مجله علوم دانشگاه تهران
جلد بیست و هفتم (۱۳۸۰) شماره ۲ (۲۵۴-۲۳۵)

حل عددی معادلات انتگرالی فردهولم نوع دوم به روش چند شبکه‌ای

غلامحسین ارجائی- مجید حسن زاده
بخش ریاضی- دانشگاه شیراز
erjaee@sun01.susc.ac.ir
(دریافت: ۷۹/۵/۱ ؛ پذیرش: ۸۰/۹/۲۶)

چکیده

روشهای چند شبکه‌ای نوع خاصی از روشهای تکراری هستند که از سرعت همگرائی بالائی برخوردارند. اساس این روش بر تغییر اندازه‌ی شبکه‌ها استوار است. در این روش ابتدا روی شبکه‌های درشت (Coarse Grid) خطای مسألهٔ همواره شده،که در این صورت گویند جواب مسئله ترمیم (Smoothing) شده است. در مرحله‌ی بعد مسأله را روی شبکه‌ی ظریفتر حل می‌کنند. حل مسأله روی شبکه‌های درشت و ظریف تا آنجا ادامه دارد تا به یک جواب قابل قبول برسیم. از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی، به ویژه معادلاتی که جواب تحلیلی ندارند، استفاده می‌شود. در این مقاله حل عددی معادلات انتگرالی فردهولم نوع دوم را به کمک روش چند شبکه‌ای مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بدین منظور به کمک الگوریتمهای تنظیم شده، برنامه‌ای کامپیوتری به زبان فورترن نوشته‌ایم که قادر است این معادلات انتگرالی را با هسته‌های مختلف حل نماید.

واژه‌های کلیدی: *معادلات انتگرالی، روش‌های عددی چند شبکه‌ای.*

۱ مقدمه

در سالهای اخیر پیشرفتهای زیادی برای حل عددی مسائل چند بعدی، به عنوان نمونه معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و مکان، که منجر به حل دستگاههای معادلات خطی با بعد بالا می‌شوند انجام گرفته است. با وجود کامپیوترهای مدرن و پیشرفته هنوز هم نیاز به روشهای عددی جدید با همگرائی بالا احساس می‌شود. برای نمونه یک گام در جهت این پیشرفتها، توسعه روشهای تکراری سریع برای حل معادلهٔ پواسن در ۶۰ سال اخیر می‌باشد(Briggs, 1993 Hakbush, 1985).

روشن است که بسیاری از مسائل علوم و مهندسی طبیعتی محاسباتی دارند، برای نمونه طراحی مولکولهای بزرگ، اجرام چگال و برخی از فرایندهای شیمیایی، فقط با محاسبات عددی قابل دسترسی هستند. یکی از مهترین روش‌های عددی که در سالهای اخیر مورد استفاده قرار گرفته روش چند شبکه‌ای است. روشهای چند شبکه‌ای روشهای خطی سریعی هستند که روی نمونه‌های چند سطحی یا چند مختصاتی پایه‌گذاری شده‌اند. این روش را می‌توان به کمک هر یک از روشهای گسسته سازی (Discretization)، یعنی روش‌هایی که انتگرال را به مجموع و مشتق را به تفاضل تبدیل می‌کند، برای حل مسائل به کار برد. اصول این روش بدین صورت است که ابتدا روی شبکه‌های درشت، حدس اولیه را ترمیم کرده و سپس روی شبکه‌های درشت یا ریز دیگر، که به نوع مسأله بستگی دارد، جواب مسأله را تقریب می‌زنیم. این کار روی خطای مانده‌ای (Residual Error) چندین مرحله صورت می‌گیرد که در این حال می‌گوییم خطا را همواره کرده‌ایم. پس از آن یک تقریب جدید برای مسأله بدست می‌آوریم و تکرار تا آنجا انجام می‌شود که به جواب مورد قبول یا نزدیک به آن برسیم. در این مقاله به کمک برنامه‌ی کامپیوتری که به زبان فورترن نوشته شده، از این روش برای حل عددی معادلات انتگرالی فردهولم نوع دوم استفاده خواهیم کرد. بنابراین ابتدا نکاتی در رابطه با این انتگرال و روشهای مختلفی برای‌حل تحلیلی‌آن مورد بحث قرار می‌دهیم (Krishnamurthy *et al.,* 1993).

بطور کلی یک معادلهٔ اننگرالی فردهولم نوع دوم بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(t) = x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds \,. \qquad (۱)$$

دقت شود که حدهای a و b را می‌توان نامتناهی انتخاب کرد. تابع $x(t)$ عنصرمجهول، $y(t)$, $K(t,s)$ توابع معلوم بوده و s,t متغیرهای حقیقی در بازه‌ی $[a,b]$ می‌باشند. λ نیز یک عامل خطی است . تابع $K(t,s)$ هسته‌ی (Kernel) معادلهٔ انتگرالی نام دارد.

۲ روشهای تحلیلی برای حل معادله‌های انتگرالی فردهولم

روشهای تحلیلی متعددی برای حل معادلهٔ انتگرالی (۱) وجود دارد. از جمله این روشها می‌توان روش دترمینانهای فردهولم، روش هسته‌های مکرر (Iterated Kernel Method) و روش حل برای معادلات انتگرالی با هسته‌های تباهیده (Degenarated Kernels) را نام برد (Krasnov, 1976). هر کدام از این روشها در عمل دشواریهای خود را دارند. در اینجا برای اینکه دشواری روش‌های تحلیلی مشخص شود، روش دترمینالهای فردهولم را به طور مختصر آورده‌ایم.

روش دترمینانهای فردهولم

در این روش معادلهٔ (۱) را با معادلهٔ

$$x(t) = \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda)y(s)d(s) + y(t), \qquad (۲)$$

تقریب می‌زنیم که $R(t,s;\lambda)$ هسته‌ی حلال (Resolvent Kernel) معادلهٔ (۱) نامیده می‌شود و به صورت

$$R(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (۳)$$

با شرط $D(\lambda) \neq 0$ تعریف می‌گردد. $D(t,s;\lambda)$ و $D(\lambda)$ سریهای توانی به صورت زیر می‌باشند.

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, D(t,s;\lambda) = K(t,s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(t,s \qquad (۴)$$

که ضرایب B_n و C_n توسط رابطه‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$B_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,s_1) & \dots & K(t,s_n) \\ K(s_1,s) & K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(s_n,s) & K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1, \qquad (۵)$$

$$C_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(s_n,s_1) & K(s_n,s_2) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_n \qquad (٦)$$

که $B_0 = K(t,s), n \geq 1$ و $C_0 = 0$ تابع D فردهولم جزء و $D(\lambda)$ دترمینان فردهولم جزء نامیده می‌شوند. وقتی K(t,s) پیوسته باشد یا اینکه $\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dtds < \infty$ سریهای تعریف شده در (۴) همگرایند. با شرط فوق $D(\lambda)(\neq 0)$ و $D(t,s;\lambda)$ و $R(t,s;\lambda)$ توابعی تحلیلی از λ می‌باشند (Krasnov, *et al.,* 1976).

در زیر مثالی را حل می‌کنیم ، تا چگونگی بکارگیری این روش برای حل معادلهٔ (۱) مشخص شود.

مثال ۱- می‌خواهیم دترمینانهای فردهولم را برای یافتن هسته‌ی حلال، با $K(t,s) = te^s$، در صورتیکه $a = 0$ و $b = 1$ بدست آوریم.

برای حل ابتدا باید ضرایب B_n و C_n را محاسبه نماییم. بنابراین داریم:

$$B_0(t,s) = K(t,s) = te^s,$$

$$B_1(t,s) = \int_0^1 \begin{vmatrix} te^s & te^{s_1} \\ s_1 e^s & s_1 e^{s_1} \end{vmatrix} = ds_1 ds_2 = 0,$$

$$B_2(t,s) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} te^s & te^{s_1} & te^{s_2} \\ s_1 e^s & s_1 e^{s_1} & s_1 e^{s_2} \\ s_2 e^s & s_2 e^{s_1} & s_2 e^{s_2} \end{vmatrix} = ds_1 ds_2 = 0.$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $B_n(t,s) = 0$، برای $n = 2,3,\dots$.

از طرفی،

$$C_1 = \int_0^1 K(s_1,s_1) ds_1 = \int_0^1 s_1 e^{s_1} ds_1 = 1$$

$$C_2(t,s) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} s_1 e^{s_1} & s_1 e^{s_2} \\ s_2 e^{s_1} & s_2 e^{s_2} \end{vmatrix} ds_1 ds_2 = 0,$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که $C_n = 0$، برای $n = 2,3,...$. پس $D(\lambda) = 1 - \lambda$، $D(t,s;\lambda) = te^s$ و $R(t,s;\lambda) = \dfrac{te^s}{-\lambda}$ که برای $R, \lambda \neq 1$ تابعی تحلیلی است. بنابراین به ازای $y(t) = \exp(-t)$ داریم:

$$x(t) = \exp(-t) + \lambda \int_0^1 \frac{t}{1-\lambda} ds = \exp(-t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} t.$$

در همه روشهای تحلیلی، همانند روش بالا، به محاسبه‌ی سریهایی نظیر (۴) نیاز داریم. محاسبه‌ی این سریها درحالت کلی کاری دشوار و برای بعضی از معادلات غیر ممکن می‌باشد. کراسنو در کتاب خود چند معادلهٔ انتگرالی به روش دترمینانهای فردهولم و روشهای تحلیلی دیگرحل کرده است(Krasnov, 1976). دشواری محاسبه‌ی هسته‌های حلال را می‌توان در حل تحلیلی این معادلات انتگرالی مشاهده نمود. تنها برای حالتهای خاص مانند مثال ۱، که سریها به راحتی قابل محاسبه‌ی هستند، با بکار بردن این روشها نتایج خوبی بدست می‌آید. اگر هسته‌ی معادلهٔ (۱) بگونه‌ای باشد که محاسبه‌ی سریهای (۴) به راحتی قابل محاسبه نباشند، روشهای تحلیلی کارایی خود را از دست می‌دهند.

مثالهای که در بخش ۵، به کمک برنامه‌ی کامپیوتری ارایه شده در این مقاله، حل شده‌اند جوابهایی به صورت تابع نمایی‌دارند(Kress, 1995) . محاسبه‌ی جواب این معادلات با استفاده از روش تحلیلی فوق به صورت دقیق امکان‌پذیر نیست، زیرا محاسبه‌ی سریهای (۴) به طور دقیق ممکن نیست. بنابراین به کمک روش عددی چند شبکه‌ای، حل این مثالها امکان‌پذیر خواهد بود.

برای حل این معادلهٔ (۱) به کمک روشهای عددی، ابتدا آن را به حالت گسسته تبدیل می‌کنیم. برای این منظور در زیر یک روش گسسته سازی را برای این معادلات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳ گسسته سازی

یکی از روشهای گسسته‌سازی برای حل عددی معادلهٔ (۱) روش نیستروم (Nystrom) است. در این روش با فرض $K \in C^1(D \times D), D = [0,1], n_1 = 2^l n_0, h_l = \dfrac{1}{n_l}$، $l = 1,2,...$ و $n_0 \in N$، جواب مسأله، که یک تابع x_j وابسته به شبکه‌ی تعریف شده روی $D_l = \{0, h_l, 2h_l, ..., 1 - h_l, h_l\}$ می‌باشد، از حل دستگاه معادلات خطی

$$x_l(t) = h_l \sum_{s \in D} w(s) K(t,s) x_l(s) + y(t) \qquad (۷)$$

بدست می‌آید. در دستگاه (۷) w(s) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(s) = \begin{cases} 0.5 & s = 0,1 \\ 1, & s \neq 0,1. \end{cases}$$

دستگاه (۷) را در شکل ماتریسی می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$X_l = K_l X_l + y_l \qquad (۸)$$

در اینجا K_l ماتریس پارامتر گسسته‌سازی نام دارد. همانگونه‌که مشاهده می‌شود، روش‌های‌گسسته‌سازی منجربه حل دستگاهی به‌صورت $Ax = y$ می‌شوند. درحالت خاص برای معادلهٔ(۸) ، $A = (\lambda I - K_l)$ می‌باشد (Atkinson, 1997; Briggs, 1993; Hakbush, 1985).

پس از گسسته‌سازی به بررسی الگوریتمهای روش چند شبکه‌ای می‌پردازیم.

۴چند الگوریتمهای روش شبکه‌ای

برای حل $Ax = y$ روشهای عددی فراوانی وجود دارد، ولی در تمام این روشها آنچه حائز اهمیت است، انتخاب حدس اولیه مناسب برای جواب مسأله می‌باشد. به کمک الگوریتم زیر می‌توان یک حدس اولیه‌ی مناسب را بدست آورد.

۴-۱ الگوریتم ترمیم حدس اولیه

در این روش با یک حدس اولیه‌ی دلخواه به عنوان جواب تکرار را شروع می‌کنیم. پس از انجام تکرارهای مقدماتی روی شبکه‌های درشت و ترمیم این حدس، از نتیجه به عنوان حدس اولیه روی شبکه‌های ظریف استفاده می‌کنیم. ترمیم بر روی شبکه‌های درشت از لحاظ حافظه رایانه و زمان مقرون به صرفه است، چون تعداد مجهولهای کمتری برای جایگزینی مقادیر قبلی وجود دارد.

در این قسمت به بیان الگوریتم ترمیم حدس اولیه برای یافتن جواب اولیه‌ی مناسب می‌پردازیم. در الگوریتهای زیر اندیسهای بکار رفته، وابسته به نوع شبکه‌ای است که از آن استفاده می‌گردد. برای نمونه D_{2l} شبکه‌ای است که ۲ برابراز D_l درشت‌تر است. الگوریتم ترمیم حدس اولیه برای حل دستگاه $Ax = y$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

- ترمیم $Ax = y$ روی یک شبکه خیلی درشت با یک حدس اولیه‌ی دلخواه.

$\vdots$

- ترمیم $Ax = y$ روی شبکه‌ی درشت.

$\vdots$

- ترمیم $Ax = y$ روی D_{4l} برای بدست آوردن حدس اولیه برای شبکه D_{2l}.
- ترمیم $Ax = y$ روی D_{2l} برای بدست آوردن حدس اولیه برای شبکه D_l.
- ترمیم $Ax = y$ روی D_l برای بدست آوردن حدس اولیه برای حل مسأله.

استفاده از شبکه‌های درشت برای بدست آوردن حدس اولیه مناسب تکرار تودرتو (Nested iteration) نامیده می‌شود (Briggs, 1993).

۴-۲ الگوریتم تصحیح روی شبکه‌ی درشت (Coarse Grid Correction)

یک روش دیگر برای بهبود بخشیدن جواب، ترمیم روی خطا یعنی e می‌باشد. فرض کنیم v جواب تقریبی و e جواب دقیق مسأله باشد، آنگاه $e = x - v$ خطای جواب نامیده می‌شود. معادلهٔ $Ae = r$ را معادلهٔ خطا و r خطای مانده‌ای نام دارد. بردار r توسط رابطه $r = y - Av$ مشخص می‌شود. استفاده از خطای مانده برای بهبود بخشیدن جواب، ترمیم خطا نامیده می‌شود. از ترمیم خطا برای تصحیح جواب روی شبکه‌ی درشت استفاده می‌گردد. الگوریتم این روش بشرح زیر است:

- ترمیم $Ax = y$ روی D_l برای بدست آوردن یک تقریب برای جواب اولیه v_l.
- محاسبه‌ی خطای مانده‌ای یعنی $r = y - Av$..
- ترمیم $Ae = r$ روی D_{2l} برای بدست آوردن یک تقریب برای e_{2l}.
- تصحیح تقریب بدست آمده روی D_l با خطای بدست آمده نهائی روی D_{2l}، یعنی $v_l \leftarrow v_l + e_{2l}$ (Briggs, 1993, Hakbush,1985).

با تکرار الگوریتم بالا، به الگوریتمی می‌رسیم که V-Cycle نام دارد. در این مطالعه در نوشتن برنامه‌ی کامپیوتری از این الگوریتم نیز استفاده شده است. صورت کلی این الگوریتم برای حل دستگاه $Ax = y$ به صورت زیر است.

۴-۳ الگوریتم V-Cycle روش چند شبکه‌ای

فرض کنیم $Q > 1$ شبکه وجود دارد و L_1 درشت ترین شبکه باشد که $L = 2^{Q-1}$. با این فرض الگوریتم روش چند شبکه‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

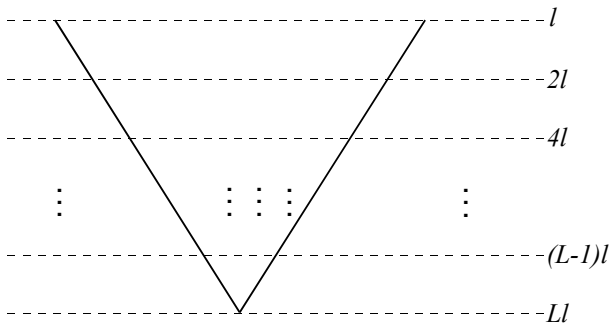
$v_l \leftarrow V-Cycle(v_l, y_l)$

- ترمیم $\mu_1, A_l x_l = y_l$ مرتبه با حدس اولیه v_l.
- $y_{2l} \leftarrow l_l^{2l} r_l$.
- ترمیم $A_{2l} x_{2l} = y_{2l}$ ، μ_1 مرتبه با حدس اولیه $v_{2l} = 0$.
- $v_{4l} \leftarrow l_{2l}^{4l} r_{2l}$.
- ترمیم $A_{4l} x_{4l} = y_{4l}$ ، μ_1 مرتبه با حدس اولیه $v_{4l} = 0$.
- $y_{8l} \leftarrow l_{4l}^{8l} r_{4l}$.

$\vdots$

- $A_{Ll} x_{Ll} = y_{L1}$
- تصحیح $v_{4l} \leftarrow v_{4l} + l_{8l}^{4l} v_{8l}$.
- ترمیم $A_{4l} x_{4l} = y_{4l}$ ، μ_2 مرتبه با حدس اولیه v_{4l}.
- تصحیح $v_{2l} \leftarrow v_{2l} + l_{4l}^{2l} v_{2l}$.
- ترمیم $A_{2l} x_{2l} = y_{21}$ ، μ_2 مرتبه با حدس اولیه v_{2l}.
- تصحیح $v_l \leftarrow v_l + l_{2l}^{l} v_l$.
- ترمیم $A_l x_l = y_1$ ، μ_2 مرتبه با حدس اولیه v_l.

الگوریتم بالا را با توجه به تبدیل شبکه‌های ظریف و درشت به یکدیگر، بصورت شکل ۱ نمایش می‌دهند (Briggs,1993):



شکل ۱- روش V-Cycle

برای حل دستگاه معادلات خطی، صورتهای دیگری از روش چند شبکه‌ای وجود دارد. این روشها با توجه به نوع تغییر شبکه‌ها بوجود آمده‌اند.یکی از کاملترین این الگوریتمها μ -Cycle می‌باشد (Briggs, 1993) توضیح این الگوریتم در بخش زیر آمده است.

۴-۴ الگوریتم μ – Cycle

این الگوریتم یک برنامه‌ی بازگشتی به صورت زیر می‌باشد:

$v_l \leftarrow M\mu_l(v_l, y_l)$

۱- ترمیم روی $A_l x_l = y_l$ ، μ_l مرتبه با حدس اولیه v_l.

۲- اگر D_l درشت‌ترین شبکه است برو به گام ۴،

- در

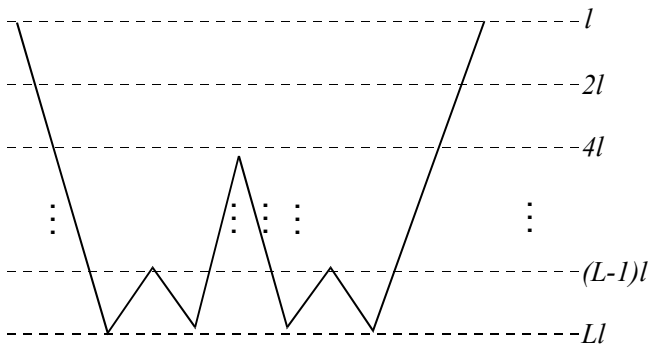
غیراینصورت $y_{2l} \leftarrow l_2^{2l}(y_l - A_l y_l)$ ، $v_{2l} \leftarrow 0$ و $v_{2l} \leftarrow M\mu_{2l}(v_{2l}, y_{2l})$.

μ مرتبه.

۳- تصحیح $v_l \leftarrow v_l + I_{2l}^{l} v_{2l}$.

۴- ترمیم $A_l x_l = y_l$ ، μ_2 مرتبه با حدس اولیه v_l.

الگوریتمی که بیان شد به ازای $\mu=1$، الگوریتم V-Cycle است، این الگوریتم به ازای $\mu=2$، W-Cylce نامیده می‌شود. الگوریتم $W-Cylce$ را به صورت شکل ۲ نمایش می‌دهند.



شکل ۲- روش W-Cylce

در مورد مقادیر بهینه μ_1 و μ_2 در الگوریتمهای فوق در بخش ۷-۴ بحث خواهد شد.

۴-۵ روش تکرار دوشبکه‌ای

در بخش ۳-۴ الگوریتمی برای روش دوشبکه‌ای به نام $V-Cylce$ بیان کردیم. این الگوریتم دارای دو مرحله‌ی تصحیح و ترمیم بود. در زیر این الگوریتم را بصورت دقیق‌تر بیان می‌کنیم.

تکرار دوشبکه‌ای برای حل دستگاه $A_l x_l = y_l$.

۰۱گام هموار کردن

- $\hat{x}_l = \psi_l^{\upsilon}\left(x_l^{(j)}, y_l\right)$، ($\psi$ نشان‌دهنده‌ی یکی‌از روشهای تکرار مانند گوس-سدل و $\hat{x}$ جواب تصحیح‌شده با این‌روش می‌باشد (Borden, *et al*., 1978; Krishnamurthy *et al*., 1993).

۰۲گام تصحیح روی شبکه‌ی درشت

- $d_l \leftarrow Ax_l - y_l$، (محاسبه‌ی خطای مانده‌ای).
- $d_{l-1} \leftarrow Rd_l$، (انتقال از فضای D_l به فضای D_{l-1}).
- $v_{l-1} \leftarrow A_{l-1}^{-1} d_{l-1}$، (یافتن جواب مسأله روی شبکه درشت).
- $x_l^{j+1} \leftarrow \hat{x}_l - Pv_{l-1}$، (تصحیح مقدار قبلی $\hat{x}_l$ که در گام ۱ بدست آمده است).

قسمت تصحیح روی شبکه درشت را می‌توان به صورت مختصر زیر نمایش داد:

$$x_l^{j+1} = \hat{x}_l - PA_{l-1}^{-1} R\left(A_l x_l - y_l\right). \qquad (۹)$$

ماتریسهای P و R به ترتیب ماتریسهای تطویل (Prolongation) و تحدید (Restriction) می‌باشند. این ماتریسها مانند عملگر I، برای انتقال ماتریسها و بردارها، از یک فضا به فضای دیگری با بعد متفاوت بکار می‌روند. این ماتریسها را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که در همگرایی الگوریتمهای روش چند شبکه‌ای تأثیر نداشته باشد. این شرایط را می‌توان در مرجع (Hakbush, 1985) دید. اگر ماتریسهای P و R در شرط $\|P\| \le 1$ و $\|R\| \le 1$ صدق کنند، چون $\left\|P A_{l-1}^{-1} R\right\| \le \|R\| \left\|A_{l-1}^{1}\right\| \|R\|$، الگوریتم بالا همگرا خواهد بود.

تذکر- عدد μ در گام هموار کردن آورده شده نشان دهنده‌ی تعداد تکرارهای انجام شده در آن مرحله می‌باشد. در مورد مقدار بهینه این عدد در بخش ۷-۴ بحث شده.

قضیه‌هایی نیز وجود دارد که همگرایی روش گسسته‌سازی و الگوریتمهای روش چند شبکه‌ای را، برای حل عددی معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع دوم، تحت شرایط قضیه تضمین می‌کند (Atkinson, 1997; Kress, 1995). در این مقاله ما قضیه‌ی اساسی که وجود جواب برای معادلهٔ انتگرالی را تضمین می‌کند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱- فرض کنید $K(t,s)$ روی D پیوسته باشد و در شرط $\max_{t\varepsilon D}\int_D |\lambda K(t,s)|ds < 1$ صدق کند. در اینصورت برای هر y عضو C(D)، معادلهٔ انتگرالی $x(t)-\lambda\int_D K(t,s)x(s)ds = y(t)$ دارای جواب یکتای $x\in C(D)$ می‌باشد.

حالت کامل‌تر این قضیه در مرجع آمده است(Kress, 1995).

در بخش زیر الگوریتمهای روش دوشبکه‌ای را برای معادلهٔ انتگرالی (۱)، که با روش نیستروم به دستگاه معادلات خطی تبدیل شده است، بیان می‌کنیم.

۶-۴ تکرار دوشبکه‌ای برای روش نیستروم

معادلهٔ انتگرالی (۱) را در نظر می‌گیریم. این معادله در مرجع(Atkinson, 1997) به صورت

$$y(t)=\lambda x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds \qquad (۱۰)$$

است. توجه شود که تفاوت دو معادلهٔ (۱) و (۱۰) در یک مقدار ثابت λ می‌باشد. بنابراین با توجه به معادلات و الگوریتمهای موجود در مرجع (Atkinson, 1997)، در این بخش از معادلهٔ (۱۰) استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم رابطه‌ی تقریب

$$\int_D g(s)\,ds \cong \sum_{j=1}^{n_l} w_{lj}\, g(t_{lj}), \qquad (۱۱)$$

برای هر g عضو C(D) همگرا باشد. عملگر انتگرال را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$, K_l(x(t))=\sum_{j=1}^{n_l} w_j K(t,t_{lj})x(t_{l,j}) \qquad (۱۲)$$

که $t\in D$ $x\in C(D)$, و $l\geq 1$، تقریب نیستروم برای $(\lambda I-K)x=y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda x_l(t)-\sum_{j=1}^{n_l} w_j K(t,t_{l,j})x_l(t_{l,j})=y(t). \qquad (۱۳)$$

رابطه‌ی (۱۳) به صورت معادلهٔ عملگری $(\lambda-K_l)x_l=y$ نمایش داده می‌شود. دستگاه معادلات

$$\lambda x_l(t_{l,i})-\sum_{j=1}^{n_l} w_j K(t,t_{l,j})x_l(t_{l,j})+y(t_{l,j}). \qquad (۱۴)$$

معادل است با دستگاه معادلات

$$x_l(t_{l,i}) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n_l} w_j K(t_{l,i}, t_{l,j}) x_l(t_{l,j}) + y(t_{l,i})\right]. \qquad (۱۵)$$

فرض کنیم $x_l^{(0)}$ یک تخمین اولیه‌ی برای جواب x_l از معادلهٔ (۱۵) باشد. خطای مانده‌ای را برای (۱۳) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r^{(0)} = y - (\lambda - K_l) x_l^{(0)}. \qquad (۱۶)$$

از رابطه‌ی (۱۶) می‌توان نتیجه گرفت که، $r^{(0)} = (\lambda - K_l)(x_l - x_l^{(0)})$. و از آنجا خطای تقریب به صورت دستگاه

$$(x_l - x_l^{(0)}) = (\lambda - K_l)^{-1} r^{(0)} \qquad (۱۷)$$

بدست می‌آید. مقدار $(\lambda - K_l)^{-1} r^0$. را می‌توان به روشهای مختلفی تخمین زد. در نهایت نوع روش تکراری به این تخمین بستگی دارد. در بخش زیر یکی از این روشها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. روشهای دیگر و قضایای مربوط به آن را می‌توانیم در مرجع(Atkinson, 1997) ببینیم.

۱-۶-۴ روش تکراری چندشبکه‌ای با استفاده از گسسته‌سازی نیستروم

فرض کنیم به ازای یک مقدار $m \le l$، بتوان معادلهٔ تقریب معنی $(\lambda - K_m) x_m = y$ را بطور مستقیم حل نمود. برای معادلهٔ خطا تقریب زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(\lambda - K_m)^{-1} r^{(0)} \cong (\lambda - K_l)^{-1} r^{(0)}. \qquad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۸) جواب معادله در مرحله‌ی اول را می‌توان به صورت $x_l^{(1)} = x_l^{(0)} + (\lambda - K_m)^{-1} r^{(0)}$ نوشت. توجه شود که در حالت کلی تکرار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} r^{(k)} = y - (\lambda - K_l) x_i^{(k)} \\ x_l^{(k+l)} = x_l^{(k)} + (\lambda - K_m)^{-1} r^{(k)}, k = 0,1,2,... \end{cases}. \qquad (۱۹)$$

این تکرار وقتی m به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد همگرا خواهد بود. در قضیه‌ی زیر شرایط همگرایی این روش تکراری را بیان می‌کنیم.

قضیه-۲ فرض کنیم معادلهٔ عملگری $(\lambda - K)x = y$ حاصل از معادلهٔ (۱۳) به صورت یکتا حل‌پذیر باشد. همچنین برای هر y عضو $C(D)$، $K(x,y)$ عضو $C(D \times D)$ باشد. بعلاوه برای هر g عضو $C(D)$، رابطه‌ی $\int_D g(s)\,ds \cong \sum_{j=1}^{n_l} w_{l,j} g(t_{l,j})$ همگرا باشد. آنگاه اگر m، به

اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود، رابطه‌ی (۱۹) همگرا خواهد بود. یعنی $x_l^{(k)} \to x_l$ وقتی $k \to \infty$ برای هر l که $l > m$.

اثبات این قضیه در (Atkinson, 1997 ص ۲۵۱) آمده است.

۴-۷ تحلیل خطا در روش چندشبکه‌ای

با توجه به اینکه قضیه ۲ شرایط همگرایی روش تکراری بکار برده شده را بیان می‌کند، اما بطور کلی تحلیل همگرایی و خطا در روش‌های چندشبکه‌ای بسیار دشوار است. در این رابطه بسیاری از مسائل و جزئیات آن هنوز مورد بحث و از مسائل باز در این روش می‌باشد. در این بخش ما تنها در مورد کیفیت بکارگیری روش‌های چند شبکه‌ای در مسائل خوش رفتار (بعنوان مثال یک سیستم با ماتریس ضرایب متقارن یا اکیدا" مثبت) بحث خواهیم کرد. کاربرد روش چندشبکه‌ای در اینگونه مسائل بسیار باصرفه بوده و همگرایی آنها را نیز می‌توان ثابت نمود.

ابتدا همانگونه که در بسیاری از کتابهای آنالیز عددی یافت می‌شود و در قضیه ۲ نیز اشاره گردید، شرط همگرایی روش‌های تکراری بکار برده شده در سطح الگوریتمهای چندشبکه‌ای را می‌توان بصورت زیر خلاصه نمود.

بطور کلی می‌توان روش تکرار را در هر سطح به صورت زیر نشان داد.

$$x^1 = Px^0 + g, \qquad (۲۰)$$

که در اینجا p که ماتریس تکرار و $x^0 \in R^n$ یک حدس اولیه می‌باشد. حال اگر فرض کنیم این تکرار به جواب مسأله یعنی x همگرا باشد آنگاه داریم:

$$x = Px + g. \qquad (۲۱)$$

از تفاضل دو رابطه (۲۰) و (۲۱) داریم: $e^1 = Pe^0$ و از آنجا بعد از n تکرار $e^n = P^n e^0$ و یا

$$\|e^n\| \le \|P\|^n \|e^0\|. \qquad (۲۲)$$

بنابراین اگر $\|P\| < 1$ باشد آنگاه برای مقادیر بزرگ n خطا به سمت صفر میل خواهد کرد. بدیهی است که با استفاده از این موضوع می‌توان مقادیر بهینه μ_1، μ_2 و μ را در الگاریتم روش چندشبکه‌ای (۳-۴، ۴-۴ و ۵-۴) بدست آورد. جهت این منظور میدانیم که شعاع طیفی ماتریس P عبارتست از $\rho(P)=\max_i|\lambda_i(P)|$ که در آن $\lambda_i(P)$ مقدار ویژه ماتریس P میباشد. در بسیاری از منابع مثل(Atkinson, 1989) نشان داده شده است که $\lim_{n\to\infty} P^n = 0$ اگر و تنها اگر $\rho(P)<1$.

بنابراین اگر $\rho(P)<1$ باشد روش تکرار که توسط P انجام می‌پذیرد، به ازاء هر مقدار اولیه همگرا خواهد بود. مقدار $\rho(P)$ را نیز ضریب همگرایی نامند. با استفاده از این ضریب است که مقادیر بهینه μ_1 و μ_2 را میتوان بدست آورد. به عنوان مثال اگر لازم باشد خطا به میزان 10^{-d} کم شود، در صورتیکه μ کوچکترین عددی باشد که

$$\frac{\|e^{\mu}\|}{\|e^{0}\|}\leq 10^{-d}$$

آنگاه این شرط هنگامی برقرار است که (تقریبا) داشته باشیم:

$$|\rho(P)|^{\mu}\leq 10^{-d}. \qquad (۲۳)$$

با حل این نامساوی برای μ داریم:

$$\mu\geq -\frac{d}{\log_{10}[\rho(P)]}.$$

مقدار $-\log_{10}\rho(P)$ را نرخ همگرایی گویند. مشاهده میشود هنگامیکه $\rho(P)$ به یک نزدیک می‌شود، نرخ همگرایی افزایش می‌یابد.

همانگونه که از بحث بالا مشاهده میشود ضریب همگرایی برای روش‌های استاندارد موجود کوچک و مستقل از فاصله شبکه h می‌باشد.

حال مقدار بهینه h (فاصله شبکه) در یک روش چند شبکه‌ای با همگرایی مناسب را مورد بررسی قرار میدهیم. جهت این منظور فرض کنیم حل سیستم $Ax = y$ مورد نظر باشد. پس از گسسته سازی، این سیستم به صورت $A_h x_h = y_h$ در شبکه D_h خواهد بود. حال اگر v_h مقدار تقریبی x_h در D_h باشد سپس خطای کلی (فراگیر) بصورت $E_h^i = x^i - v_h^i$ برای $1\leq i\leq N-1$ می‌باشد. در واقع این خطا مربوط به خطای قطع کردن در مرحله گسسته‌سازی می‌باشد. بطور کلی می‌توان نوشت:

$$\|E_h\|\leq k\,h^p,$$

که در آن $k\in R$ و p مرتبه روش تکرار است (مثلا" در روش تفاضل‌های متناهی مرتبه ۲ $p = 2$ است). چون روش‌های تکراری نیز معمولا" خطا دارند، بنابراین در اینجا فرض می‌کنیم $e_h = x_h - v_h$ خطای روش‌های تکراری بکار برده شده باشند. این خطا را خطای جبری می‌نامند. حال اگر فرض کنیم $\|x - v_h\| < \varepsilon$، که در آن x مقدار واقعی جواب است، آنگاه بایستی $\|E_h\| + \|e_h\| < \varepsilon$ باشد. زیرا

$$\|x - v_h\|\leq\|x - x_h\| + \|x_h - v_h\| = \|E_h\| + \|e_h\| < \varepsilon.$$

یکی از حالات برای برقراری نامساوی فوق این است که $\|E_h\| < \varepsilon/2$ و $\|e_h\| < \varepsilon/2$ باشد. اما از $\|E_h\| < \varepsilon/2$ مقدار بهینه h را میتوان نتیجه گرفت. یعنی:

$$h < h^* = (\varepsilon/2k)^{1/p}.$$

با انتخاب این مقدار بهینه h مطمئن خواهیم بود که بطور کلی خطای روش چندشبکه‌ای به همان خطای روش تکراری بکار برده شده (e_h) میل خواهد کرد. بطور خلاصه اینکه خطای کلی E_h فاصله شبکه h^* را مشخص می‌کند. بنابراین در محاسبات تنها نیاز داریم که خطا را به سطح خطای قطع کردن روی شبکه $h<h^*$ برسانیم.

در ادامهٔ بحث مختصری از برنامه کامپیوتری، که به کمک الگوریتمهای بیان شده در بالا با زبان فورترن نوشته‌ایم، آورده می‌شود. این برنامه جهت معادله انتگرالی فردهولم (۱) نوشته شده است. اجرای برنامه بگونه‌ای است که ابتدا مقادیر λ، توابع معلوم $y(t)$، $K(t,s)$، مرزهای انتگرال، L و n_0 تعداد تکرارهای لازم را به عنوان ورودی اولیه به برنامه می‌دهیم. پس از وارد کردن این مقادیر برنامه بگونه‌ای طراحی شده که میتوان بصورت گزینه‌ای حل معادله (۱) را به روش $V-Cycle$ یا $W-Cycle$ انتخاب نمود. پس از این انتخاب درایه‌های ماتریس‌های P (Prologation) و R (Restrition) را وارد می‌کنیم. همانگونه که قبلا" گفته شد نرم ماتریسهای P و R بایستی کمتر یا مساوی یک باشد. بعد از اجرای برنامه برای هر تکرار در مورد تکرار بعدی یا خروج از این بخش برنامه سئوال می‌شود. بنابراین تکرار را در هر مرحله می‌توان به اندازه دلخواه انجام داد تا به جواب قابل قبولی برسیم. این برنامه جهت استفاده علاقمندان در صورت تماس موجود می‌باشد.

حال با استفاده از این برنامه چندمثال مختلف که جواب تحلیلی آنها دشوار می‌باشد را حل می‌نماییم. جوابهای حاصل را با جوابهای واقعی، در صورت وجود، مقایسه خواهیم کرد.

۵ حل مثال با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری

مثال-۲ معادلهٔ انتگرالی $\lambda x(t) - \int_0^b \exp(st)x(s)ds = y(t)$ را به ازای مقادیر داده شده‌ی زیر در نظر می‌گیریم.

۱. $\lambda=1$ و $b=1$ و $y(t)=\exp(t)-\dfrac{\exp(t+1)-1}{t+1}$

۲. $\lambda=5,50$ و $b=1$

$$y(t)=\exp(-t)\cos(t)+\lambda\left(\begin{array}{c}\dfrac{\exp(t-1)(1-t-2tg(0.5)+tg(0.25))}{(t^2-2t+2)(1+tg(0.25))}\\ +\dfrac{t-1}{(t^2-2t+2)}\end{array}\right).$$

برای حل این معادله، به ازای $\lambda=1$ و $b=1$ ، مقدار اولیه‌ی $x^{(0)}=(-10,0,10)^t$ را به عنوان حدس اولیه برای جواب مساله در نظر می‌گیریم. دقت شود با توجه به اینکه جوا ب اولیه ترمیم می‌شود، تفاوتی نمی‌کند که جواب اولیه را چه مقدار در نظر بگیریم (چون در این صورت شرط همگرایی را داریم). ماتریسهای P و R را طوری انتخاب می‌کنیم که دارای نرم کمتر یا مساوی یک باشند. برای نمونه، $\|R\|_\infty=0.9$ و $\|R\|_\infty=0.98$. نتایج حاصل از حل مسأله در تکرار ۳۵ام با توجه به اینکه $x(t)=\exp(t)$ جواب واقعی مساله می‌باشد (Kress, 1995) در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول ۱- جواب با استفاده از روش دوشبکه‌ای

x	V(x) جواب تقریبی	U(x) جواب دقیق	E خطای مطلق
۰/۰	۰/۶۷۴۳۱	۱/۰	۰/۳۲۵۶۹۰
۰/۵	۱/۲۸۰۶۹	۱/۶۴۸۷۲	۰/۳۶۸۰۳۹
۱/۰	۲/۰۳۳۴۶۴	۰/۷۱۸۲۸	۰/۳۸۳۶۴

با توجه به جوابهای بدست آمده مشاهده می‌کنیم که جوابهایی که با بکار بردن روش دوشبکه‌ای بدست آمده زیاد دقیق نیستند، دلیل این مطلب هم روشن است، زیرا دترمینان ماتریس $(I-K_l)$ نزدیک صفر است و در نتیجه خطای محاسبات بسیار زیاد است. در روش چندشبکه‌ای به دلیل اینکه از معکوس ماتریس روی درشت‌ترین شبکه استفاده می‌کنیم، این خطا به حداقل می‌رسد و دقت جوابها بسیار بالا می‌باشد (جدول ۲).

جدول۲- جواب با استفاده از روش چندشبکه‌ای

x	V(x) جواب تقریبی	U(x) جواب دقیق	E خطای مطلق
۰/۰	۰/۹۹۹۸۸	۱/۰	۰/۰۰۰۱۲
۰/۵	۱/۶۴۸۴۳	۱/۶۴۸۷۲	۰/۰۰۰۳۳
۱/۰	۲/۷۱۸۶۹	۲/۷۱۸۲۸	۰/۰۰۰۴۱

با بررسی شرایط قضیه‌ی (۱) برای این معادله، به این نتیجه می‌رسیم که شرایط قضیه برقرار نیست، زیرا:

$$\max_{t\in D}\int_D |\lambda K(t.s)|ds = \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |\exp(st)|ds$$
$$= \sup_{t\in(0,1)}\frac{\exp(t)-1}{t} = \exp(1) > 1.$$

با توجه به مطلب اخیر و شرایط قضیه‌ی (۲) تضمینی برای همگرایی روش دوشبکه‌ای وجود ندارد. اکنون به ازای $\lambda = 5$ و $\lambda = 50$, $b = 1$, $y = (t)$ مسأله را حل می‌نماییم. جواب اولیه را با توجه به اینکه $n_1 = n_0 2^l = 1\times 4 = 4$ و تعداد نقاط شبکه $n_l + 1 = 4 + 1 = 5$ می‌باشد، با ۵ مولفه به صورت $x^{(0)} = (0,0,0,0,0)^t$ در نظر می‌گیریم. جدولهای ۳ و ۴ خطاهای محاسبات را به ازای $\lambda = 5$ و $\lambda = 50$ به ترتیب در ۱۵ و ۱۰ تکرار برای روشهای دو شبکه‌ای و چند شبکه‌ای نشان می‌دهند. به ازای این مقادیر نشان می‌دهیم که شرایط قضیه‌ی (۲) برقرار است. این قضیه همگرایی روشهای دو و چند شبکه‌ای را در این حالت تضمین می‌کند. در اینجا یکی از شرایط قضیه‌ی (۲) یکتا بودن جواب است. پس ابتدا باید شرایط قضیه‌ی (۱) را بررسی کنیم. به ازای $\lambda = 5$ شرایط قضیه‌ی (۱) برقرار است، زیرا:

$$\max_{t\in D}\int_D |\lambda K(t.s)|ds = \max_{t\in[0,1]}\frac{1}{5}\int_0^1 |\exp(st)|ds$$
$$= \sup_{t\in(0,1)}\frac{\exp(t)-1}{5t_0} = \frac{\exp(1)}{5} < 1.$$

بنابراین این معادلهٔ انتگرالی با شرط λ=5 و $b = 1$ دارای جواب یکتاست. واضح است که شرایط دیگر قضیه‌ی (۲)، به ازای مقادیر داده شده، برقرار است. بنابراین الگوریتمهای روش دوشبکه‌ای و چندشبکه‌ای برای این مثال همگرا هستند. توجه شود که شرط همگرایی نیز به ازای λ=50 نیز برقرار است.

با توجه به جوابهای نسبتا" دقیقی که در مثال بالا، با مقایسه‌ی جوابهای تحلیلی، به کمک برنامه‌ی کامپیوتری ما بدست آمد، در زیر مثالی را می‌آوریم که حل تحلیلی آن به روشهایی که در بخش ۲ اشاره گردید بسیار دشوار است، اما روشن است که به کمک این برنامه پاسخ عددی قابل قبولی را می‌توان بدست آورد.

جدول ۳- جواب با استفاده از روش دوشبکه‌ای و چندشبکه‌ای به ازای λ=5 و N=15

x	خطای مطلق E برای روش دوشبکه‌ای	خطای مطلق E برای روش چندشبکه‌ای
۰/۰	۰/۰۰۱۰۲	۰/۰۰۰۵۹
۰/۲۵	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۰۰۲۹
۰/۵	۰/۰۰۱۰۱	۰/۰۰۰۶۹
۰/۷۵	۰/۰۰۳۵۷	۰/۰۰۲۸۶
۱/۰	۰/۰۰۷۵۸	۰/۰۰۶۴۸
$\|E\|_\infty$	۰/۰۰۷۵۸	۰/۰۰۶۴۸

جدول ۴– جواب با استفاده از روش دوشبکه‌ای و چندشبکه‌ای به ازای λ=50 و N=15.

x	خطای مطلق E برای روش دوشبکه‌ای	خطای مطلق E برای روش چندشبکه‌ای
۰/۰	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۹
۰/۲۵	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۶
۰/۵	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۰۳
۰/۷۵	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۲۳
۱/۰	۰/۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۵۸

مثال ۳– معادله‌ای انتگرالی

$$x(t)=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\exp(t)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{10}+1\right)s\right)}x(s)+y(t)$$

که در آن

$$y(t)=t+\frac{10}{4}\exp(t)\frac{t\left(tg\left(\frac{t}{10}+1\right)\right)+10tg\left(\frac{t}{10}+1\right)+10\ln\left(\cos\left(\frac{t}{10}+1\right)\right)}{(t+10))^2}$$

است را در نظر بگیرید. نتایج حاصل از حل این معادله به کمک برنامه‌ی کامپیوتری، به ازای $l = 3$ ، $n_0 = 1$، از روشهای دو و چند شبکه‌ای، در تکرارهای ۳۵ و ۵۰ به ترتیب در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول-۵ جواب با استفاده از روش دوشبکه‌ای و چندشبکه‌ای برای مثال ۵

X	جواب معادله، به روش دوشبکه‌ای در ۳۵ تکرار	جواب معادله، به روش چندشبکه‌ای در ۵۰ تکرار
۰/۰	۰/۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰۲
۰/۱۲۵	۰/۱۲۴۸۱	۰/۱۲۴۹۹
۰/۲۵	۰/۲۴۸۵۸	۰/۲۴۹۸۱
۰/۳۷۵	۰/۳۷۱۸۶	۰/۳۷۴۹۸
۰/۵	۰/۴۹۴۵۰	۰/۴۹۹۸۱
۰/۶۲۵	۰/۶۱۶۳۰	۰/۶۲۴۱۱
۰/۷۵	۰/۷۳۷۰۰	۰/۷۴۸۹۱
۰/۸۷۵	۰/۸۵۶۲۷	۰/۸۷۴۲۱
۱/۰	۰/۹۷۳۶۶	۰/۹۹۸۷۶

این جوابها همانگونه که ذکر شد، از دقت بالایی برخوردارند، به ویژه اینکه جوابها در روش دوشبکه‌ای و چندشبکه‌ای اختلاف قابل قبولی را نشان می‌دهند.

۶. نتیجه‌گیری

روشن است که حل بیشتر معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی به روش تحلیلی بسیار دشوار و گاهی غیرممکن خواهد بود. در این صورت می‌توان روشهای عددی مختلفی را بکار گرفت. در این روشها حدس اولیه‌ی مناسب بسیار اهمیت دارد. اما در روش چندشبکه‌ای، همانگونه که در مثالهای بالا دیدیم اینگونه نیست. یعنی در این روش می‌توان با یک جواب اولیه‌ی دلخواه برنامه را شروع کرد. بدین ترتیب در همان چند تکرار مقدماتی جواب اولیه تصحیح شده، بگونه‌ای که بسیار سریع به جواب نهایی (در صورت وجود)، خواهیم رسید. این در حالی است که با وجود

گام ترمیم می‌توان کنترلی بر معادلهٔ خطای مانده‌ای داشت تا جایی که جوابهای بدست آمده در هر مرحله از مرحله‌ی قبل دقیقتر شوند.

باید توجه داشت که در هر حال ممکن است این روش بهترین روش نباشد، چراکه در بعضی معادلات ممکن است از روش های دیگر، برای نمونه روش پارکهای محدود، جوابهای بهتری بدست آورد. اما به هر حال روش چندشبکه‌ای یکی از روش‌های کارآمد در بسیاری از مسائل است. مقالات منتشر شده و پیشرفتهایی که افرادی چون اکی برانت (Brandt, 1979, 1996)، داگلاس (Douglas, 1996) و آتکینسون (Atkinson, 1989, 1997)، در قسمتهای مختلف آنالیز عددی بواسطه‌ی این روش و ترکیب آن با روشهای دیگر داشته‌اند، بیانگر این موضوع است.

تشکر و قدردانی

نگارندگان این مقاله مایلند که از شورای پژوهشی دانشگاه شیراز، بدلیل حمایت خود از این پژوهش بعنوان قسمتی از طرح پژوهشی شماره ۶۶۰-۱۲۱۳- SC-۷۸ تشکر و قدردانی نمایند.

References

Atkinson, K., (1989) *An introduction to numerical anaysis*, 2nd Edition, John Wiely & Sons, Newyork.

Atkinson, K., (1997*) The numerical solution of integral equations of the second kind*, Cambridge University press.

Borden, R.L., Douglas F., Reynold, A.C., (1978) *Numberical Analysis*.

Brandt, A., (1979) Multilevel adaptive solution to boundary value problems, Math. Comp., Vol. 31 PP. 333-390.

Brandt, A., (1996) *Multiscale scientific computation*, Six years research summary, Guass center research.

Briggs, W.L.A, (1993) *Multigrid tutorial*, ISAM.

Douglas, C.C., (1996) *Multigrid and multilevel methods in sciences and engineering*, Yale University, Dept. of Computer.

Hakbush, W., (1985) *Multi-Grid methods and applications*, Springer Verlag.

Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G., (1976) Problem and exercises in integral equations.

Kress, R., (1995) *Linear integral equations*, Springer Verlag.

Krishnamurthy, E.E., Sen SK., (1993) Translated by Toutounian, F., Bozorgnia, A. Numerical algorithm, computation in sciences and engineering.