممکن است به صورت‌های کمی یا کیفی یا به هر دو صورت مشخص شده باشند. داده‌های کیفی معمولا توسط عباراتی مانند کم، زیاد، کم و بیش، خیلی زیاد و غیره بیان می‌شوند. در این مقاله این نوع داده‌های کیفی تحت عنوان داده‌های کیفی نوع اول در نظر گرفته می‌شوند. یک برخورد با این گونه داده‌ها در بخش ۶ شرح داده می‌شود.

اما در بعضی از مسائل انتخاب جدول۱ در دسترس نیست بلکه داده‌های موجود از راه مقایسه دو گزینه نسبت به یک شاخص بدست آمده‌اند. ماتریس داده‌های ورودی در این حالت با $C^k=[C_{ij}^k]$ نشان داده می‌شود. جدول۲ یک ماتریس داده‌های ورودی را برای شاخص C_k در حالت کلی نشان می‌دهد.

جدول ۲- ماتریس داده‌های ورودی از طریق مقایسه گزینه‌ها

گزینه	A_1	A_2	$\cdots$	A_n
A_1	C_{11}^k	C_{12}^k	$\cdots$	C_{1n}^k
A_2	C_{21}^k	C_{22}^k	$\cdots$	C_{2n}^k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	C_{n1}^k	C_{n2}^k	$\cdots$	C_{nn}^k

اطلاعاتی که عنصر ijام این ماتریس، یعنی C_{ij}^k، در بر دارد به اینصورت است که وقتی بر حسب شاخص kام گزینه iام و jام مقایسه می‌شوند یا دو گزینه نسبت به هم برتری ندارند یا گزینه iام به گزینه jام برتری دارد یا برعکس. علاوه بر این، برتریها و ترجیحات جدول۲ ممکن است با شدت یا ضعف بیان شده باشند. به عنوان مثال ممکن است برحسب شاخص kام گزینه iام دو برابر نسبت به گزینه jام ترجیح داده شود یا برعکس. دراین مقاله این نوع داده‌های کیفی تحت عنوان داده‌های کیفی نوع دوم در نظر گرفته می‌شوند. واضح است که چنانچه داده‌های جدول۱ همه به صورت کمی باشند می‌توان آنها را برای هر شاخص به صورت جدول۲ تبدیل کرد. در ادامه بحث در بخش ۳ فرمولبندی مساله با استفاده از روش برنامه ریزی کیفی شرح داده خواهد شد. در بخش ۴ یک الگوریتم ارائه شده بررسی می‌شود. در بخش ۵ با تغییراتی در الگوریتم مذکور نشان می‌دهیم که بررسی وجود ناسازگاری در داده‌های ورودی با استفاده از الگوریتم جدید بسیار سادتر می‌باشد و در بخش۶ نحوه برخورد با داده‌های کیفی نوع اول با استفاده از مجموعه‌های فازی شرح داده می‌شود. در پایان برای روشن شدن الگوریتم مثالی ارائه شده است.

۳- فرمولبندی مساله انتخاب شامل داده‌های کیفی

مساله انتخابی را در نظر بگیرید که داده‌های کیفی آن از نوع دوم باشند همانطور که ذکر شد اگر داده‌های ورودی جدول ۱ همه به صورت کمی باشند می توان آنها را به داده‌های کیفی نوع دوم تبدیل کرد و داده‌های کیفی نوع اول در بخش ۶ بررسی می‌شوند. فرمولبندی مساله توسط زاهدی انجام شده است (Zahedi, 1987) و توسط ملکی تغییراتی در آن اعمال شده است

(Maleki, 2001). در اینجا فرمولبندی دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. داده‌های کیفی نوع دوم را می‌توان به صورت زیر نشان داد

$$C_{ij}^{k} > e_{ijk} C_{ji}^{k} \quad , \quad e_{jik} C_{ij}^{k} < C_{ji}^{k} \quad , \quad C_{ij}^{k} = C_{ji}^{k} \qquad (۱)$$

به این معنی که براساس شاخص kام گزینه iام ممکن است به ترتیب با شدت e_{ijk} نسبت به گزینه jام ترجیح داده شود یا گزینه jام با شدت e_{jik} نسبت بـه گزینـه iام ترجیح داده شود و یا گزینه iام بطور یکسان نسبت به گزینه jام ترجیح داده شود. با توجـه بـه اینکـه در مساله انتخاب هر گزینه یا انتخاب می‌شود یا انتخاب نمی‌شود متغیر Y_i را متناظر با گزینه iام، یعنی A_i، بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر گزینه } A_i \text{ انتخاب شود} \\ 0 & \text{اگر گزینه } A_i \text{ انتخاب نشود} \end{cases} \qquad (۲)$$

با معرفی متغیرهای X_{i1}، X_{i2}، ... ، X_{im} متناظر با m شـاخص موجـود بـرای گزینـه A_i، چنانچه انتخاب گزینه i را به عنوان انتخاب هر شاخص آن در برابر شاخصهای رقبای گزینه iام تعبیر کنیم آنگاه می‌توانیم برای $k = 1,\cdots,m$ قرار دهیم:

$$X_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر گزینه } A_i \text{ انتخاب شود} \\ 0 & \text{اگر گزینه } A_i \text{ انتخاب نشود} \end{cases} \qquad (۳)$$

اکنون(۱) را به صورت زیر می‌توان فرمولبندی کرد:

$$X_{ik} - X_{jk} + P_{ijk}^{-} - P_{ijk}^{+} = 0 \qquad k = 1,2,\cdots,m \qquad (۴)$$

که در آن P_{ijk}^{+} و P_{ijk}^{-} متغیرهای نامنفی جدیدی هستند که برای برقـراری معادلـه فـوق در نظر گرفته می‌شوند(Zahedi, 1987; Maleki, 2001). در(Maleki, 2001) نشان داده شـده کـه مساله انتخاب شامل داده‌های کیفی را می‌توان با حل مدل برنامه ریزی کیفی زیر حل کرد.

$$\max: Z = \sum_{ijk} e_{ijk} w_{ijk} P_{ijk} - \sum_{ijk} e_{ijk} w_{ijk}^{'} P_{ijk}^{'} - \sum_{ik} e_{ik} w_{ik} L_{ik} \qquad (۵)$$

$$s.t.$$

$$X_{ik} - X_{jk} + P_{ijk}^{-} - P_{ijk}^{+} = 0 \quad \forall \;\; 1 \le i < j \le n \quad k = 1,2,\cdots,m \qquad (۶)$$

$$mY_i - \left(\sum_{k=1}^{m} X_{ik} \right) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n \qquad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = c \tag{۸}$$

$$X_{ik} - L_{ik} = 0 \tag{۹}$$

برای همه گزینه‌های i که فاقد شاخص kام هستند و $i = 1,2,\cdots,n$ و $k = 1,2,\cdots,m$

$$P_{ijk}^{+} + P_{ijk}^{-} \le 1 \tag{۱۰}$$

$$X_{ik}, Y_i, P_{ijk}^{+}, P_{ijk}^{-}, L_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall \; i, j, k \tag{۱۱}$$

توجه کنید که P_{ijk} و $P_{ijk}^{'}$ دارای علامت بالای متفاوت می‌باشند و w_{ijk} وزنی است که به شاخص kام در مقایسه گزینه‌های iام و jام نسبت داده می‌شود اگرچه w_{ijk} و $w_{ijk}^{'}$ ممکن است در بیشتر حالتها مقادیر یکسانی داشته باشند اما تخصیص مقادیر متفاوت به آنها امکانپذیر است.

در مساله فوق وقتی که براساس شاخص kام گزینه iام به گزینه jام ترجیح داده می‌شود P_{ijk}^{+} که در (۶) تعریف شده با علامت مثبت در تابع هدف وارد می‌شود و $e_{ijk} w_{ijk}$ به عنوان ضریب آن می‌باشد و P_{ijk}^{-} با علامت منفی در تابع هدف وارد می‌شود و $e_{ijk} w_{ijk}^{'}$ به عنوان ضریب آن می‌باشد.

قید(۷) ما را مطمئن می‌کند انتخاب گزینه iام (یعنی $Y_i = 1$) به معنی انتخاب همه شاخصهایش نسبت به گزینه‌های دیگر است (یعنی $X_{ik} = 1$ برای همه شاخصهای $k = 1,\cdots,m$). در قید(۸)، c تعداد گزینه‌هایی که بایستی از بین n انتخاب موجود انتخاب شوند را نشان می‌دهد.

وقتی همه داده‌های قابل دسترسی را در تجزیه و تحلیل شرکت دهیم گزینه iام ممکن است علی‌رغم اینکه فاقد شاخص kام است انتخاب شود. قید (۹) به این منظور در نظر گرفته شده است اما از آنجایی که گزینه iام فاقد آن شاخص است انتخاب آن جریمه‌ای در بر دارد که جریمه آن $e_{ik} w_{ik}$ می‌باشد و با علامت منفی در تابع هدف منظور می‌شود. قید(۱۰) کران بالای P_{ijk}^{+} و P_{ijk}^{-} را در نظر می‌گیرد.

معادلات۱۱-۵ منجر به یک مقدار صفر یا یک برای متغیرها می‌شوند که این امکان را فراهم می‌آورد مساله را با تکنیک برنامه ریزی صحیح صفر و یک بتوان حل کرد اما از آنجایی که در عمل تعداد گزینه‌ها و تعداد شاخصها زیاد است لذا با یک مدل برنامه ریزی صحیح با اندازه بزرگ مواجه می‌شویم. بنابراین مانند بسیاری از مسائل بهینه‌سازی بهتر است الگوریتمی ساده و سریع برای حل اینگونه مسائل پیدا کنیم که جواب حاصل از آن با جواب حاصل از حل

برنامه‌ریزی صحیح فوق یکی باشد. چنین الگوریتمی توسط ملکی ارائه شده است که در بخش بعدی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم(Maleki, 2001).

۴- الگوریتمی برای مساله انتخاب

در این مقاله الگوریتمی که در این بخش ارائه می شود تحت نام الگوریتم۱ در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی الگوریتم۱ ماتریسهای $A^{(k)}=[a_{ijk}]$ و $L=[l_{ik}]$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$l_{ik}=\begin{cases}-e_{ik}w_{ik} & \text{اگر گزینه}\ i\ \text{فاقد شاخص}\ k\text{ام باشد}\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$a_{ijk}=\begin{cases}e_{ijk}w_{ijk} & if\ \ i<j\ ,\ C_{ij}^{k}>C_{ji}^{k}\\ -e_{jik}w'_{jik} & if\ \ i<j\ ,\ C_{ij}^{k}<C_{ji}^{k}\\ e_{ijk}w_{ijk} & if\ \ i>j\ ,\ C_{ij}^{k}>C_{ji}^{k}\\ -e_{jik}w'_{jik} & if\ \ i>j\ ,\ C_{ij}^{k}>C_{ji}^{k}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

الگوریتم۱.

گام ۱. ماتریسهای $A^{(k)}$ و L را مشخص کنید.

گام ۲. قرار دهید $A=[a_{ij}]$ که $A=\sum_{k=1}^{m}A^{(k)}$.

گام ۳. بردار $Z=[z_i]$ را با استفاده از $Z=A\times 1_{n\times 1}+L\times 1_{m\times 1}$ مشخص کنید.

گام ۴. بر اساس مقادیر z_i، $i=1,2,\cdots,n$، n گزینه داده شده را مرتب کنید.

قضیه ۱- اگر $c=1$ و $(Y^t,X^t)^t$ یک جواب شدنی برای مدل برنامه ریزی صحیح ارائه شده در بخش ۳ باشد که در آن $Y=e_{i_0}$، آنگاه مقدار تابع هدف برای این جواب مساوی i_0امین مولفه Z می‌باشد. این قضیه توسط ملکی ثابت شده است (Maleki, 2001).

قضیه فوق بیان می‌کند که گزینه بهین که با حل مدل برنامه‌ریزی صحیح تعیین می‌شود با گزینه متناظر با بزرگترین مولفه بردار Z که درگام۳ الگوریتم۱ بدست می‌آید یکی می‌باشند.

۵- تغییراتی در الگوریتم۱

الگوریتم جدید تحت عنوان الگوریتم۲ در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی الگوریتم۲ ماتریسهای $A^{(k)} = [a_{ijk}]$ و $L = [l_{ik}]$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$l_{ik} = \begin{cases} -e_{ik} w_{ik} & \text{اگر گزینه } i \text{ فاقد شاخص } k \text{ام باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$a_{ijk} = \begin{cases} e_{ijk} w_{ijk} & if \quad C_{ij}^{k} > C_{ji}^{k} \\ w_k & if \quad i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الگوریتم۲

گام۱. ماتریسهای $A^{(k)}$ و L را مشخص کنید.

گام۲. قرار دهید $A = \sum_{k=1}^{m} A^{(k)}$.

گام۳. بردار $Z = [z_i]$ را با استفاده از $Z = Z^{(1)} - Z^{(2)} + L \times 1_{m\times 1}$ مشخص کنید که در آن $Z^{(1)} = A \times 1_{n\times 1}$ و $Z^{(2)} = (1_{1\times n} \times A)^t$ می‌باشند.

گام۴. بر اساس مقادیر z_i، $i = 1,2,\cdots,n$، n گزینه داده شده را مرتب کنید.

توجه کنید که در الگوریتم ۲ ماتریس L مانند الگوریتم ۱ تعریف شده است اما تعریف ماتریسهای $A^{(k)}$ و بردار Z تغییر کرده است.

۵-۱ توجیه منطقی الگوریتم۲

با توجه به الگوریتم۲ می‌توان توجیه منطقی برای آن ارائه کرد. برای این منظور ابتدا به نحوه تعریف ماتریس $A^{(k)}$ دقت کنید. از آنجایی که هر گزینه نسبت به خودش به طور مساوی ترجیح داده می‌شود یعنی $C_{ii}^{k} = C_{ii}^{k}$ $(i = 1,\cdots,n)$ لذا تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس $A^{(k)}$ برابر وزن شاخص kام می‌باشند و a_{ijk} برای $i \neq j$ چنانچه گزینه iام به گزینه jام ترجیح داده شود مقدار $e_{ijk} w_{ijk}$ را خواهد داشت و در غیر اینصورت مقدار صفر را دارد. لذا ماتریس $A^{(k)}$ هیچ درایه منفی نخواهد داشت. $e_{ijk} w_{ijk}$ در واقع میزان مطلوبیتی است که به گزینه i نسبت به گزینه j بر اساس شاخص kام نسبت داده می‌شود. از طرفی چنانچه یکی از

درایه‌های ماتریس A، a_{ij}، را در نظر بگیریم داریم $a_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ijk}$ یعنی a_{ij} مطلوبیتی است که به گزینه i نسبت به گزینه j بر اساس تمام شاخصها نسبت داده می‌شود.

ازطرفی درگام سوم مقدار مولفه iام بردار Zرا ازرابطه $z_i=(Z^{(1)}-Z^{(2)}+L\times 1_{m\times 1})_i$ محاسبه می‌کنیم. ابتدا $Z_i^{(1)}$ که در واقع مجموع مطلوبیتهای گزینه i نسبت به بقیه گزینه‌ها می‌باشد تعیین می‌شود سپس $Z_i^{(2)}$ که مجموع مطلوبیتهای بقیه گزینه‌ها نسبت به گزینه i می‌باشد، بدست می‌آید و نهایتا وقتی که $Z_i^{(1)}-Z_i^{(2)}+(L\times 1_{m\times 1})_i$ را محاسبه می‌کنیم در حقیقت مطلوبیت خالص گزینه i نسبت به بقیه گزینه‌ها را بدست می‌آوریم. اکنون طبیعی به نظر می‌رسد گزینه‌ای که مطلوبیت خالص آن از همه بیشتر است انتخاب بهین باشد.

قضیه ۲- انتخاب بهین حاصل از الگوریتم۱ و الگوریتم۲ یکی می‌باشند.

با توجه به قضیه ۱ نتایج الگوریتم۲ و نتایج حل مدل برنامه ریزی صحیح بخش۳ یکسان می‌باشند. در رابطه با الگوریتم۲ گزاره زیر را نیز به راحتی می‌توان ثابت کرد.

گزاره ۱- فرض کنید که در الگوریتم ۲ هیچ گزینه‌ای فاقد هیچ شاخصی نیست در اینصورت مجموع مولفه‌های بردار Z صفر است.

۵-۲ ناسازگاری در داده‌های کیفی

داده‌های ورودی ممکن است شامل ناسازگاریهایی باشند که در نتیجه تجزیه و تحلیل بر روی اطلاعات جمع‌آوری شده مانند انتخاب بهین اثر می‌گذارند. اولین نوع ناسازگاری می‌تواند در ترتیب ترجیحی دو گزینه وقتی که بر اساس یک شاخص مقایسه می‌شوند به وجود آید به این معنی که ترتیب $C_{ij}^k > C_{ji}^k$ دردرایه معکوس آن ترتیب $C_{ji}^k < C_{ij}^k$ را نتیجه ندهد. وجود این نوع ناسازگاری را به راحتی می توان تشخیص داد.

ناسازگاری نوع دوم می‌تواند به دلیل فقدان خاصیت تعدی در ترتیب ترجیحی باشد به این معنی که ممکن است در مساله‌ای $C_{ij}^k > C_{ji}^k$ و $C_{jl}^k > C_{lj}^k$ باشد اما $C_{il}^k < C_{li}^k$ که این رابطه ترجیح آخر موافق دو رابطه ترجیح اول نیست. بررسی وجود یا عدم وجود ناسازگاری نوع دوم به آسانی امکانپذیر نیست. در گزاره زیر نشان می‌دهیم که تعریف خاص ماتریسهای $A^{(k)}$ در الگوریتم۲ بررسی این امر را به طرز چشمگیری آسان می‌کند. برای بررسی گزاره زیر نیاز به استفاده نوع خاصی از زیرماتریسهای ماتریس $A^{(k)}$ داریم که به صورت زیر ساخته می‌شوند چنانچه در ماتریس $A^{(k)}$ یک سطر پیدا شود که فقط یک عنصر مخالف صفر در درایه ijام

داشته باشد $A_{n-1}^{(k)}$ را زیر ماتریس $A^{(k)}$ که از حذف سطر i و ستون j بدست می‌آیـد در نظـر بگیرید. به همین ترتیب می‌توان $A_{n-1}^{(k)}$ را از روی ماتریس $A_{n-2}^{(k)}$ بدست آورد. با تکرار این رونـد به ماتریس $A_1^{(k)}$ می‌رسیم که فقط یک درایه مخـالف صـفر دارد. البتـه درصـورتی کـه شـرط ساختن این ماتریسها که وجود یک عنصر مخالف صفر می‌باشد بـرای همـه ماتریسـهای $A^{(k)}$، $A_{n-1}^{(k)}$، ...، $A_1^{(k)}$ برقرار باشد می‌توان روند فوق را انجام داد در غیر اینصورت روند فـوق متوقـف می‌شود.

گزاره۲- در الگوریتم۲ درصورت عدم وجود ناسازگاری نوع اول در داده‌های ورودی خاصیت تعـدی وجـود دارد (ناسـازگاری نـوع دوم وجـود نـدارد) اگـر و فقـط اگـر بـه ازاء هـر شـاخص $C_k\ (k=1,\cdots,m)$ تمام ماتریسهای $A^{(k)}$، $A_{n-1}^{(k)}$، ...، $A_1^{(k)}$ درای حداقل یـک سـطر باشـند که فقط یک درایه مخالف صفر داشته باشد.

واضح است که بررسی وجود ناسـازگاری نـوع دوم بـا اسـتفاده از گـزاره فـوق بسـیار آسـان می‌شود.

۶- برخورد با داده‌های کیفی نوع اول

داده‌های کیفی نوع اول را می‌توان با استفاده از مجموعه‌های فازی مدلسازی کرد. در زیر تعریف یک مجموعه فازی براساس تعریف پروفسور زاده ارائه شده است (Zadeh, 1965).

تعریف۱- فرض‌کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از X توسـط یـک تـابع عضویت $\widetilde{A} : X \to [0,1]$ مشخص می‌شود. مقدار $\widetilde{A}(x)$ بیانگر میزان عضویت x در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ است.

در عمل ما بیشتر از اعداد فازی و مخصوصا اعداد فازی ذوزنقه‌ای و اعـداد فـازی مثلثـی کـه بخش خاصی از مجموعه‌های فازی هستند برای مدلسـازی داده‌هـای کیفـی نـوع اول اسـتفاده می‌کنیم لذا در زیر تعریف اعداد فازی ذوزنقه‌ای و فازی مثلثی ارائه شده اسـت. بـرای جزئیـات بیشتر به (Nguyen, 1996) مراجعه کنید.

تعریف۲- عدد فازی ذوزنقه‌ای یک مجموعه فازی است که روی R تعریف می‌شـود و تـابع عضوت آن به صورت زیر می‌باشد

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-A^l+\alpha}{\alpha} & A^l-\alpha\le x\le A^l\\ 1 & A^l\le x\le A^u\\ \dfrac{A^u+\beta-x}{\beta} & A^u\le x\le A^u+\beta\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

که در آن α و β اعداد مثبتی هستند ک به ترتیب گسترشهای چپ و راست نامیده می‌شوند. عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\widetilde{A}=(A^l,A^u,\alpha,\beta)$ نشان داده می‌شود. چنانچه $A^l=A^u$ باشد آنگاه عدد فازی یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود.

بعد از آنکه داده‌های کیفی نوع اول بوسیله اعداد فازی مدلسازی شدند، نیاز به مقایسه آنها می‌باشد. یک دیدگاه برای مقایسه اعداد فازی تعریف یک تابع مقایسه می‌باشد (Kim&Park, 1990).

۶-۱ تعریف کردن یک تابع مقایسه

در این دیدگاه یک تابع مقایسه، $F:\overline{F}(R)\rightarrow R$ تعریف می‌شود که در آن $\overline{F}(R)$ مجموعه تمام اعداد فازی می‌باشد سپس برای هر دو عدد فازی $\widetilde{A}_i$ و $\widetilde{A}_j$:

$$\begin{cases}\widetilde{A}_i<\widetilde{A}_j & if\quad F(\widetilde{A}_i)<F(\widetilde{A}_j)\\ \widetilde{A}_i\le\widetilde{A}_j & if\quad F(\widetilde{A}_i)\le F(\widetilde{A}_j)\\ \widetilde{A}_i=\widetilde{A}_j & if\quad F(\widetilde{A}_i)=F(\widetilde{A}_j)\end{cases}$$

در زیر دو تابع مقایسه معرفی شده‌اند.

۶-۱-۱ روش مقایسه اول یاگر (Yager)

یاگر چندین روش برای مقایسه اعداد فازی پیشنهاد کرده است که یکی از آنها در این قسمت بررسی می‌شود. فرض کنید $\widetilde{A}$ یک عدد فازی باشد و $S=\{x\mid\widetilde{A}(x)>0\}$ در اینصورت تابع مقایسه این روش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(\widetilde{A})=\frac{\int_s g(x)\widetilde{A}(x)dx}{\int_s \widetilde{A}(x)dx}$$

که درآن $g(x)$ درجه اهمیت مقدار x است. اگر $g(x)=x$ آنگاه

$$F_1(\widetilde{A})=\frac{\int_s x\widetilde{A}(x)dx}{\int_s \widetilde{A}(x)dx}$$

که در اینحالت $F_1(\widetilde{A})$ مرکز ثقل عدد فازی $\widetilde{A}$ می‌باشد.

۶-۱-۲ روش مقایسه روبنز (Roubens)

تابع مقایسه روبنز برای عدد فـازی ذوزنقـه‌ای $\widetilde{A}=(A^l, A^u, \alpha, \beta)$ بـه صـورت زیـر تعریـف می‌شود:

$$F(\widetilde{A})=\frac{1}{2}(A^l+A^u+\frac{1}{2}(\beta-\alpha))$$

با استفاده از توابع مقایسه فوق می‌توان ترجیحات بین اعداد فازی را بدست آورد بـه عبـارت دیگر برای گزینه‌های یک مساله انتخاب، داده‌های کیفی نوع اول بـه داده‌هـای کیفـی نـوع دوم تبدیل می‌شوند و داده‌های کیفی نوع دوم را نیز به طور کامل در بخشهای قبلـی مـورد بررسـی قرار داده‌ایم. لذا به این ترتیب می توان مساله انتخاب شامل هر دو نوع داده‌هـای کیفـی را حـل نمود و انتخاب بهین را با استفاده از الگوریتم ۲ تعیین کرد. در بخـش بعـد بـرای روشـن شـدن موضوع مثالی ارائه شده است.

۷- یک مثال عددی

دراین بخش یک مساله انتخاب که توسط دبوا (Dubois, *et al.,* 1988) پیشـنهاد شـده اسـت را حل می‌کنیم. یک مرد جوان قصد خرید یک ماشین دست دوم را دارد. هفت ماشین دسـت دوم در یک نمایشگاه موجود می‌باشند. او چهـار شـاخص عمـر، قیمـت، مصـرف سـوخت و حـداکثر سرعت را برای انتخاب ماشین در نظر می‌گیرد. جدول ۳ داده‌های ورودی ایـن مسـاله را نشـان می‌دهد. اگر وزن چهار شاخص به ترتیب ۰/۳۲، ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۸ باشد کدام ماشین بهتر است؟

جدول ۳- داده‌های ورودی

حداکثر سرعت	مصرف سوخت	قیمت فروش	عمر	ماشین
نسبتا سریع	اقتصادی	گران	جدید	A_1
$180-200$	نسبتا اقتصادی	حدود45000 دلار	کمتراز سه سال	A_2
سریع	زیاد	بین50000 و60000 دلار	تقریبا جدید	A_3
180	بین $9-8$	کمتراز20000 دلار	حدود5 سال	A_4
نسبتا سریع	زیاد	حدود10000 دلار	$5-10$	A_5
نه خیلی سریع	اقتصادی	ارزان	قدیمی	A_6
$140-160$	خیلی اقتصادی	بین320000 و40000 دلار	جدید	A_7

در جدولهای۷-۴ داده‌های کیفی نوع اول موجود در جدول را به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای مدلسازی می‌کنیم. در این جدولها ε یک عدد مثبت خیلی کوچک در نظر گرفته شده است.

جدول۴- عمر ماشین: دامنه [۲۰و ۰]

جدید	(۱ , ε ,۱ ,۰)
تقریبا جدید	(۱, ۱ , ۲ ,۱)
کمتر از سه سال	(ε , ε ,۳ ,۰)
حدود ۵ سال	(۱ ,۱ , ε+۵ ,۵)
۱۰-۵	(ε , ε ,۱۰ ,۵)
قدیمی	(۵ ,۲ ,۱۵ ,۱۰)

جدول۵- قیمت فروش: دامنه [۱۰۰۰۰و ۵۰۰۰]

ارزان	(۵۰۰۰ , ε ,۱۰۰۰۰ ,۵۰۰۰)
حدود ۱۰۰۰۰	(۱۰۰۰ ,۱۰۰۰ ,۱۰۰۰۰ ,۹۰۰۰)
کمتر از ۲۰۰۰۰	(ε , ε ,۲۰۰۰۰ ,۰)
۴۰۰۰۰-۳۲۰۰۰	(ε , ε ,۴۰۰۰۰ ,۳۲۰۰۰)
حدود ۴۵۰۰۰	(۱۰۰۰ ,۱۰۰۰ ,۴۶۰۰۰ ,۴۴۰۰۰)
۶۰۰۰۰- ۵۰۰۰۰	(۵۰۰۰ ,۵۰۰۰ ,۶۰۰۰۰ ,۵۰۰۰۰)
گران	(ε ,۵۰۰۰ ,۱۰۰۰۰۰ ,۸۰۰۰۰)

جدول ۶- مصرف سوخت : دامنه [۱۵و ۵]

خیلی اقتصادی	(۱/۵ ,۴ ,۶ ,۵)
اقتصادی	(۱ ,۵ / ۰ ,۷ ,۶)
نسبتا اقتصادی	(۱ ,۱ ,۸ ,۷)
۹-۸	(ε , ε ,۹ ,۸)
زیاد	(ε ,۰/۵ ,۱۵ ,۹)

جدول ۷- حداکثر سرعت : دامنه [۲۲۰ و۱۱۰]

سریع	(۲۰ ,۲۰ ,۲۰۰ ,۱۸۰)
نسبتا سریع	(۲۰ ,۲۰ ,۱۸۰ ,۱۵۰)
نه خیلی سریع	(۱۰ ,۱۰ ,۱۴۰ ,۱۲۰)
۱۶۰-۱۴۰	(۲۰ ,۲۰ ,۱۶۰ ,۱۴۰)
۲۰۰-۱۸۰	(ε , ε ,۲۰۰ ,۱۸۰)

اکنون با توجه به توضیحات بخش۵ داده‌های کیفی نوع اول را با استفاده از روش مقایسه روبنـز به داده‌های کیفی نوع دوم تبدیل می‌کنیم و از الگوریتم ۲ برای تعیین انتخـاب بهـین اسـتفاده مـی‌کنـیم بـرای مثـال بـر طبـق شـاخص اول یعنـی عمـر ماشـین داریـم $F(A_1) = 0.75$ و $F(A_2) = 1.5$. از آنجا که هر چه عمر ماشین کمتر باشد ماشین مطلوبتر است لذا گزینـه۱ دو برابر نسبت به گزینه۲ برتری دارد در نتیجه در ماتریس $A^{(1)}$ درایه a_{121} برابر۰/۶۴ می‌باشد که حاصلضرب شدت ترجیح در وزن شاخص اول می‌باشد و بـه همـین ترتیـب مـی‌تـوان تمـام درایه‌های ماتریس $A^{(1)}$ و ماتریسهای $A^{(2)}$ تا $A^{(4)}$ را محاسبه کرد که نتیجه این محاسـبه در زیر نشان داده شده است.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/64 & 0/64 & 2/133 & 3/2 & 5/653 & 0/32 \\ 0 & 0/32 & 0/32 & 1/066 & 1/6 & 2/826 & 0 \\ 0 & 0 & 0/32 & 1/066 & 1/6 & 2/826 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/32 & 0/48 & 0/848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0/32 & 0/565 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/32 & 0 \\ 0 & 0/64 & 0/64 & 2/133 & 3/2 & 5/653 & 0/32 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0/394 & 0/2 & 0/244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0/322 & 0 & 0/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/775 & 0/9 & 1/1 & 0/2 & 0/2 & 0 & 0/72 \\ 1/775 & 0/9 & 1/1 & 0 & 0/2 & 0 & 0/72 \\ 2/028 & 1/028 & 1/275 & 0/228 & 0/228 & 0/2 & 0/822 \\ 0/493 & 0/25 & 0/305 & 0 & 0 & 0 & 0/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0/4 & 0/425 & 0/716 & 0/513 & 0/716 & 0/4 & 0 \\ 0 & 0/4 & 0/633 & 0/453 & 0/63 & 0/452 & 0 \\ 0 & 0 & 0/4 & 0 & 0/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/558 & 0/4 & 0/558 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0/452 & 0/716 & 0/513 & 0/716 & 0/4 & 0 \\ 0/451 & 0/51 & 0/808 & 0/578 & 0/808 & 0/451 & 0/4 \end{bmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0/8 & 0 & 0 & 0 & 0/8 & 1/015 & 0/88 \\ 0/921 & 0/8 & 0/8 & 0/844 & 0/921 & 1/169 & 1/013 \\ 0/921 & 0 & 0/8 & 0/844 & 0/921 & 1/169 & 1/013 \\ 0/436 & 0 & 0 & 0/8 & 0/436 & 0/553 & 0/96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0/8 & 1/015 & 0/88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/923 & 0/8 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که هیچ گزینه‌ای فاقد هیچ شاخصی نیست لذا ماتریس L ماتریس صفر است و گام۱ الگوریتم ۲ تکمیل شده است. در گام ۲ داریم $A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)}$ که بدسـت می‌آوریم.

$$A=\begin{bmatrix} 1/72 & 1/092 & 1/356 & 2/646 & 4/716 & 7/068 & 1/2 \\ 1/315 & 1/72 & 1/997 & 2/363 & 3/154 & 4/447 & 1/013 \\ 1/243 & 0 & 1/72 & 1/91 & 2/921 & 3/995 & 1/013 \\ 2/211 & 0/9 & 1/658 & 1/72 & 1/674 & 1/401 & 1/68 \\ 1/775 & 0/9 & 1/1 & 0 & 1/72 & 1/58 & 1/6 \\ 2/028 & 1/48 & 1/973 & 0/741 & 0/944 & 1/72 & 0/822 \\ 0/944 & 1/4 & 1/753 & 2/711 & 4/008 & 7/027 & 1/72 \end{bmatrix}$$

در گام سوم بردار $Z^{(1)}$ و $Z^{(2)}$ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$Z^{(1)}=\begin{bmatrix} 19/798 \\ 16/009 \\ 12/802 \\ 11/244 \\ 8/675 \\ 9/708 \\ 19/563 \end{bmatrix} \qquad Z^{(2)}=\begin{bmatrix} 11/236 \\ 7/492 \\ 11/557 \\ 12/591 \\ 19/137 \\ 27/238 \\ 9/048 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که L ماتریس صفر است بردار Z به صورت زیر بدست می‌آید

$$Z=Z^{(1)}-Z^{(2)}=\begin{bmatrix} 8/652 \\ 8/517 \\ 1/245 \\ -0/847 \\ -10/462 \\ -17/53 \\ 10/515 \end{bmatrix}$$

در نتیجه در گام چهارم داریم:

$$A_7 > A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 > A_6$$

که در آن " < " بیانگر " ترجیح داده می‌شود به " می‌باشد. یعنی ماشین هفت برای فرد مورد نظر مناسبترین ماشین می‌باشد.

مراجع

Chen, S.J., and Hwang, C.L., (1992) *Fuzzy multiple attribute decision making,* Springer-Verlag.

Dubois, D., Prade, H. and Teskmole, C., (1988) *Weighted fuzzy pattern matching,* Fuzzy Sets and Systems, **28,** 313-331.

Hwang, C.L., and Yoon, (1981) *Multiple attribute decision making,* Springer-Verlag.

Kim, K. and Park, K.S., (1990) *Ranking fuzzy numbers with index of optimism,* Fuzzy Sets and Systems, **35,** 143-150.

Maleki, H. R., (2001) *An algorithm for a selection procedure,* Europen Journal of Operational Research, **128,** 674-678.

Nguyen, H. and Walker, E., (1996) *A first course in fuzzy logic,* Bocaraton, CRC Press.

Zadeh, L.A., (1965) *Fuzzy sets,* Information and Control, **8,** 338-353.

Zahedi, F., (1987) *Qualitative programming for selections,* Copmput. Opns. Res., **14 (5),** 395-407.

اصغرپور، م. ج.، (۱۳۷۷) تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، انتشارات دانشگاه تهران.